

Fig. 12

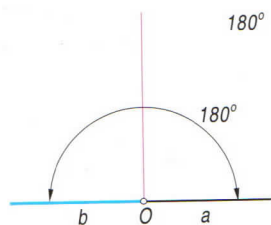


Fig. 13

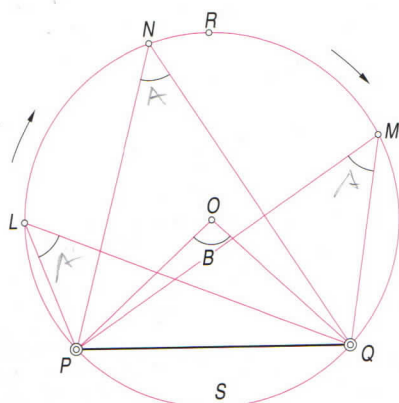


Fig. 14

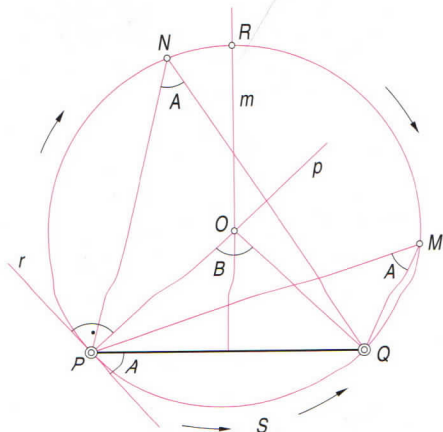


Fig. 15

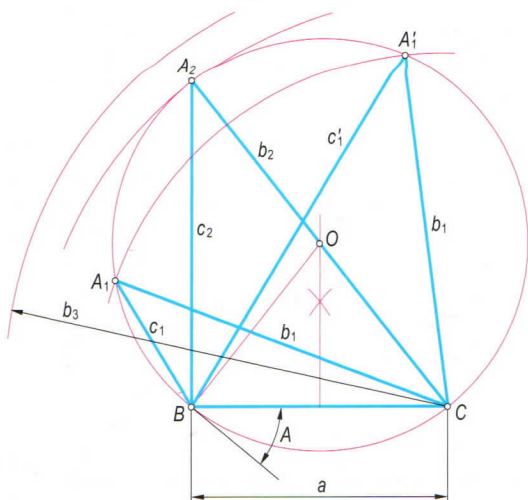


Fig. 16

• **Ángulo de 150° (Fig. 12):**

Obtense como suma dos ángulos de 90° e 60°: o ángulo que forman c e a é de 150°.

• **Ángulo de 180° (Fig. 13):**

É o ángulo raso e a súa construción é inmediata. As semirrectas $O-a$ e $O-b$ forman 180°. Os lados deste ángulo están en prolongación.

8. Arco capaz (Figs. 14 e 15)

Supoñamos a circunferencia de centro O e, nela, unha corda $\overline{PQ}$ (Fig. 14). Se tomamos puntos desta circunferencia como L, N, M , etc. e os unimos con P e Q temos unha serie de ángulos inscritos que son iguais, xa que os seus extremos comprenden o mesmo arco $\widehat{PSQ}$ de circunferencia.

Arco capaz dun segmento PQ baixo un ángulo A é o lugar xeométrico dos puntos do plano dende os que se ve este segmento baixo o ángulo A (Fig. 14).

Para construír o arco capaz do segmento $\overline{PQ}$ que se vexa baixo un ángulo A (Fig. 15), tómasse o segmento $\overline{PQ}$, trázase a súa mediatriz m e débúxase a recta r que forma o ángulo A con $\overline{PQ}$. A perpendicular por P ao lado r do ángulo A corta a mediatriz en O .

O arco de circunferencia $\widehat{PRQ}$ de centro O e raio $\overline{OP} = \overline{OQ}$ é o arco capaz. Isto quere dicir que se tomamos puntos como N e M e os unimos con P e Q , obtemos ángulos iguais a A .

O valor do ángulo A , semiinscritos, é igual á metade do ángulo central B , ángulo $P-O-Q$.

O arco $\widehat{PSQ}$ sería o arco capaz do segmento $\overline{PQ}$ baixo un ángulo de 180°- A .

9. Aplicación do arco capaz na construción dun triángulo (Fig. 16)

Os datos do triángulo son os lados a e b e o ángulo $\hat{A}$ oposto ao lado a .

Pódese obter o triángulo construíndo o arco capaz do segmento a baixo o ángulo $\hat{A}$. Se $b = b_1$, hai dúas solucións, que son os triángulos A_1BC e A'_1BC . Obtéñense facendo centro en C e, con raio b_1 , cortar o arco capaz, que é a circunferencia de centro O e raio $\overline{OB} = \overline{OC}$. Se $b = b_2$, igual ao diámetro da circunferencia que contén o arco capaz, hai unha única solución, triángulo A_2BC . Se $b = b_3$, maior que o diámetro da circunferencia, o problema non ten solución.

PROBLEMA NON TEN SOLUCIÓN!!!

10. Cuadrilátero inscriteble (Figs. 17 y 18)

Un cuadrilátero é inscriteble cando pode ser inscrito nunha circunferencia.

Un cuadrilátero está inscrito nunha circunferencia cando os seus catro vértices están nela (Fig. 17).

Do que estudamos na construción do arco capaz (Fig. 15) podemos deducir que, por exemplo, os arcos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{BCD}$ son arco capaz da diagonal BD e os vértices A e C , opostos, teñen ángulos suplementarios, isto é, suman 180° . Tamén son suplementarios os ángulos opostos B e D . Por tanto, pódese dicir que todo cuadrilátero convexo cuxos ángulos opostos son suplementarios é inscriteble.

En todo cuadrilátero inscrito, son iguais os ángulos que forman as diagonais con dous lados opostos (Fig. 18).

$$A_1 = B_1; B_2 = C_2; C_1 = D_1; D_2 = A_2$$

Reciprocamente, pódese dicir que todo cuadrilátero convexo é inscriteble se cumpre algunha das igualdades anteriores.

Aplicación: Un cuadrilátero é inscriteble nunha circunferencia se demostra calquera destas dúas propiedades:

1. Que os ángulos de dous vértices opostos son suplementarios.
2. Que os ángulos formados polas diagonais con dous lados opostos son iguais.

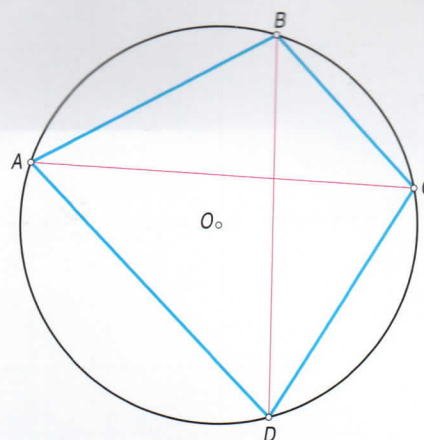


Fig. 17

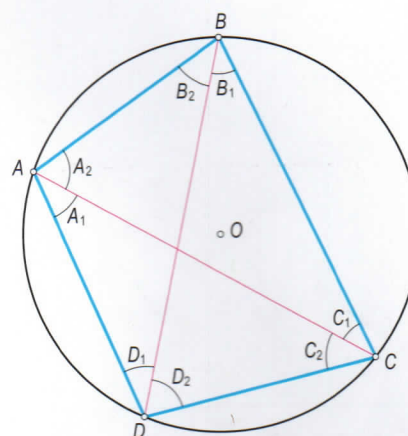


Fig. 18

11. Construción gráfica do cuarto segmento proporcional a outros tres a , b e c (Fig. 19)

O cuarto proporcional x a tres segmentos a , b e c exprésase así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Esta fórmula constrúese na figura aplicando o teorema de Thales.

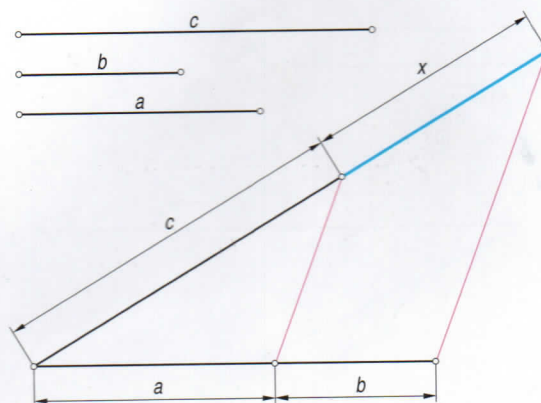


Fig. 19

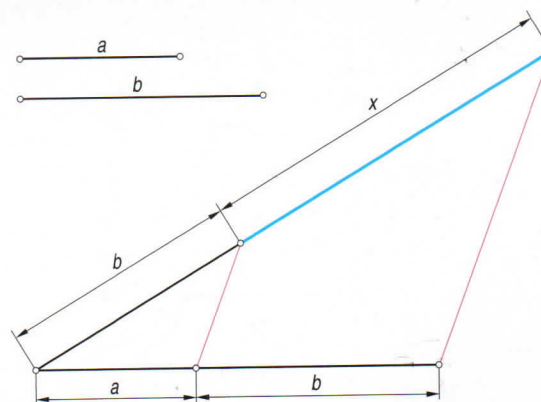


Fig. 20

12. Construción gráfica do terceiro segmento proporcional a outros dous a e b (Fig. 20)

O terceiro proporcional x a dous segmentos a e b exprésase así:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Constrúese como no caso anterior no que se repite o segmento b .

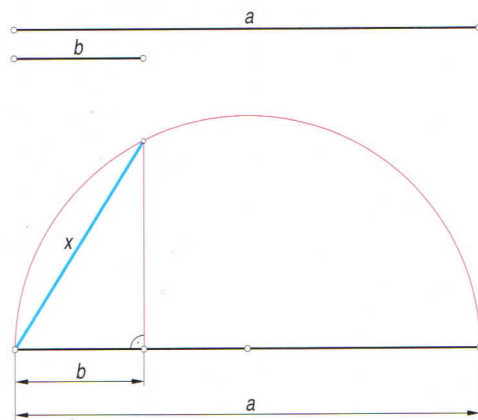


Fig. 21

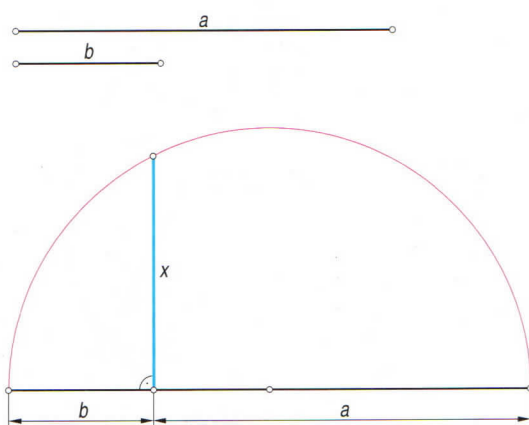


Fig. 22

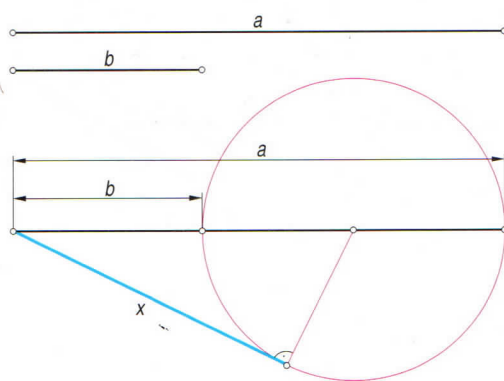


Fig. 23

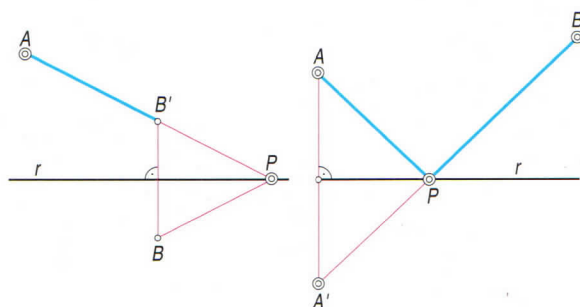


Fig. 24

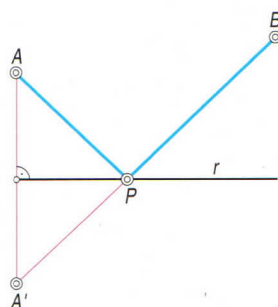


Fig. 25

13. Construción gráfica da media proporcional de dous segmentos a e b

Primeiro procedemento (Fig. 21).

A media proporcional x de dous segmentos a e b exprésase así:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

proporción na que é descoñecido o medio común, ou o que é o mesmo: $x^2 = a \cdot b$. Aplicamos o teorema de triángulos rectángulos que di: **un cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela**. Así, tomamos o segmento a , e sobreposto nel o segmento b ; a semicircunferencia de diámetro a permítenos obter o segmento x , media proporcional buscado.

Segundo procedemento (Fig. 22).

Na figura obtense a media proporcional x dos segmentos a e b por outro procedemento: aplícase o teorema de triángulos rectángulos que di: **a altura sobre a hipotenusa é a media proporcional dos segmentos en que a divide**.

Terceiro procedemento (Fig. 23).

Nesta figura obtense a media proporcional x aos segmentos a e b sabendo que **a potencia dun punto respecto dunha circunferencia é igual ao cadrado da tanxente trazada dende o punto á circunferencia** (este concepto de potencia explícase no capítulo seguinte). De acordo con isto, colócanse os segmentos a e b como indica a figura e trázase a tanxente dende o extremo común de a e b á circunferencia de diámetro $a-b$.

14. Problema (Fig. 24)

Dados dous puntos A e B e unha recta r que os separa, encontrar nela o punto P tal que a diferenza $PA - PB$ sexa máxima.

Áchase o simétrico do punto B respecto á recta r , punto B' , e únese con A . O punto P é o pedido e a diferenza máxima é $\overline{AB'}$.

15. Problema (Fig. 25)

Dados dous puntos A e B e unha recta r tal que os dous puntos están no mesmo semiplano, encontrar nela o punto P tal que a suma $\overline{PA} + \overline{PB}$ sexa mínima.

Áchase o simétrico do punto A respecto a r , e únese co punto B . O punto P é o pedido e a suma mínima é $\overline{PA} + \overline{PB}$.

16. Construción dun cadrado equivalente a un pentágono regular (Fig. 26)

Transfórmase o pentágono no triángulo equivalente 1-M-N mediante as paralelas 5-M e 2-N ás diagonais 1-4 e 1-3 do pentágono. Despois, a partir do triángulo, obtense o cadrado equivalente: $L^2 = b \cdot a/2$. Desta forma, abonda con construír a media proporcional da base e a metade da altura para ter o lado L do cadrado.

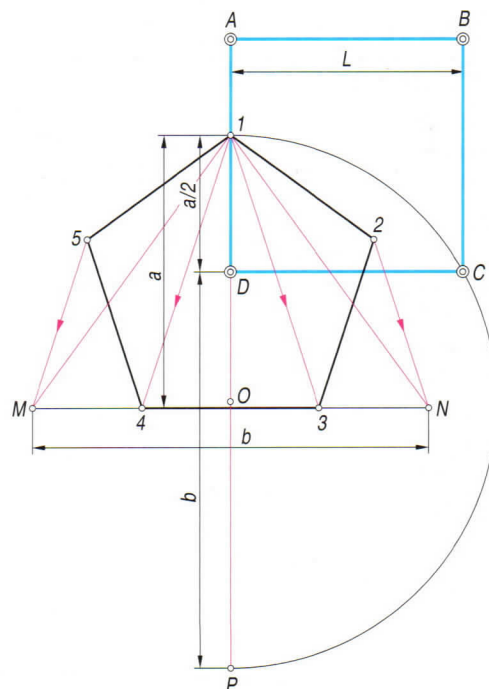


Fig. 26

17. Cuadratura do círculo (Fig. 27)

Pódese construír o cadrado equivalente a un círculo dado. A pesar de non ser este un problema exacto, xa que na área intervén o número inconmensurable π , pódese obter graficamente con bastante aproximación. A área do círculo é πr^2 , e a do cadrado que se busca é L^2 . Se igualamos as dúas superficies obtemos $\pi r^2 = L^2$, ou o que é o mesmo: $L^2 = \pi r \cdot r$. Disto dedúcese que o lado L do cadrado que buscamos é a media proporcional entre os segmentos πr e r . Na figura tómasse o raio r e o segmento πr , que é a rectificación da semicircunferencia (suma de $\overline{PR}$ e $\overline{PQ}$), e trázase a semicircunferencia de diámetro $r + \pi r$. O segmento $L = \overline{AD}$ é o lado do cadrado buscado e con el constrúese o mesmo.

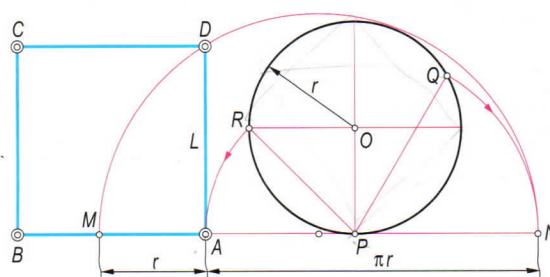


Fig. 27

18. Construción dun círculo equivalente a unha elipse (Fig. 28)

Iguálanse as áreas das dúas figuras e temos: $\pi r^2 = \pi ab$; disto dedúcese $r^2 = a \cdot b$. Só hai que achar a media proporcional entre os semieixos a e b da elipse para obter o raio r do círculo equivalente. Na figura, $\overline{ON} = \overline{OD} = b$ e $\overline{OB} = a$; trázase a circunferencia de diámetro $\overline{NB} = a - b$ e a tanxente a ela dende O é o raio $r = \overline{OP}$ da circunferencia equivalente á elipse.

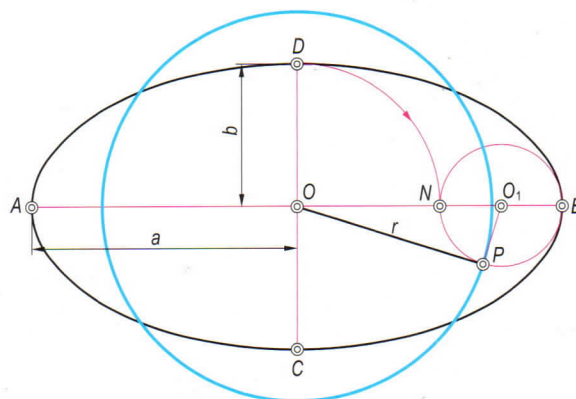


Fig. 28