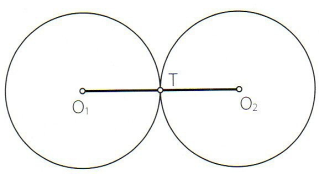
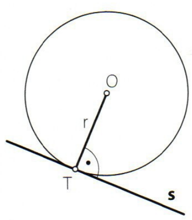
4.1. PROPIEDADES DE LAS TANGENCIAS

Vamos a recordar las propiedades de las tangencias, que estudiamos el curso pasado.

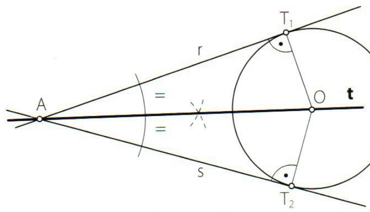
1.ª El punto de tangencia de dos circunferencias se encuentra en la recta que une sus centros.



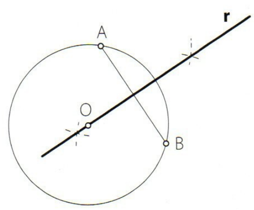
2.ª Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio de esta última es perpendicular a la recta en el punto de tangencia.



3.ª En la bisectriz del ángulo que forman dos rectas que se cortan, se encuentra el centro de la circunferencia tangente a ambas rectas.



4.ª En la mediatriz del segmento que une dos puntos se encuentra el centro de la circunferencia que pasa por ambos. Así, todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.

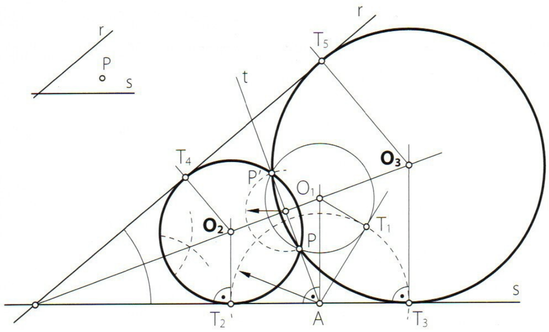


4.2. RESOLUCIÓN DE TANGENCIAS APLICANDO EL CONCEPTO DE POTENCIA

• CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS QUE SE CORTAN r Y s Y PASAN POR UN PUNTO P DADO:

Las circunferencias solución pasan por el punto P y por el P', simétrico del P respecto de la bisectriz del ángulo que forman las rectas r y s.

- Tomamos una circunferencia cualquiera cuyo centro O_1 esté en la bisectriz y que pase por P y P'.
- La recta PP' corta en el punto A a la recta s, desde A se traza la tangente a la circunferencia auxiliar obteniendo T_1.
- Con centro en A se lleva la longitud de la tangente sobre la recta s, teniendo los puntos T_2 y T_3 de tangencia de las circunferencias soluciones con la recta s.
- Las perpendiculares por T_2 y T_3 a s, nos dan los puntos O_2 y O_3 sobre la bisectriz, centros de las soluciones.

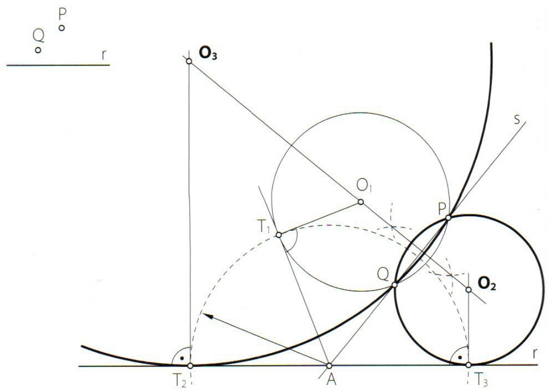


El punto A tiene la misma potencia respecto de las soluciones y de la auxiliar; es, por tanto, el centro radical.

• CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y QUE PASAN POR DOS PUNTOS:

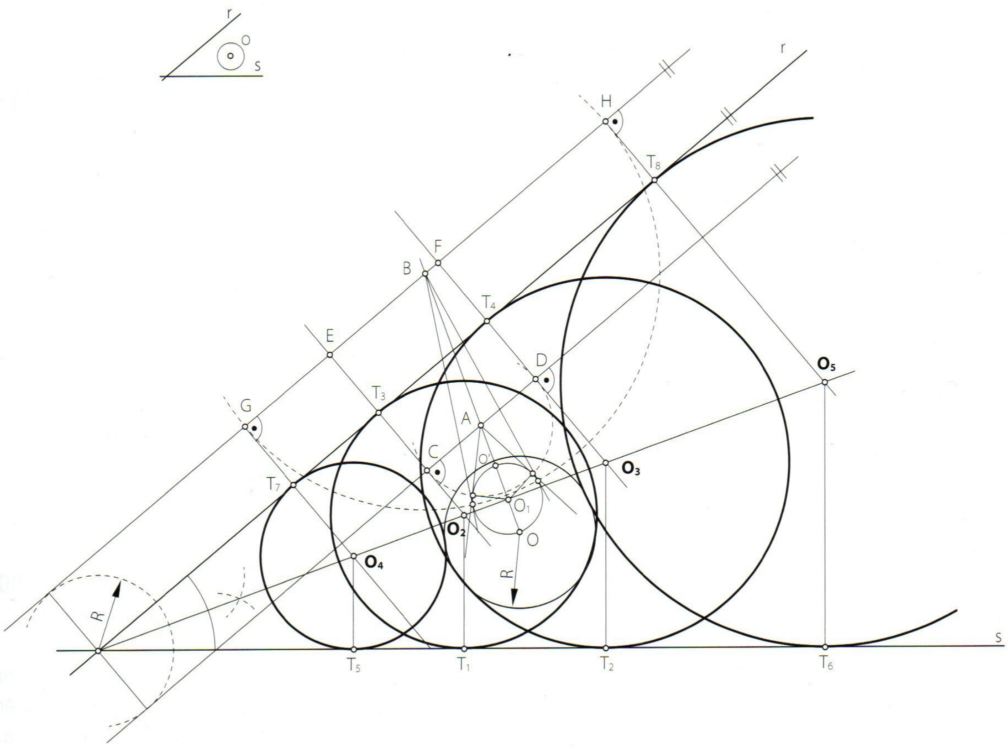
Dados los puntos P, Q y la recta r.

- Unimos P y Q mediante la recta s hasta cortar a r en el punto A.
- Hallar la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$.
- Con centro en un punto cualquiera O_1 de la mediatriz, se dibuja una circunferencia que pase por P y Q.
- Hallamos la recta tangente a la circunferencia auxiliar de centro O_1, desde el punto A y obtenemos T_1.
- Con centro en A y radio hasta el punto de tangencia T_1 trazamos un arco que cortará a la recta r en los puntos T_2 y T_3, puntos de tangencia de las circunferencias solución con la recta r.
- Por T_2 y T_3 se levantan sendas perpendiculares a la recta r hasta cortar a la mediatriz de $\overline{PQ}$, en los puntos O_2 y O_3, centros de las circunferencias buscadas.



• CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS r Y s QUE SE CORTAN Y A UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO DADO O:

- Trazamos dos rectas paralelas a la recta r dada a una distancia igual al radio de la circunferencia O.
- Situamos el punto O' simétrico, respecto a la bisectriz de r y s, del centro O dado.
- Trazamos una circunferencia de centro O_1 que pase por los dos centros.
- La recta que forman los dos puntos O y O' cortará a las rectas paralelas, trazadas anteriormente en los puntos A y B.
- Calculamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia de radio $\overline{OO'}$ trazadas desde el punto A.
- Trazamos un arco con centro en A y que pase por los puntos de tangencia, obteniendo así dos puntos C y D en la recta paralela donde se encuentra A.
- Si trazamos las perpendiculares a la recta paralela por esos puntos, éstas cortarán a la recta bisectriz en los puntos O_2 y O_3 que serán dos centros de las circunferencias solución. Del mismo modo obtendremos dos centros más, O_4 y O_5, con el punto B y la otra recta paralela.

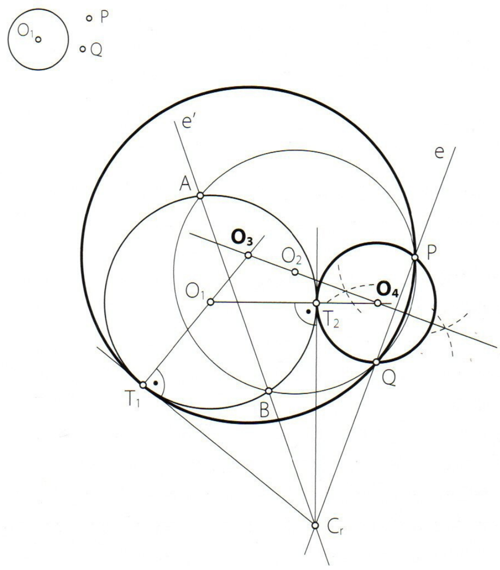


- **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRA DE CENTRO CONOCIDO O_1 Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS DADOS P Y Q:**

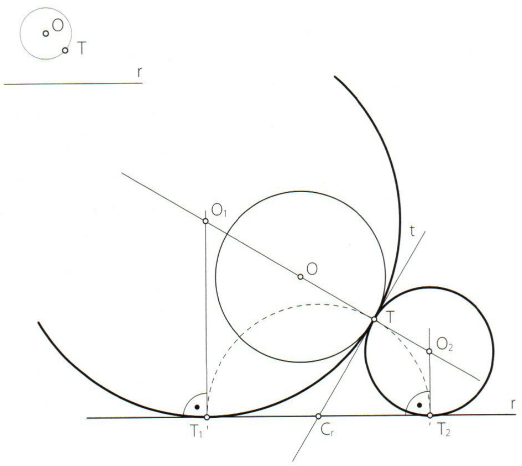
En la mediatriz de los dos puntos dados estarán los centros de las circunferencias solución.

La unión de los dos puntos dados es un eje radical e.

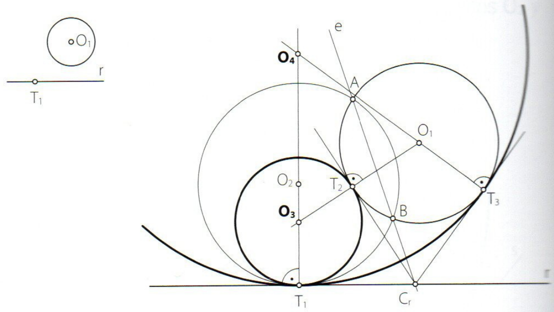
- Con centro en un punto cualquiera O_2 de la mediatriz se traza una circunferencia auxiliar, que pasará por los dos puntos dados P y Q, esta circunferencia corta a la dada en los puntos A y B. La recta que pasa por A y B es un segundo eje radical e'.
- Donde se cortan los dos ejes radicales, e y e', tenemos el centro radical Cr.
- Se trazan las rectas tangentes a la circunferencia dada de centro O_1, desde el centro radical Cr y se hallan los puntos de tangencia T_1 y T_2.
- Unimos los puntos de tangencia con el centro de la circunferencia dada O_1 y donde estas rectas corten a la mediatriz inicial se obtienen los centros de las circunferencias buscadas O_3 y O_4.



- **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRA DE CENTRO CONOCIDO O Y A UNA RECTA r CONOCIENDO EL PUNTO DE TANGENCIA T CON LA CIRCUNFERENCIA:**
- Se trazar la recta tangente a la circunferencia dada por el punto T.
- Esta tangente se prolonga hasta cortar a la recta r en el punto Cr (centro radical).
- Con centro en Cr y radio hasta el punto T se traza un arco, y donde éste corta a la recta r obtenemos los puntos de tangencia T_1 y T_2.
- Trazamos sendas perpendiculares a la recta r por estos puntos de tangencia.
- Los centros de las circunferencias buscadas, O_1 y O_2, se encuentran donde las perpendiculares trazadas cortan a la prolongación de la recta OT.

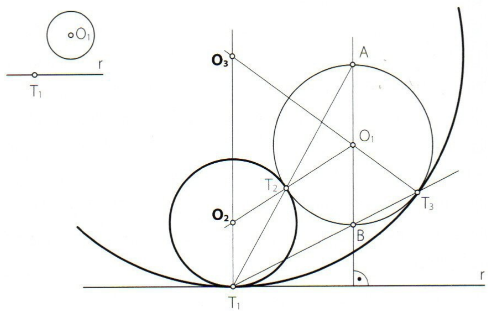


- **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRA DE CENTRO CONOCIDO O_1 Y A UNA RECTA r CONOCIENDO EL PUNTO DE TANGENCIA T_1 CON LA RECTA:**
- Por el punto T_1 de tangencia dado, trazamos una perpendicular a la recta r.
- Trazamos sobre esa perpendicular, una circunferencia de centro O_2 y radio hasta el punto T_1 y que corte a la circunferencia dada en los puntos A y B.
- Se unen los puntos de corte de ambas circunferencias A y B (eje radical) y donde esta recta e corta a r, tenemos el centro radical Cr.
- Desde Cr se trazan las rectas tangentes a la circunferencia dada de centro O_1, y se hallan los puntos de tangencia T_2 y T_3.
- Basta unir estos puntos de tangencia con el centro de la circunferencia dada para determinar los centros buscados O_3 y O_4, sobre la perpendicular a r trazada anteriormente desde T_1.



4.3. RESOLUCIÓN DE TANGENCIAS APLICANDO EL CONCEPTO DE INVERSIÓN

- **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRA DE CENTRO CONOCIDO O_1 Y A UNA RECTA r CONOCIENDO EL PUNTO DE TANGENCIA T_1 EN LA RECTA:**
- Por el centro O_1 de la circunferencia dada se traza una recta perpendicular a r que corta a la circunferencia en los puntos A y B, centros de inversión positiva y negativa.
- En la inversión de centro A, al punto T_1, le corresponde T_2, alineado con A y T_1, y perteneciente a la circunferencia de centro O_1. Éste será el punto de tangencia con esta circunferencia en una de las soluciones. El centro de la solución O_2 estará en la intersección de la perpendicular a r por T_1 y la recta O_1T_2.
- Si tomamos el punto B como centro de la inversión negativa y determinamos el punto T_3 inverso de T_1, podremos hallar el otro centro de la solución, O_3, siguiendo el mismo procedimiento que hemos utilizado para obtener O_2.



Como se pode comprobar, o segundo exercicio da páxina 65 é como o 5 de esta páxina, a diferencia está en que os dous puntos nun caso están dentro da circunferencia e no outro dentro..
Pódense practicar os dous para comprobar a utilidade da técnica da potencia.