TEMA 1 – LOS NÚMEROS REALES

1.0 INTRODUCCIÓN

1.0.1 ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS

$$
\text{????????}\begin{cases}
\text{RACIONALES (Q)}\begin{cases}
\text{ENTEROS (Z)}\begin{cases}
\text{NATURALES (N)} \Rightarrow 0\,;4\,;\dfrac{24}{6};\sqrt{81}\ldots\ldots \\
\text{ENTEROS NEGATIVOS} \Rightarrow -11\,;\dfrac{-24}{4};\sqrt[3]{-8}\ldots.
\end{cases} \\
\begin{array}{l}\text{FRACCIONARIOS.} \Rightarrow \\ \text{(Racionales no enteros)}\end{array}\begin{cases}
\text{Decimales exactos}: 0{,}31\,;\dfrac{3}{4};\ldots\ldots \\
\text{Decimales periódicos puros}: \dfrac{4}{3};7{,}\overline{31};\ldots. \\
\text{Decimales periódicos mixtos}: 7{,}3\widehat{1}\ldots..
\end{cases}
\end{cases} \\
\text{NO RACIONALES} \Rightarrow \sqrt{2}\,;-\sqrt{3}\,;\sqrt[3]{5}\,;\pi;\text{Decimales no periódicos}\ldots..
\end{cases}
$$

1.0.2 PASAR DE FRACCIÓN A DECIMAL

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división del numerador entre el denominador.

Ejemplos:

- $\dfrac{8}{4} = 2 \Rightarrow$ Natural
- $\dfrac{9}{4} = 2{,}25 \Rightarrow$ Decimal exacto
- $\dfrac{4}{3} = 1{,}333333\ldots. = 1{,}\widehat{3} \Rightarrow$ Decimal periódico puro
- $\dfrac{7}{6} = 1{,}166666\ldots. = 1{,}1\widehat{6} \Rightarrow$ Decimal periódico mixto

1.0.3 PASAR DE DECIMAL A FRACCIÓN

Decimales exactos:

$N = 2{,}38$	Multiplicar por la potencia de 10 adecuada para convertirlo en entero.
$100N = 238$	Despejar N
$N = \dfrac{238}{100}$	Simplificar la fracción, si es posible $\Rightarrow N = \dfrac{119}{50}$

Decimales periódicos puros:

$N = 2{,}\overline{38}$	Multiplicar por la potencia de 10 adecuada para obtener otro número con el mismo periodo.
$100N = 238{,}\overline{38}$	Restarlos (Se van los periodos)
$99N = 236$	Despejar N
$N = \dfrac{236}{99}$	Simplificar la fracción, si es posible $\Rightarrow N = \dfrac{236}{99}$

Decimales periódicos mixto:

$N = 2{,}3\widehat{8}$	Multiplicar por la potencia de 10 adecuada para convertirlo en periódico puro
$10N = 23{,}\overline{8}$	Multiplicar por la potencia de 10 adecuada para obtener otro número con el mismo periodo.
$100N = 238{,}\overline{8}$	Restarlos (Se van los periodos)
$90N = 215$	Despejar N
$N = \dfrac{215}{90}$	Simplificar la fracción, si es posible $\Rightarrow N = \dfrac{43}{18}$

1.1 NÚMEROS IRRACIONALES

INTRODUCCIÓN

Números racionales son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es exacta o periódica.

Números irracionales son los no racionales, es decir, los que no pueden obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica.

Hay infinitos números irracionales, algunos de los cuales son especialmente interesantes. Veamos alguno:

- La diagonal del cuadrado de lado 1: $\sqrt{2}$
- Si p no es cuadrado perfecto, $\sqrt{p}$ es irracional.
- En general, si p es un número entero y $\sqrt[n]{p}$ no es un número entero (es decir, p no es una potencia n-ésima), entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.
- La diagonal de un pentágono de lado unidad: $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ("fi": Número áureo)
- La relación entre la longitud de una circunferencia y su radio: Π ("pi")

1.2 LOS NÚMEROS REALES

1.2.1 DEFINICIÓN

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama **conjunto de números reales** y se designa por **R**.

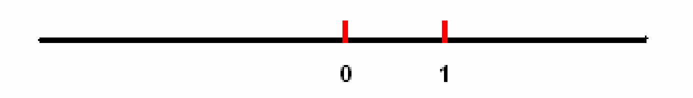
$$
\text{REALES (R)}\begin{cases}
\text{RACIONALES (Q)}\begin{cases}
\text{ENTEROS (Z)}\begin{cases}
\text{NATURALES (N)} \Rightarrow 0\,;4\,;\dfrac{24}{6};\sqrt{81}\ldots\ldots \\
\underset{\text{(Enteros negativos)}}{\text{ENTEROS NO NATURALES}} \Rightarrow -11\,;\dfrac{-24}{4};\sqrt[3]{-8}\ldots.
\end{cases} \\
\underset{\text{(Racionales no enteros)}}{\text{FRACCIONARIOS}}. \Rightarrow \begin{cases}
\text{Decimales exactos}: 0{,}31\,;\dfrac{3}{4};\ldots\ldots \\
\text{Decimales periódicos puros}: \dfrac{4}{3};7{,}\overline{31};\ldots. \\
\text{Decimales periódicos mixtos}: 7{,}3\widehat{1}\ldots..
\end{cases}
\end{cases} \\
\text{IRRACIONALES (I)} \Rightarrow \sqrt{2}\,;-\sqrt{3}\,;\sqrt[3]{5}\,;\pi;\text{Decimales no periódicos}\ldots..
\end{cases}
$$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que hacíamos con los números racionales: sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por el cero) y se siguen manteniendo las mismas propiedades.

También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

1.2.2 LA RECTA REAL

Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real**.

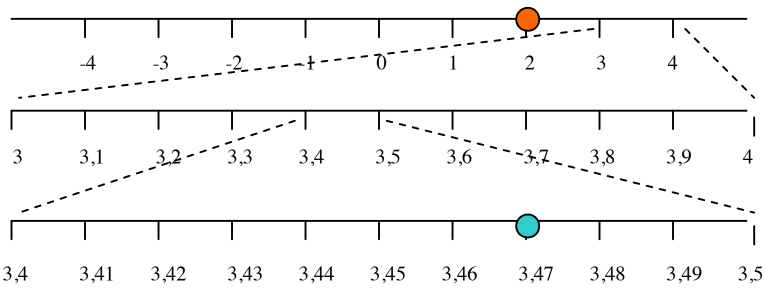


1.2.3 REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS SOBRE LA RECTA REAL

Todo número real puede situarse sobre la recta real, dependiendo de cómo sea el número:

Representación de naturales, enteros o decimales exactos

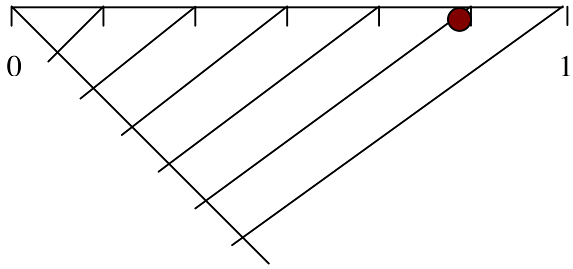
Ejemplo: **2**; **3,47**



Decimal periódico:

Pueden expresarse en forma de fracción y representar la fracción (Se divide cada unidad en tantas partes como tenga en denominador y se toman tantas como tenga el numerador.)

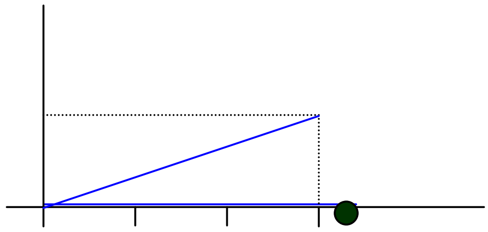
Ejemplo : 0,8333333….. = 5/6



Ejemplo : 11/6 = 1 + 5/6 (Se divide igual pero la unidad entre el 1 y el 2)
Ejemplo : -11/6 = -1 – 5/6 (Se divide igual pero la unidad entre el –1 y 11 –2)

Representación de irracionales cuadráticos

Si un número irracional es radical cuadrático o una combinación de ellos, se puede representar construyendo triángulos rectángulos (Se utiliza el teorema de Pitágoras donde la hipotenusa es lo que queremos dibujar.)

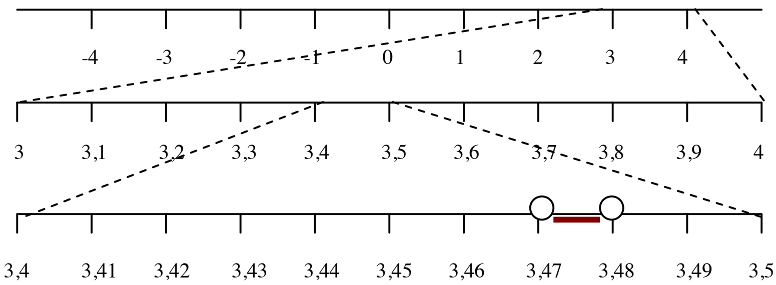


$$\left(\sqrt{10}\right)^2 = 3^2 + 1^2$$

Representación de números irracionales

Si un número irracional viene dado por su expresión decimal, podemos representarlo, de forma aproximada:

Ejemplo: 3,470470047.....

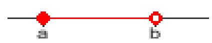
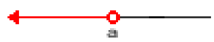
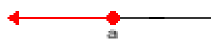
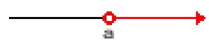
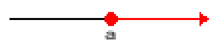


Podemos afinar tanto como queramos.

Los números reales pueden ser representados en la recta real, según los casos, de forma exacta, o bien con tanta aproximación como queramos.

1.3 INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Para designar algunos tramos de la recta real, existe una nomenclatura especial:

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	{ x / a < x < b } Nº comprendidos entre a y b, sin incluir a ni b	
Intervalo cerrado	[a,b]	{ x / a ≤ x ≤ b } Nº comprendidos entre a y b, ambos incluidos.	
Intervalo semiabierto	(a,b]	{ x / a < x ≤ b } Nº comprendidos entre a y b, incluido b pero no a	
	[a,b)	{ x / a ≤ x < b } Nº comprendidos entre a y b, incluido a pero no b	
Semirrecta	(-∞,a)	{ x / x < a } Números menores que a	
	(-∞,a]	{ x / x ≤ a } Nº menores que a y el propio a	
	(a,+∞)	{ x / a < x } Números mayores que a	
	[a,+∞)	{ x / a ≤ x } Nº mayores que a y el propio a	

La propia **recta real** se representa en forma de intervalo, así: R = (-∞,+∞)

1.4 POTENCIAS

PROPIEDADES Y OPERACIONES CON POTENCIAS

[1] $a^0 = 1$ [3] $a^m.a^n = a^{m+n}$ [6] $(a.b)^n = a^n.b^n$ [8] $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

[2] $a^1 = a$ [4] $a^m : a^n = a^{m-n}$ [7]$(a:b)^n = a^n : b^n$ [9] $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

[5] $(a^m)^n = a^{m.n}$

1.5 RAÍCES Y RADICALES

1.5.1 DEFINICIÓN

Se llama **raíz n-ésima** de un número a y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, a **radicando,** y n, **índice** de la raíz.

1.5.2 ALGUNAS PECULIARIDADES DE LAS RAÍCES

Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n
Si $a < 0$, sólo existe su raíz de índice impar.
Aunque en general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$, con $\sqrt{4}$ nos referimos a su raíces positiva, es decir, a 2.

1.5.3 FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

Forma exponencial de radicales : $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

1.5.4 POTENCIAS Y RAÍCES CON CALCULADORA

Raíces cuadradas: "$\sqrt{\ }$"

$\sqrt{180}$ $\Rightarrow$ "$\sqrt{\ }$" "180" "=" $\Rightarrow$ 13,41640786

Potencias: "x^y"

2^{64} $\Rightarrow$ "2" "x^y" "64" "=" $\Rightarrow$ $1{,}844674407^{19}$ $\Rightarrow$ $1{,}844674407 . 10^{19}$

Raíces con la tecla "x^y"

$\sqrt[5]{483^2} = (483)^{2/5} \Rightarrow$ "483" "(" "2" ":" "5" ")" "=" $\Rightarrow$ 11,84619432

$\sqrt[10]{100000} = 100000^{1/10} \Rightarrow$ "100000" "x^y" "10" "1/x" "=" $\Rightarrow$ 3,16227766

Tecla "$x^{1/y}$" (En otras calculadoras "$\sqrt[x]{\ }$")

$\sqrt[5]{350} = 350^{1/5} \Rightarrow$ "350" "$x^{1/y}$" "5" "=" $\Rightarrow$ 3,227108809

1.6 PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Los radicales tienen una serie de propiedades que se deducen de las propiedades de las potencias:

1. $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
2. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

6. **Suma o diferencia de radicales** : Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Sólo puede sumarse radicales idénticos.
   $\sqrt{2} + \sqrt{3} =$
   $2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{5}$
   $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{2500} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2.3^2} + \sqrt[4]{2^2.5^4} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

7. **Para multiplicar o dividir radicales**: Primero hay de reducirlos a índice común
   $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{2.3} = \sqrt{6}$
   $\sqrt{2}.\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3.5^2} = \sqrt[6]{200}$

8. **Racionalización de denominadores** : A veces conviene suprimir las raíces del denominador. Para ello hay que multiplicarlo por la expresión adecuada. Naturalmente, el numerador también se multiplicará por esa misma expresión.
   $$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}.\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$
   $$\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{1}{5-\sqrt{3}}.\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{25-3} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$$

1.7 NÚMEROS APROXIMADOS. NOTACIÓN CIENTÍFICA

17.1 EXPRESIÓN APROXIMADA DE UN NÚMERO. CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Cuando utilizamos los números decimales para expresar mediciones concretas, se deben dar con una cantidad adecuada de cifras significativas.

Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Sólo de deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste.

Para expresar una cantidad con un número determinado de cifras significativas recurriremos al redondeo, si la primera cifra que despreciamos es mayor o igual que 5 aumentamos en una unidad la última cifra significativa y si es menor que cinco la dejamos como está.

Ejemplos: Redondear con tres cifras significativas:
123.421 ≅ 123.000
123.521 ≅ 124.000
123.721 ≅ 124.000

Al redondear números decimales, normalmente, nos quedamos con dos decimales.

1.7.2 CONTROL DEL ERROR COMETIDO

Cuando damos una medida aproximada, estamos cometiendo un error.

El **Error Absoluto** es la diferencia entre el Valor Real y el Valor Aproximado, en valor absoluto (en positivo)

$$\text{Error Absoluto} = |\text{ Valor Real} - \text{Valor Aproximado }|$$

El valor exacto, generalmente, es desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo: **el error absoluto es menor que…** Una cota del error absoluto se obtiene a partir de la última cifra utilizada: (0,5 unidad de la última cifra utilizada)

Pero no es lo mismo cometer un error de un centímetro al medir una tiza que una pizarra, por tanto definimos:

El **Error Relativo** como es el cociente entre el error absoluto y el valor real

$$\text{Error Relativo} = \frac{\text{Error Absoluto}}{\text{Valor Real}}$$

Es tanto menor cuántas más cifras significativas se usan.

Llamamos **cotas de los errores** a cantidades mayores o iguales que los errores con menor o igual número de cifras significativas.

1.8 NOTACIÓN CIENTÍFICA

1.8.1 INTRODUCCIÓN

Los números siguientes están puestos en notación científica:

$2{,}48 \cdot 10^{14} = 248.000.000.000.000$ (14 cifras a partir de la coma)

$7{,}561 \cdot 10^{-14} = 0{,}00000000000007561$ (14 cifras de la coma al 7)

La notación científica tiene sobre la usual la siguiente ventaja: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para **expresar números muy grandes o muy pequeños.**

1.8.2 DEFINICIÓN

Un número puesto en notación científica consta de :

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero(la de las unidades)
- El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a\,,bcd\ldots\ldots \times 10^{n}$$

a = Parte entera (sólo una cifra)
bcd..... = Parte decimal
10^n = Potencia entera de base 10

Si n es positivo, el número N es “grande”
Si n es negativo, el número N es “pequeño”

1.8.3 OPERACIONES CON NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

En sumas y en restas hay que preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10 y así poder sacar factor común.

$$\begin{aligned} 5{,}83 \cdot 10^{9} + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} &= 5{,}83 \cdot 10^{9} + 6932 \cdot 10^{9} - 75 \cdot 10^{9} = \\ &= (5{,}83 + 6932 - 75) \cdot 10^{9} = \\ &= 6862{,}83 \cdot 10^{9} = 6{,}86283 \cdot 10^{12} \cong 6{,}86 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

El producto, el cociente y la potencia son inmediatos, teniendo en cuenta:

$$10^{b} \cdot 10^{c} = 10^{b+c} \qquad 10^{b} : 10^{c} = 10^{b-c} \qquad \left(10^{b}\right)^{c} = 10^{b.c}$$

$$(5{,}24 \cdot 10^{6}) \cdot (6{,}3 \cdot 10^{8}) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} = 3{,}3012 \cdot 10^{15} \cong 3{,}3 \cdot 10^{15}$$

$$(5{,}24 \cdot 10^{6}) : (6{,}3 \cdot 10^{8}) = (5{,}24 : 6{,}3) \cdot 10^{6-8} = 0{,}8317 \cdot 10^{-2} = 8{,}317 \cdot 10^{-3} \cong 8{,}32 \cdot 10^{-3}$$

$$(5{,}24 \cdot 10^{6})^{2} = (5{,}24)^{2} \cdot 10^{6.2} = 27{,}4576 \cdot 10^{12} = 2{,}74576 \cdot 10^{13} \cong 2{,}75 \cdot 10^{13}$$