8 Semejanza

Estamos rodeados de representaciones a escala del mundo real: el plano de una casa, el callejero de tu ciudad, las maquetas de los grandes monumentos…

Los arquitectos o los publicistas, con sus dibujos, representan objetos reales reduciendo su tamaño. Por ejemplo, el cuadro Gran Vía *de Antonio López es un reflejo de la realidad. La real y la reproducida son imágenes semejantes.*

En el siglo IV a. C. los atenienses pidieron ayuda a los dioses para terminar con una epidemia. A cambio, debían duplicar el volumen de un altar con forma de cubo, dedicado al dios Apolo. Los atenienses construyeron un altar cuya arista medía el doble que la arista inicial.

a) Supongamos que el altar fuera un cubo de 3 m de arista. ¿Cuál sería su volumen?

b) Si se duplica la arista, ¿cuál es el volumen del nuevo cubo? ¿Es el doble del volumen inicial?

c) Piensa cuál fue el fallo de los atenienses y cuál debió ser la medida correcta de la arista.

Recuerda y resuelve

Cómo se halla un término desconocido en una proporción.

Dada una **proporción** (igualdad entre dos razones) en la que uno de sus términos, *x*, es desconocido:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Los productos cruzados son iguales, es decir: $a \cdot x = b \cdot c$

Por tanto: $x = \dfrac{b \cdot c}{a}$

1 Calcula el cuarto término de las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{x}$

b) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{24}$

c) $\dfrac{x}{15} = \dfrac{4}{3}$

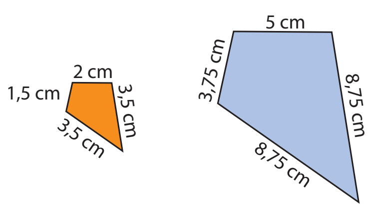
d) $\dfrac{x}{8} = 4$

e) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{150}{30}$

f) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{60}$

Qué es la razón de semejanza.

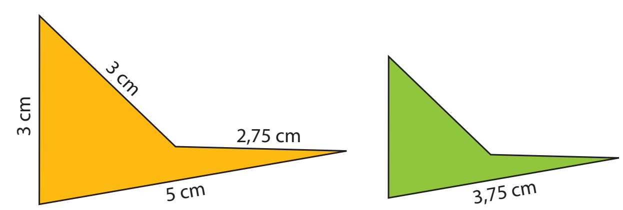
El cociente entre la medida de los lados correspondientes de dos polígonos semejantes se llama **razón de semejanza, *r*.** En estos polígonos:



$$r = \frac{2}{5} = \frac{1{,}5}{3{,}75} = \frac{3{,}5}{8{,}75} = \frac{3{,}5}{8{,}75} = 0{,}4$$

2 ¿Cuál es la razón entre los números 9 y 3? ¿Y entre 5 y 10?

3 Las siguientes figuras son semejantes. Halla la razón de semejanza entre ellas. Calcula las longitudes de los lados que faltan.



4 En un triángulo isósceles el lado desigual mide 3 cm y el perímetro, 11 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante al anterior con razón de semejanza $r = 3$.

Cómo se trabaja con las escalas.

La **escala** es una razón de semejanza expresada de la forma 1:*n*.

Una escala 1:60 000 indica que 1 cm en el papel equivale a 60 000 cm = = 600 m en la realidad.

5 La distancia entre dos puntos de un plano es de 1,5 cm. La escala del plano es 1:10 000. Calcula la distancia en la realidad. Expresa la distancia en metros.

6 Dibuja el plano de la cocina de tu casa a escala 1:50.

7 Dibuja el plano de una pared del aula. Elige la escala.

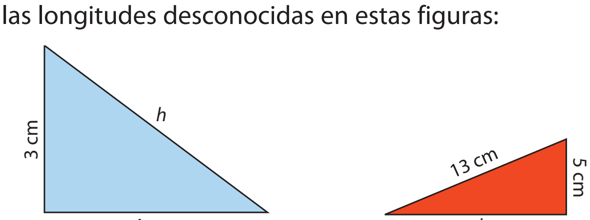
Cómo se aplica el teorema de Pitágoras.

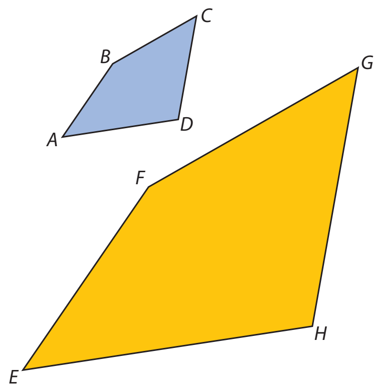
Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

8 Calcula las longitudes desconocidas en estas figuras:





1 Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

Piensa y deduce

Observa los polígonos del margen y contesta:

a) Mide los lados. ¿Hay relación entre las medidas de los dos polígonos?

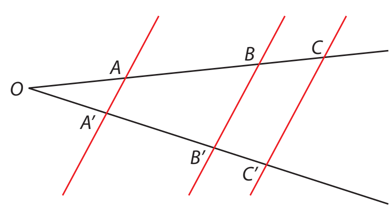
b) Ahora mide los ángulos, ¿cómo son los ángulos en los dos polígonos?

Dos **polígonos son semejantes** si cumplen las siguientes condiciones:

- Sus lados homólogos son proporcionales.
- Sus ángulos homólogos son iguales.

La razón entre sus lados se llama **razón de semejanza.**

1.1. Teorema de Tales

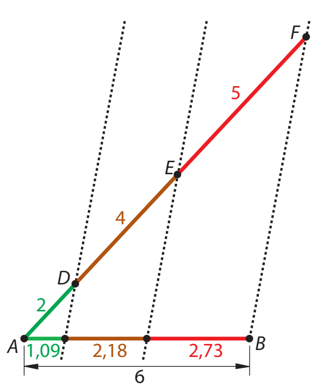


El **teorema de Tales** dice que si dos rectas concurrentes son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que se forman son proporcionales:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Además, se verifican también las siguientes igualdades:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$



EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Divide un segmento de 6 cm en tres partes proporcionales a 2 cm, 4 cm y 5 cm, respectivamente.**

En primer lugar, dibujamos un segmento *AB* de 6 cm de longitud. A continuación, trazamos una semirrecta con origen en *A* y dibujamos tres segmentos con las medidas indicadas.

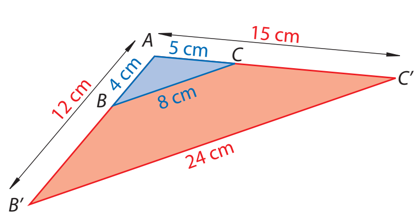
Trazamos el segmento que une el extremo del último segmento, *F*, con *B*. Las paralelas trazadas nos permiten aplicar el teorema de Tales.

Los segmentos coloreados del mismo color son proporcionales.

1.2. Triángulos en posición de Tales

En la figura de arriba en el margen podemos identificar varios triángulos *OAA'*, *OBB'* y *OCC'*. El teorema de Tales nos dice que sus lados son proporcionales. Por tanto, esos triángulos son semejantes.

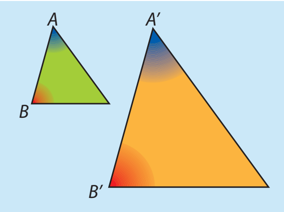
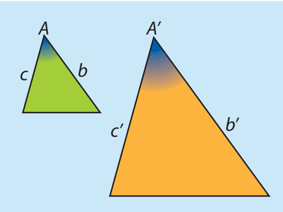
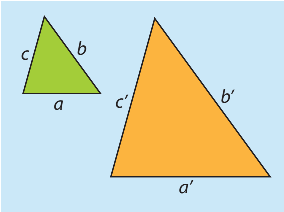
Dos triángulos con un ángulo común y cuyos lados opuestos a dicho ángulo son paralelos están en **posición de Tales.** Dos triángulos en posición de Tales son **semejantes.**



Mide, en la figura del margen, las longitudes de los lados y comprueba, realizando los cocientes entre las longitudes de los lados homólogos, que son triángulos semejantes con razón de semejanza $r = 3$.

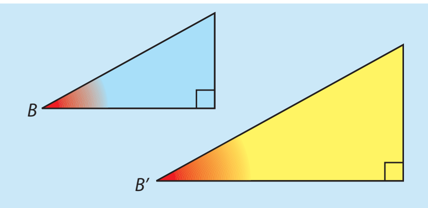
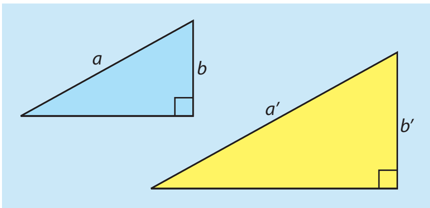
1.3. Criterios de semejanza de triángulos

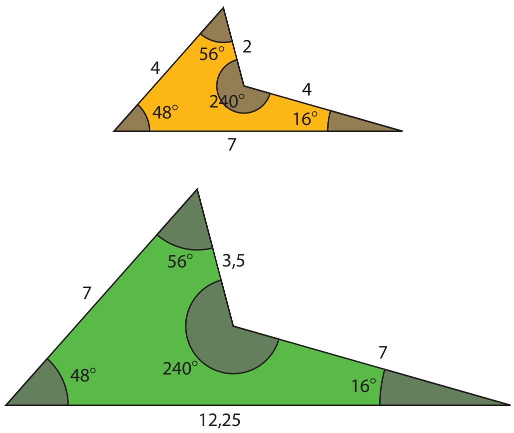
Como vimos en cursos anteriores, todos los polígonos se pueden triangular. Si conocemos los criterios de semejanza de los triángulos, podremos estudiar la **semejanza de cualquier polígono.**

Primer criterio	Segundo criterio	Tercer criterio
		
Tienen dos ángulos homólogos iguales.	Tienen un ángulo igual y los lados que comprenden ese ángulo son proporcionales.	Tienen sus tres lados proporcionales.

Criterios de semejanza de triángulos rectángulos

En particular, para los **triángulos rectángulos** en los que conocemos uno de los ángulos, los criterios de semejanza son:

Primer criterio	Segundo criterio
	
Tienen un ángulo agudo igual.	Tienen dos lados proporcionales.



Por ejemplo, los polígonos del margen son semejantes. Para calcular la razón de semejanza hacemos lo siguiente: comprobamos que los ángulos son iguales y que las razones entre lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{12{,}25}{7} = \frac{7}{4} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75 = r$$

Actividades

1 ● Divide un segmento de 5 cm de longitud en segmentos proporcionales a 2 cm y 6 cm. Mide los segmentos que has obtenido y comprueba que lo son.

2 ● La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de sus catetos, 9,6 cm. La hipotenusa de otro triángulo rectángulo mide 4 cm. Si se hacen coincidir los dos ángulos rectos de los triángulos, las hipotenusas son paralelas. Determina la medida de los tres lados de cada triángulo.

3 ● Las longitudes de los lados de un cuadrilátero, C, son $a = 5{,}2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4{,}8$ cm y $d = 2{,}5$ cm. Si C es semejante a C' y el homólogo de a es $a' = 13$ cm, Calcula la medida de los lados de C' y las razones de semejanza que transforman C en C' y C' en C.

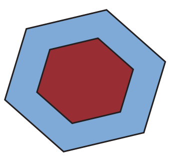
4 ● Estas son las medidas de los lados o de dos ángulos de dos triángulos, T y T'. Comprueba si son semejantes y, en ese caso, da la razón de semejanza.

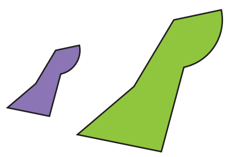
a) T: 3 cm, 4 cm y 5 cm y T': 9 cm, 12 cm y 15 cm

b) T: 3 cm, 5 cm y 6 cm y T': 1,5 cm, 2,5 cm y 4 cm

c) T: 30°, 80° y T': 70°, 30° ***d)*** T: 90°, 20° y T': 70°, 30°

5 ● Comprueba si los siguientes polígonos son semejantes y, en tal caso, determina la razón de semejanza:

a) 

b) 

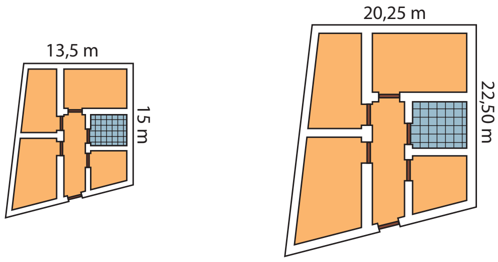
2 Escalas

Ten en cuenta

En las escalas, las **unidades de medida** que aparecen en el dibujo y las de la realidad tienen que ser las mismas.

Piensa y deduce

Los siguientes dibujos representan la distribución de las habitaciones de dos pisos diseñada por un arquitecto. Las medidas marcadas son las reales.



a) Observa las medidas y deduce si estamos hablando del mismo piso.

b) Sin embargo, las viviendas tienen la misma forma. ¿Cómo son estas viviendas? ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellas?

c) En realidad, cada una de las figuras es semejante a la correspondiente vivienda. ¿Cómo se llama la razón entre las medidas del dibujo y las reales?

Cualquier representación de la realidad en la que se conservan las proporciones es una representación a escala. Las escalas se usan en planos y mapas y también para hacer maquetas de coches, aviones, trenes, edificios…

La **escala** es el cociente entre una unidad de longitud en la reproducción y la longitud que le corresponde en la realidad. Representa la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad.

La razón de semejanza en una **escala** se expresa siempre como **1:*n*,** que indica que a 1 unidad en el dibujo le corresponden n unidades en la realidad.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Se va a urbanizar una zona, con forma rectangular. Tenemos un plano de la zona a escala 1:20 000. Si las dimensiones en nuestro plano son de 5 cm de ancho y 7 cm de largo. ¿Cuáles son las dimensiones reales?**

ancho $= 5 \cdot 20\,000 = 100\,000$ cm $= 1$ km de ancho

largo $= 7 \cdot 20\,000 = 140\,000$ cm $= 1{,}4$ km de largo

Actividades

6 ● Interpreta las siguientes escalas:

a) 1:1 000

b) 1:3 000 000

7 ●● Indica en cada caso cuál es la escala:

a) 1 m real por 1 mm en el plano.

b) 5 km reales por 1 cm en el plano.

c) 1 hm real por 2 dm en el plano.

8 ● Dos pueblos que en realidad distan 120 km, ¿a qué distancia estarán en un mapa a escala 1:5 000 000?

9 ● Un mapa está a escala de 1:100 000. Calcula la distancia real entre dos pueblos que en el mapa distan:

a) 3 cm
b) 17 cm
c) 12 mm
d) 2 dm

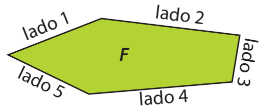
10 ●● Ana ha hecho una fotocopia de unos apuntes a una escala 1:1,5. La fotocopia tiene 21 cm de ancho. ¿Cuál es el ancho del original? ¿Cuál es el porcentaje de reducción?

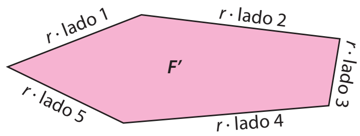
11 ●● Un alumno tiene que hacer una copia de un objeto de 0,75 m de ancho en un rectángulo de 20 cm de ancho de su hoja de papel. ¿Qué escala tiene que aplicar?

3 Relación entre los perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes

3.1. Relación entre perímetros de figuras semejantes

Si *F* y *F'* son figuras semejantes con razón de semejanza *r*, la **razón entre sus perímetros** es ***r***.





La longitud de cada lado de *F'* se obtiene multiplicando por *r* la del correspondiente lado de *F*:

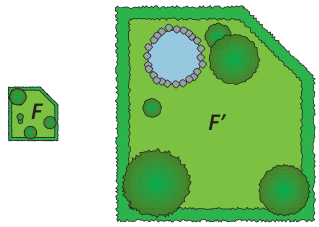
Perímetro de *F'* $= P_{F'} = r \cdot \text{lado } 1 + r \cdot \text{lado } 2 + \ldots + r \cdot \text{lado } n =$
$= \boldsymbol{r \cdot (\textbf{lado } 1 + \textbf{lado } 2 + \ldots + \textbf{lado } n) = r \cdot P_{F'}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Dos jardines tienen razón de semejanza $r = 4$. Si el perímetro del mayor es 24 m, ¿cuál es el perímetro del menor?**

$P_{F'} = r \cdot P_F$

$24 = 4 \cdot P_F \Rightarrow P_F = 24/4 = 6$ m

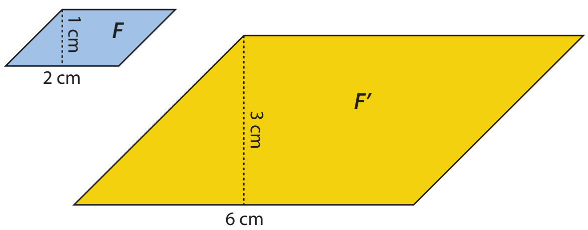


3.2. Relación entre áreas de figuras semejantes

Piensa y deduce

En las fórmulas conocidas para hallar áreas de polígonos, siempre aparecen los productos de dos dimensiones: base y altura, perímetro y apotema, etcétera.

Estas figuras, en las que se dan la base y la altura, tienen razón de semejanza $r = 3$; es decir, la base de la grande es tres veces mayor que la base de la pequeña y lo mismo ocurre con la altura.



Calcula el área de *F'* utilizando las dimensiones de *F* y la razón de semejanza. ¿Qué relación hay entre las áreas de las dos figuras?

Si la razón entre las figuras fuera *k*, ¿cuál sería la razón entre las áreas?

Si *F* y *F'* son figuras semejantes con razón de semejanza *r*, la **razón entre sus áreas** es $\boldsymbol{r^2}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Las habitaciones de Luis y María son semejantes con razón de semejanza 3/4. Luis tiene la habitación más grande; su superficie es de 16 m². ¿Qué superficie tiene la habitación de María?**

Área de la habitación de María $= r^2 \cdot$ área de la habitación de Luis.

Área de la habitación de María $= (3/4)^2 \cdot 16 = 9$ m^2

Actividades

12 • Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 4. Si el perímetro de la figura menor es 12 cm y el área 20 cm^2, calcula el perímetro y el área de la figura mayor.

13 • Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 0,8. Si el perímetro y el área de la menor son 11 cm y 32 cm^2, respectivamente, calcula el perímetro y el área de la mayor.

3.3. Relación entre volúmenes de cuerpos semejantes

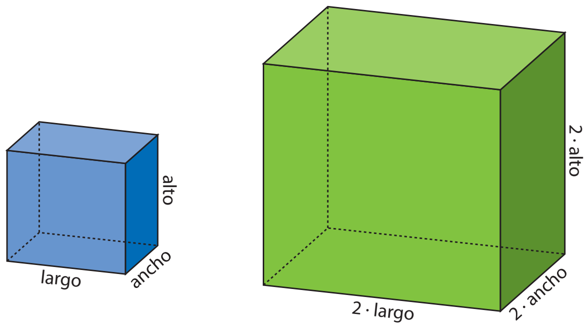
Piensa y deduce

Recuerda la fórmula del volumen de un ortoedro.

$$V_{\text{ORTOEDRO}} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$$

a) ¿Cuántas dimensiones hay que usar para el cálculo del volumen de un cuerpo?

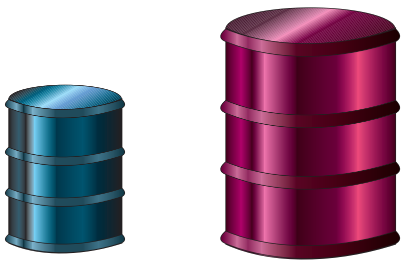
b) ¿Cuál es la razón entre los lados de estos dos ortoedros?



c) En el caso del volumen, aparecen los productos de tres dimensiones del cuerpo. ¿Cuál es la razón entre sus volúmenes?

La razón aparecerá multiplicando tres veces, luego será r^3.

Si *F* y *F'* son cuerpos semejantes con razón de semejanza *r*, la **razón entre sus volúmenes** es r^3**.**



EJERCICIOS RESUELTOS

5 **En un bidón caben 100 L. ¿Cuántos litros caben en un bidón semejante, con razón de semejanza $r = 1{,}5$? (Recuerda: 100 L = 100 dm^3)**

$V_{\text{grande}} = r^3 \cdot V_{\text{pequeño}}$

$V_{\text{grande}} = (1{,}5)^3 \cdot 100 = 3{,}375 \cdot 100 = 337{,}5 \text{ dm}^3$

En el bidón grande caben 337,5 L

Actividades

14 ● La razón de semejanza entre dos figuras es 6. Si el perímetro de la figura mayor es 15 cm, ¿cuál es el perímetro de la menor?

15 ● Las áreas de dos polígonos semejantes son 36 cm^2 y 100 cm^2. Determina la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor.

16 ● Los perímetros de dos polígonos semejantes son 33 cm y 11 cm. Calcula:

a) La razón de semejanza y la razón entre las áreas de las dos figuras.

b) La longitud del lado del polígono menor homólogo a un lado del mayor de 12 cm de medida.

c) El área del polígono de mayor tamaño, sabiendo que el área del polígono homólogo de menor tamaño es 25 cm^2.

17 ● La razón de semejanza entre dos figuras es 0,5 y el área de la mayor es 28 cm^2. Calcula el área de la menor.

18 ● Si el lado de un polígono regular se hace cuatro veces mayor, ¿cuántas veces mayor se hará su área? Calcula a continuación su perímetro.

19 ● Dos cuerpos semejantes con razón de semejanza 0,25. Determina el volumen del cuerpo menor si el del mayor es 200 cm^3.

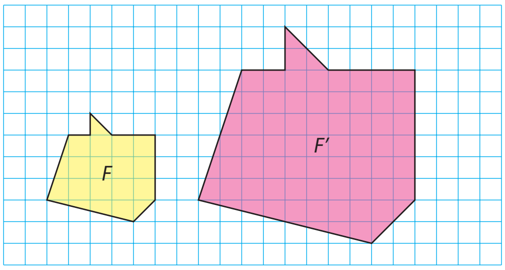
20 ● El volumen de un cuerpo es 15,8 cm^3. Calcula el volumen de otro cuerpo semejante y mayor que él, si la razón de semejanza es 3.

21 ● Halla las razones entre los volúmenes de dos esferas de radios *r* y *r'* y de dos cubos de aristas *a* y *a'*.

Ejercicios y problemas

Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

1 • Dados los polígonos *F* y *F'*:



a) Averigua si son semejantes y, en caso de serlo, indica la razón de semejanza.

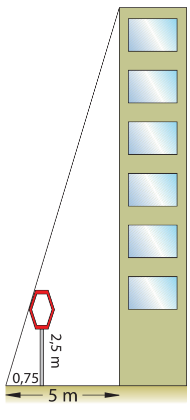
b) Dibuja *F* y otro semejante a él, con razón de semejanza 3, en una hoja de papel cuadriculado. Toma como unidad el lado del cuadrado de la cuadrícula.

2 • Los lados de un rectángulo miden 6 cm y 3 cm. Dibuja otros semejantes al dado con estas razones de semejanza:

a) $\frac{1}{3}$ ***b)*** 2 ***c)*** 1,5 ***d)*** $\frac{5}{3}$

3 • Dibuja un rectángulo de 3 cm de largo y 5 cm de ancho y otro que mida 1 cm más de largo y 1 cm más de ancho. ¿Son semejantes?

4 • Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 5 m al mismo tiempo que una señal de tráfico de 2,5 m proyecta una sombra de 0,75 m.



5 • Determina si los triángulos *T* y *T'* son semejantes o no en los siguientes casos:

a) Dos ángulos de *T* miden 68° y 54°. Dos ángulos de *T'* miden 54° y 58°.

b) Dos lados de *T* miden 3 cm y 2 cm, y el ángulo comprendido 40°. Dos lados de *T'* miden 3,75 cm y 2,5 cm, y el ángulo comprendido 40°.

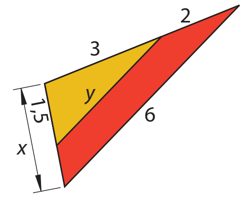
c) Dos ángulos de *T* miden 42° y 105°. Dos ángulos de *T'* miden 42° y 36°.

d) Los lados de *T* miden 4 cm, 5 cm y 3 cm. Los lados de *T'* miden 6 cm, 7 cm y 5 cm.

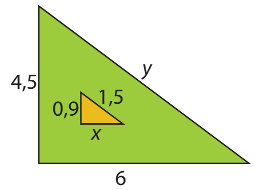
6 • Los lados de un triángulo miden 4 cm, 5 cm y 2 cm. Dibuja otro semejante, de manera que el lado homólogo del que mide 2 cm mida 4,8 cm.

7 •• ¿Por qué los triángulos son semejantes? Halla *x* e *y*, sabiendo que las medidas están dadas en centímetros:

a)



b)



8 • ¿Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes?

9 •• Adapta los tres criterios de semejanza de triángulos en el caso en que los dos sean:

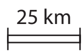
a) Triángulos rectángulos. ***b)*** Triángulos isósceles.

Escalas

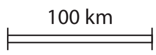
10 • Interpreta las siguientes escalas. Expresa luego gráficamente las que están dadas de forma numérica y viceversa.

a) 1:1 500 000 ***c)*** 1:200 000

b)



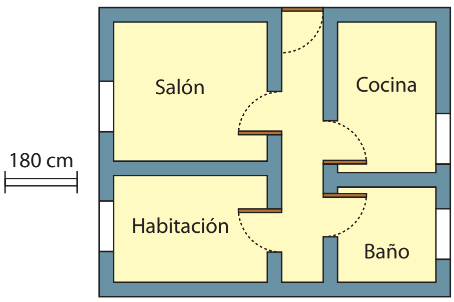
d)



11 • La distancia entre dos ciudades es de 354 km. ¿Qué distancia había en un mapa a escala 1:1 500 000?

12 •• Dos localidades que distan 50,4 km están representadas en un mapa a una distancia de 2,8 cm. ¿Con qué escala está hecho el mapa? Represéntala gráficamente.

13 ••• Según el siguiente plano de un apartamento:



a) Calcula las dimensiones del apartamento y de cada una de las estancias que lo componen.

b) En la pared de la ventana de la cocina se quiere poner muebles de 90 cm y 60 cm de ancho. ¿Cuántos muebles de 60 cm caben? ¿Cuánto espacio sobra?

14 •• La representación de una finca en un plano a escala 1:20 000 tiene un perímetro de 4,5 cm y un área de 1,3 cm^2. Calcula el perímetro y el área de la finca.