P A R A   E M P E Z A R

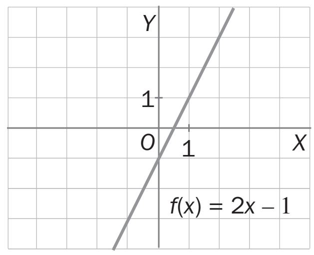
1 **Copia y completa la tabla, y representa la gráfica de la función. ¿Se trata de una función continua?**

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**x**
N.º de puntos							

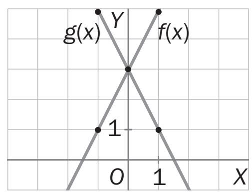
$f(x)$ hace corresponder a cada x natural el número $2x - 1$.

Figura n.º:	1	2	3	4	5	…	x
N.º de puntos:	1	3	5	7	9	…	$2x - 1$

La gráfica consta de los puntos de la recta $y = 2x - 1$ correspondientes a x natural.
La función no es continua, pues su gráfica presenta saltos.



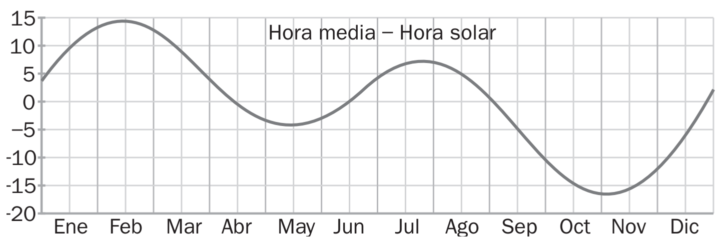
2 **Representa gráficamente las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = -2x + 3$. ¿De qué depende que una función lineal sea creciente o decreciente? ¿Tienen estas funciones alguna simetría?**



x	−1	0	1	…
$f(x)$	1	3	5	…
$g(x)$	5	3	1	…

$f(x)$ es creciente y su pendiente es 2, $g(x)$ es decreciente y su pendiente es -2.
Que una función lineal sea creciente o decreciente depende de su pendiente: si es positiva, es creciente y si es negativa, es decreciente.
Las funciones son simétricas una de la otra respecto del eje de ordenadas.

3 **Observa la gráfica de la ecuación del tiempo de un lugar y localiza, aproximadamente, los máximos y mínimos.**



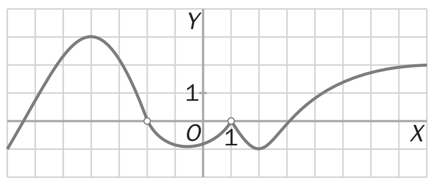
Máximo absoluto: (15 de febrero, 15)
Máximos relativo: (31 de julio, 7) y (31 de diciembre, 2,5)
Mínimo absoluto: (31 de octubre, -16)
Mínimo relativo: (15 de mayo, -4)

Concepto de función

P A R A   P R A C T I C A R

E j e r c i c i o   r e s u e l t o

10.1 **Indica el dominio y el recorrido de la función dada por la siguiente gráfica.**



El dominio es: $D(f) = \mathbf{R} - \{-2, 1\}$
El recorrido es: $R(f) = [-1, 3]$

10.2 **Escribe en cada caso la fórmula de la función que hace corresponder a cada número real:**

a) Su triple.

b) La quinta parte de su cuadrado.

a) $f(x) = 3x$

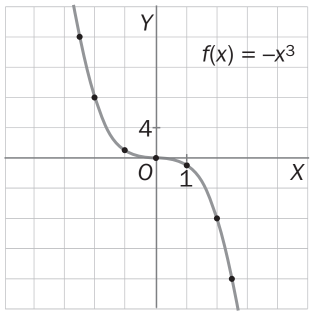
b) $f(x) = \dfrac{x^2}{5}$

10.3 Halla la fórmula y dibuja la gráfica correspondiente a la función definida por la siguiente tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	8	1	0	-1	-8	-27	...

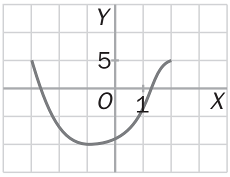
La fórmula de la función es $f(x) = -x^3$.

La gráfica es

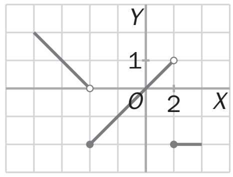


10.4 Indica el dominio y el recorrido de las funciones dadas por las siguientes gráficas.

a)



b)



a) $D(f) = [-3, 2]$ $R(f) = [-10, 5]$

b) $D(f) = [-8, 4]$ $R(f) = [-2, 2]$

E j e r c i c i o r e s u e l t o

10.5 Halla el dominio y el recorrido de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

La función no está definida cuando el denominador es 0: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Por tanto, el dominio está formado por todos los números distintos de 1: $D(f) = \mathbf{R} - \{1\}$

Para hallar el recorrido, podemos despejar x en función de y.

$$y = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow yx - y = 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{y}$$

Como el valor de x está definido solo si $y \neq 0$, el recorrido son todos los números distintos de cero: $R(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

10.6 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x + 3)^2}$

a) La función no está definida cuando $x^2 = 0$. El dominio son todos los números distintos de 0: $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

$y = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{y}}$. El recorrido son todos los números mayores que 0: $R(f) = (0, +\infty)$.

b) La función no está definida cuando $(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$. El dominio son todos los números distintos de -3: $D(f) = \mathbf{R} - \{-3\}$

$y = \dfrac{1}{(x + 3)^2} \Rightarrow (x + 3)^2 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x + 3 = \dfrac{1}{\pm\sqrt{y}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{y}} - 3$.

El recorrido son todos los números mayores que 0: $R(f) = (0, +\infty)$.

E j e r c i c i o r e s u e l t o

10.7 Halla el dominio de la siguiente función. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

La raíz cuadrada de un número está definida solo cuando el radicando es positivo o cero. Veamos qué valores de x hacen cierta esa condición. $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Por tanto, el dominio de la función es: $D(f) = [-2, +\infty)$.

10.8 Halla el dominio de las siguientes funciones.

$f(x) = \sqrt{2x - 3}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

El radicando debe ser positivo o cero:

$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Por tanto, el dominio de $f(x)$ es: $D(f) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

$x^2 + 5$ es siempre mayor que 0. Por tanto, el dominio de $g(x)$ es: $D(g) = \mathbf{R}$.

10.9 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$ $\qquad$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x + 1}}$ $\qquad$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$ $\qquad$ d) $f(x) = \frac{x - 2}{(2x + 8)^2}$ $\qquad$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

a) El dominio es el conjunto **R** de los números reales: $D(f) = \mathbf{R}$.

b) La función está definida siempre, porque el denominador no se anula nunca. El dominio son todos los números reales: $D(f) = \mathbf{R}$.

c) La función está definida si el radicando es mayor o igual a cero.

Como $x + 1$ está en el denominador, debe ser $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$. El dominio es $D(f) = (-1, +\infty)$.

d) La función no está definida si $(2x + 8)^2 \Rightarrow 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$. El dominio es: $D(f) = \mathbf{R} - \{-4\}$.

e) La función no está definida si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. El dominio es: $D(f) = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$.

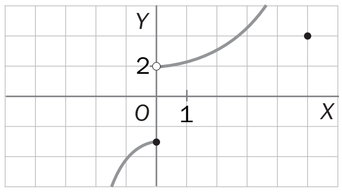
f) La función está definida si $x^2 - 4 \geq 0$; o sea, si $x \leq -2$ ó $x \geq 2$. El dominio es: $D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

10.10 Dibuja la gráfica de una función *f* cuyo dominio y recorrido sean los siguientes.

$D(f) = (-2, 5]$

$R(f) = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

La gráfica podría ser la siguiente:



P A R A   A P L I C A R

10.11 La distancia de frenado, *d*, de un coche en metros se puede expresar en términos de la velocidad en kilómetros por hora, *v*, mediante la función: $d = \frac{v^2}{150} + \frac{v}{5}$.

Si un automóvil ha necesitado 72 metros para frenar, ¿a qué velocidad circulaba?

Se resuelve la ecuación:

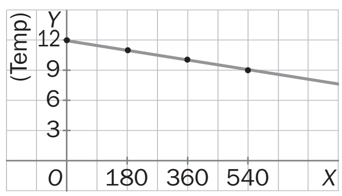
$\frac{v^2}{150} + \frac{v}{5} = 72$ $\qquad$ m.c.m. $(150, 5) = 150$; $\quad v^2 + 30v = 10\,800$; $\qquad v^2 + 30v - 10\,800 = 0$

$$v = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot 10\,800}}{2} = \frac{-30 \pm \sqrt{44\,100}}{2} = \frac{-30 \pm 210}{2} \Rightarrow \begin{cases} v = 90 \\ v = -120 \end{cases}$$

La única solución es la positiva. El coche circulaba a 90 kilómetros por hora.

10.12 En una estación meteorológica se ha comprobado que cada 180 metros de altura, la temperatura disminuye 1 grado centígrado. Si la temperatura en el suelo es de 12 grados, haz una tabla de valores, dibuja la gráfica y encuentra la fórmula de la función que expresa la temperatura en términos de la altura.

Altura (m)	0	180	360	540	…
Temperatura (ºC)	12	11	10	9	…



Es una recta de ordenada en el origen $n = 12$ y pendiente $m = -\frac{1}{180}$, luego su fórmula es:

$f(x) = 12 - \frac{1}{180}x$

10.13 El área de una parcela rectangular es de 1500 metros cuadrados.

Halla la fórmula de la función que permite calcular el ancho de la parcela conociendo el largo, e indica su dominio y el recorrido.

Si el ancho es a y el largo es x: $1500 = ax \Rightarrow a = \dfrac{1500}{x}$.

La función que permite calcular el ancho conociendo el largo es $f(x) = \dfrac{1500}{x}$

x debe ser positivo, luego el dominio es: $D(f) = (0, +\infty)$. El recorrido es: $R(f) = (0, +\infty)$.

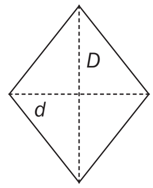
10.14 Una empresa construye ladrillos en forma de rombos de 1600 centímetros cuadrados de área.

a) Escribe la fórmula de la función que expresa una diagonal en términos de la otra.

b) Halla el dominio de esa función,

c) ¿Cuál será el dominio de la función si cada diagonal tiene que medir más de 20 centímetros?

a) El área de un rombo es: $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$, luego $\dfrac{D \cdot d}{2} = 1600$. La fórmula que expresa una diagonal en términos de otra es: $D = \dfrac{3200}{d}$



b) d debe ser positiva. El dominio son todos los números reales positivos: $D(f) = (0, +\infty)$

c) Por un lado, d debe ser mayor que 20; pero también $D > 20$, luego $\dfrac{3200}{d} > 20 \Rightarrow 20d < 3200 \Rightarrow d < 160$. Por tanto, el dominio de definición es el intervalo $D(f) = (20, 160)$.

Variación de una función. Crecimiento y decrecimiento

PARA PRACTICAR

10.15 Calcula la variación y la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 + x - 3$ en los siguientes intervalos.

a) [0, 1] b) [2, 6] c) [−4, 4] d) [−3, −1]

a) $V[0, 1] = f(1) - f(0) = (2 + 1 - 3) - (-3) = 3 \Rightarrow TVM[0, 1] = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{3}{1} = 3$

b) $V[2, 6] = f(6) - f(2) = (2 \cdot 6^2 + 6 - 3) - (2 \cdot 2^2 + 2 - 3) = 75 - 7 = 68 \Rightarrow TVM[2, 6] = \dfrac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \dfrac{68}{4} = 17$

c) $V[-4, 4] = f(4) - f(-4) = (2 \cdot 4^2 + 4 - 3) - (2 \cdot (-4)^2 + (-4) - 3) = 33 - 25 = 8 \Rightarrow TVM[-4, 4] = \dfrac{f(4) - f(-4)}{4 - (-4)} = \dfrac{8}{8} = 1$

d) $V[-3, -1] = f(-1) - f(-3) = (2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3) - (2 \cdot (-3)^2 + (-3) - 3) = -2 - 12 = -14$

$TVM[-3, -1] = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \dfrac{-14}{2} = -7$

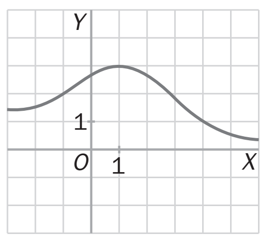
10.16 La variación de la función f en el intervalo $[-3, b]$ es igual a 7.

Halla b y $f(b)$ sabiendo que $f(-3) = -1$ y que la tasa de variación media en ese intervalo es 2.

$V[-3, b] = f(b) - f(-3) = f(b) + 1$, luego $f(b) + 1 = 7 \Rightarrow f(b) = 6$

$TVM[-3, b] = \dfrac{f(b) - f(-3)}{b - (-3)} = \dfrac{7}{b + 3}$, luego $\dfrac{7}{b + 3} = 2 \Rightarrow 7 = 2b + 6 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

10.17 Halla la variación en los intervalos [−1, 1] y [1, 4] de la función dada por la siguiente gráfica, y averigua si es creciente o decreciente en ellos.



Intervalo $[-1, 1]$: $V[-1, 1] = f(1) - f(-1) = 3 - 2 = 1$. La variación es positiva.

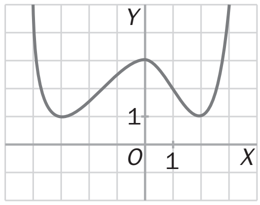
Como también es positiva si tomamos otros dos puntos cualesquiera de ese intervalo, la función es creciente en ese intervalo.

Intervalo $[1, 4]$: $V[1, 4] = f(4) - f(1) = 1 - 3 = -2$. La variación es negativa.

Como también es negativa si tomamos otros dos puntos cualesquiera del intervalo, la función es decreciente en ese intervalo.

E j e r c i c i o   r e s u e l t o

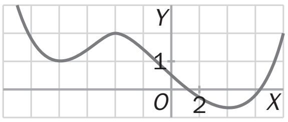
10.18 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función.



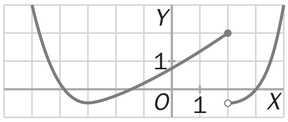
La función es creciente en los intervalos $(-3, 0)$ y $(2, 3)$ y decreciente en los intervalos $(-4, \ -3)$ y $(0, 2)$.

10.19 Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a)



b)



a) La función es creciente en $(-8, -4) \cup (4, 8)$ y decreciente en $(-11, -8) \cup (-4, 4)$.

b) La función es creciente en $(-3, 2) \cup (2, 4)$ y decreciente en $(-5, -3)$.

10.20 Averigua si la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es creciente o decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Si x, $x + h$, con $h > 0$, pertenecen al intervalo $(1, +\infty)$, entonces la variación de la función es:

$f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - 2(x + h) - 3 - (x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h - 3 - x^2 + 2x + 3 = 2xh + h^2 - 2h$

Como $x > 1 \Rightarrow 2xh > 2h \Rightarrow f(x + h) - f(x) > 2h + h^2 - 2h = h^2$

Como $f(x + h) - f(x) > h^2 > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(1, +\infty)$.

P A R A   A P L I C A R

P r o b l e m a   r e s u e l t o

10.21 Iván circula en bicicleta por carretera. Sale a las 9 de la mañana del kilómetro 315 y llega a las 11 de la mañana al kilómetro 339. Halla la variación y la tasa de variación media en ese intervalo de la función que relaciona la distancia al punto de partida con el tiempo empleado. Interpreta los resultados.

Sea f la función que expresa la distancia recorrida en kilómetros, y, en términos del tiempo empleado en horas, x.

El intervalo es $[9, 11]$.

$V[9, 11] = f(11) - f(9) = 339 - 315 = 24$ km

$$TVM[9, 11] = \frac{f(11) - f(9)}{11 - 9} = \frac{24}{4} = 12 \text{ km/h}$$

La variación de la función es la distancia recorrida, y la tasa de variación media es la velocidad media.

10.22 El espacio y que recorre un móvil en un tiempo x viene dado por la función $y = 2x + 7$. Demuestra que la velocidad media es constante.

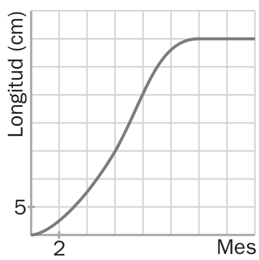
La velocidad media es la tasa de variación media. Como la función es $f(x) = 2x + 7$, la tasa de variación media en un intervalo cualquiera $[a, b]$ es:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2b + 7 - (2a + 7)}{b - a} = \frac{2b - 2a}{b - a} = 2$$

La velocidad media es constante e igual a 2.

10.23 La gráfica representa la longitud en centímetros de una planta a lo largo de los meses de un año.

Calcula la variación de la función en cada uno de los cuatro trimestres. ¿En cuál de ellos el crecimiento ha sido mayor?



Si la función es $f(x)$:

Primer trimestre: $V[0, 3] = f(3) - f(0) = 5 - 0 = 5$

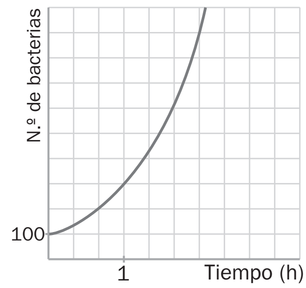
Segundo trimestre: $V[3, 6] = f(6) - f(3) = 15 - 5 = 10$

Tercer trimestre: $V[6, 9] = f(9) - f(6) = 30 - 15 = 15$

Cuarto trimestre: $V[9, 12] = f(12) - f(9) = 35 - 30 = 5$

El crecimiento ha sido mayor en el tercer trimestre.

10.24 **El número de bacterias de un cultivo aumenta con el tiempo según muestra la gráfica. Halla la tasa de variación media en la primera hora y en la segunda, e interpreta los resultados.**



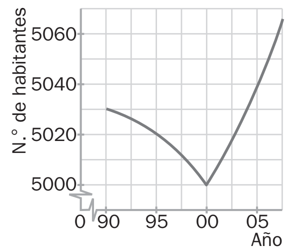
La función pasa por los puntos: (0, 100); (1, 300); (2, 900)

En la primera hora: $TVM = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{300 - 100}{1 - 0} = 200$

En la segunda hora: $TVM = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{900 - 300}{2 - 1} = 600$

En la segunda hora el número de bacterias aumenta mucho más que en la primera, exactamente el triple.

10.25 **En la gráfica se ha representado la evolución del número de habitantes de una población entre los años 1990 y 2005. ¿En qué quinquenio ha crecido o decrecido más la función?**



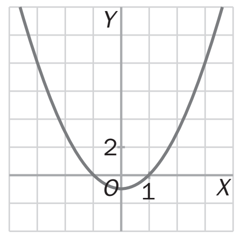
$V[1990, 1995] = f(1995) - f(1990) = 5020 - 5030 = -10$
$V[1995, 2000] = f(2000) - f(1995) = 5000 - 5020 = -20$
$V[2000, 2005] = f(2005) - f(2000) = 5040 - 5000 = 40$

La función es decreciente en los quinquenios [1990, 1995] y [1995, 2000], y es creciente en el quinquenio [2000, 2005]. En el primero ha decrecido 10, en el segundo ha decrecido 20 y en el tercero ha crecido 40. Por tanto, el crecimiento mayor se ha producido en el tercer quinquenio, y el decrecimiento mayor en el segundo quinquenio.

10.26 **Considera la función dada por esta gráfica.**

a) Elabora una tabla de valores y escribe la fórmula de la función.

b) Halla la variación en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, y averigua si es creciente o decreciente en ellos.



a)

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x)$	…	8	3	0	-1	0	3	8	…

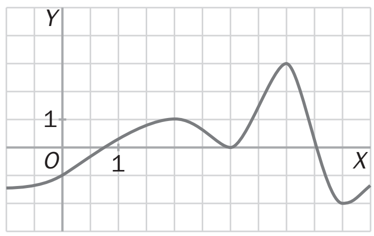
Expresión algebraica de la función: $f(x) = x^2 - 1$.

b) Si $x < x + h$ son dos puntos cualesquiera del intervalo $(-\infty, 0)$:
$V[x, x + h] = f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - 1 - (x^2 - 1) = x^2 + 2xh + h^2 - 1 - x^2 + 1 = 2xh + h^2 < 0$, pues $x < 0$, $h > 0$.
La función es creciente en $(-\infty, 0)$.
Si $x < x + h$ son dos puntos cualesquiera del intervalo $(0, +\infty)$:
$V[x, x + h] = f(x + h) - f(x) = 2xh + h^2 > 0$, pues $x > 0$, $h > 0$. La función es creciente en $(0, +\infty)$.

Máximos y mínimos

Ejercicio resuelto

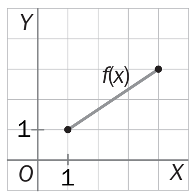
10.27 **Estudia los máximos y mínimos de la siguiente función.**



La función tiene el máximo absoluto en $x = 4$, un máximo relativo en $x = 2$, el mínimo absoluto en $x = 5$ y un mínimo relativo en $x = 3$.
Máximo absoluto: (4, 3). Máximo relativo: (2, 1).
Mínimo absoluto: (5, -2).
Mínimo relativo: (3, 0)

PARA PRACTICAR

10.28 **Una función es creciente en todo el dominio. ¿Puede tener máximos y mínimos?**



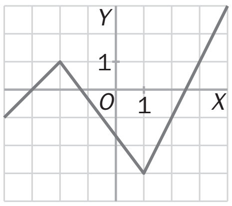
Si una función es creciente en todo su dominio no puede tener máximos o mínimos relativos, ya que en ningún punto a la función será mayor o igual o menor o igual que en cualquier otro punto del entorno de a.

Sí podría tener un máximo o un mínimo absoluto.

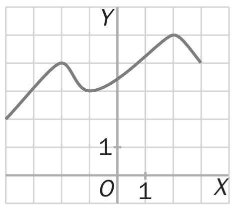
Por ejemplo, la función f, de dominio $D(f) = [1, 4]$, cuya gráfica está representada al lado, tiene un máximo absoluto en el extremo 4 del dominio, pues $f(4) = 3$ es mayor o igual que $f(x)$ en cualquier otro punto del dominio, y tiene un mínimo absoluto en el origen 1 del dominio, pues $f(1) = 1$ es menor o igual que $f(x)$ en cualquier otro punto del dominio.

10.29 Estudia los máximos y mínimos de las funciones dadas por las siguientes gráficas.

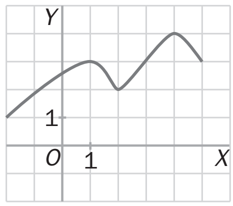
a)



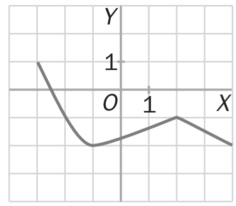
b)



c)



d)



a) Máximo relativo en $(-2, 1)$. Máximo absoluto $(4, 3)$. Mínimo absoluto en $(1, -3)$.

b) Máximo absoluto en $(2, 5)$. Máximo relativo en $(-2, 4)$. Mínimo relativo en $(-1, 3)$. Mínimo absoluto en $(-4, 2)$.

c) Máximo absoluto en $(4, 4)$. Máximo relativo en $(1, 3)$. Mínimo relativo en $(2, 2)$. Mínimo absoluto en $(-2, 1)$.

d) Máximo relativo en $(2, -1)$. Mínimo absoluto en $(-1, -2)$. Mºaximo absoluto en $(-3, 1)$.

10.30 Localiza los máximos y mínimos en las funciones dadas por las siguientes tablas.

a)

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	2	1	0	3	4	8	7	6	2

b)

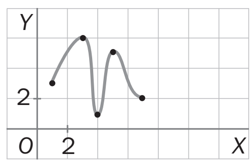
x	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10
y	−36	−16	−4	0	−4	−16	−36	−64	−100

a) Hay un punto: $x = 0$, en el cual la función toma un valor menor: $y = 0$, que en los restantes puntos. Por tanto, tiene un mínimo absoluto en el punto $(0, 0)$. Hay un punto: $x = 3$, en el cual la función toma un valor mayor: $y = 8$, que en los restantes puntos. Por tanto, tiene un máximo absoluto en el punto $(3, 8)$.

b) Hay un punto: $x = 10$, en el cual la función toma un valor menor: $y = -100$, que en los restantes puntos. Por tanto, tiene un mínimo absoluto en el punto $(10, -100)$. Hay un punto: $x = 0$, en el cual la función toma un valor mayor: $y = 0$, que en los restantes puntos. Por tanto, tiene un máximo absoluto en el punto $(0, 0)$.

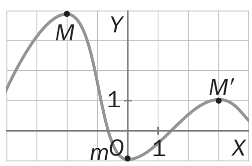
10.31 Dibuja la gráfica de una función que tenga el máximo absoluto en $x = 3$, un máximo relativo en $x = 5$, el mínimo absoluto en $x = 4$ y un mínimo relativo en $x = 7$.

La gráfica podría ser la siguiente:



10.32 Dibuja la gráfica de una función que sea creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, 3)$, decreciente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(3, +\infty)$, y tenga el máximo absoluto en el punto $M(-2, 4)$, un máximo relativo en el punto $M'(3, 1)$ y el mínimo absoluto en el punto $m(0, -1)$.

La gráfica podría ser la siguiente:

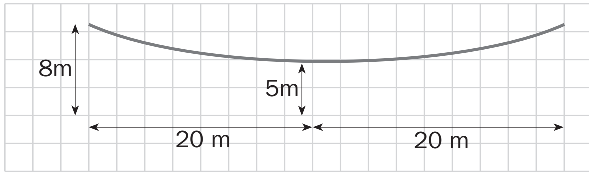


10.33 Sea f una función creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$. ¿Es posible que no tenga un máximo en el punto $x = 1$?

Sí es posible. Puede ser porque no esté definida en $x = 1$.

También puede ser si está definida en $x = 1$, pero $f(1)$ es menor que otros valores de la función. Por ejemplo; en la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

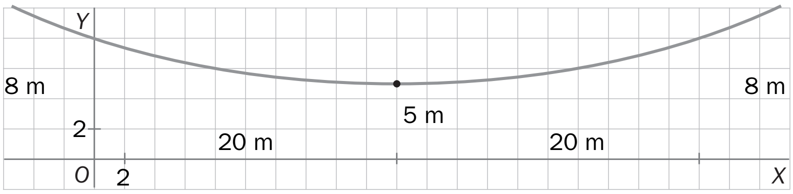
10.34 Copia la gráfica de la figura y sitúa los ejes de manera que la función tenga un mínimo en el punto (20, 5).



a) Estudia su dominio y su recorrido.

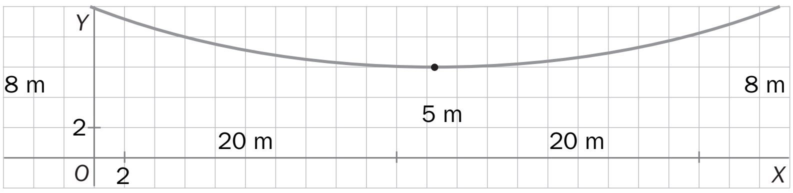
b) Estudia el crecimiento de la función.

c) Repite el ejercicio pero situando los ejes de coordenadas de modo que el mínimo esté situado en el punto (22,5; 5).



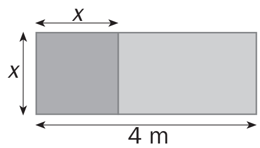
a) $D(f) = [0, 40]$ $\quad$ $R(f) = [5, 8]$

b) La función crece en (20, 40) y decrece en (0, 20).



PARA APLICAR

10.35 Del rectángulo de la figura se suprime el cuadrado de lado x.



a) ¿Cuál es el área del rectángulo que queda?

b) Haz una tabla que recoja los valores del área a medida que varía x.

c) Averigua para qué valor de x el área es máxima.

a) El área es: $A = 4x - x^2$

b) Hacemos la tabla, teniendo en cuenta que debe ser $0 < x < 4$:

x	0,5	1	1,5	2	3	3,7	…
$A = 4x - x^2$	1,75	3	3,75	4	3	1,11	…

c) Para $x = 2$ el área es máxima: 4 m^2.

10.36 Julia va a colocar 36 bombones en cajas de modo que todas ellas tengan el mismo número de bombones.

a) Escribe la fórmula de la función que expresa la suma del número de cajas y el número de bombones de cada una.

b) Haz una tabla que recoja el valor de dicha suma para distintos valores de los sumandos.

c) ¿Cuándo es mínima dicha suma?

a) Sea x = número de cajas, y = número de bombones por cajas. Entonces: $xy = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{x}$.

La función es: $f(x) = x + \frac{36}{x}$.

b)

x	1	2	3	4	6	9	12	18	36	…
$\frac{36}{x}$	36	18	12	9	6	4	3	2	1	…
$f(x)$	37	20	15	13	12	13	15	20	37	…

c) La suma es mínima, 12, cuando $x = 6$, $\frac{36}{x} = 6$; esto es, cuando se preparan 6 cajas con 6 bombones cada una.

10.37 **Al lanzar una pelota verticalmente hacia arriba, la altura alcanzada en metros, *h*, depende del tiempo en segundos, *t*, según la expresión: $h(t) = 40t - 5t^2$**

a) Construye una tabla para hallar la altura de la pelota de segundo en segundo y representa la gráfica correspondiente.

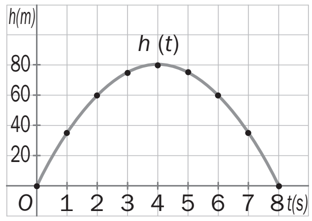
b) Estudia el crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

d) ¿Refleja la gráfica la forma de la trayectoria?

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	35	60	75	80	75	60	35	0



b) Es creciente en el intervalo (0, 4) y decreciente en el intervalo (4, 8).

c) Hay un máximo (absoluto y relativo) en el punto (4, 80): la altura máxima alcanzada es 80 m.

d) La gráfica no refleja la forma de la trayectoria: la piedra se lanza verticalmente y cae verticalmente. La trayectoria es un segmento vertical.

Idea de límite

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

10.38 **Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ cuando x tiende a −2.**

Damos a x valores próximos a −2 por la izquierda y por la derecha.

$x \to -2^-$	−2,1	−2,01	−2,001	…
$f(x)$	−4,1	−4,01	−4,001	…

$x \to -2^+$	−1,9	−1,99	−1,999	…
$f(x)$	−3,9	−3,99	−3,999	…

Observamos que en ambos casos los valores $f(x)$ se aproximan a −4.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -4$ Por tanto: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

10.39 **Calcula el límite de las siguientes funciones.**

a) $\lim\limits_{x \to -2} 4x^2 + 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x + 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x + 6}{x^2 - 9}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} 2^x$

a)

$x \to -2^+$	−1,9	−1,99	−1,999	…
$f(x)$	16,44	17,8404	17,984 004	…

$x \to -2^-$	−2,1	−2,01	−2,001	…
$f(x)$	19,64	18,1604	18,016 004	…

Luego: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 18$. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} 4x^2 + 2 = 18$.

b)

$x \to 0^-$	−0,1	−0,01	−0,001	…
$f(x)$	$-\dfrac{0,2}{0,9} = -0,222\ldots$	$\dfrac{-0,02}{0,99} = -0,020\ldots$	$\dfrac{-0,002}{0,999} = -0,002\ldots$	…

$x \to 0^+$	0,1	0,01	0,001	…
$f(x)$	$\dfrac{0,2}{1,1} = 0,181\ldots$	$\dfrac{0,02}{1,01} = 0,019\ldots$	$\dfrac{0,002}{1,001} = -0,0019\ldots$	…

Luego: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x + 1} = 0$

c)

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001	…
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	…

$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999	…
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	…

Luego: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$. Por tanto: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{3} \to \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x + 2} = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x + 6}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2}{x - 3} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} 2^x = 2^0 = 1$

10.40 Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Está definida en $x = 0$?

b) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

a) La función no está definida en $x = 0$.

b)

$x \to 1^-$	−0,1	−0,01	−0,001	…
$f(x)$	0,2	0,02	0,002	…

$x \to 1^+$	0,1	0,01	0,001	…
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	…

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, luego $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, aunque no esté definida $f(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio resuelto

10.41 Comprueba que cuando x tiende a 0 por la izquierda, los valores de la función $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ se hacen cada vez más grandes. Exprésalo mediante un límite. ¿A partir de qué valor de x se cumple $f(x) > 10^6$?

Damos valores:

x	−0,01	−0,001	−0,0001	−0,00 001	−0,000 001
$f(x)$	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

Si $x < -0{,}000001$, entonces $f(x) > 10^6$

10.42 Contesta a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué significa que una función tienda a $-\infty$?

b) Calcula $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right)$

c) Calcula $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2 + 2}$

a) Que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ significa que al aproximarse x a a por su derecha, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más pequeños, llegando a ser menores que cualquier número.

b)

$x \to 0^+$	0,1	0,01	0,001	…
$f(x)$	−10	−100	−1000	…

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

c)

$x \to 0^-$	−0,1	−0,01	−0,001
$f(x)$	0,4975	0,4999	0,499999

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2 + 2} = 0{,}5$

10.43 María quiere construir una valla de madera alrededor de su jardín, que tiene forma de cuadrado.

a) Representa la longitud total de la valla en función del lado del jardín.

b) Si la medida del lado se aproxima a 7 metros, ¿a qué valor se aproxima la longitud? Exprésalo utilizando límites.

a) Si x es el lado, la longitud total de la valla es $4x$.

b)

$x \to 7^-$	6,9	6,99	6,999	…
$4x$	27,6	27,96	27,996	…

$x \to 7^+$	7,1	7,01	7,001	…
$4x$	28,4	28,04	28,004	…

$\lim\limits_{x\to 7^-} 4x = \lim\limits_{x\to 7^+} 4x = 28$, luego $\lim\limits_{x\to 7} 4x = 28$. La longitud se aproxima a 28 m.

10.44 La ley de oferta de una marca de relojes se rige por la función $n = -6000 + p^2$, siendo n el número de relojes que estarían dispuestos a ofertar los fabricantes a un precio de p euros.

Si el precio se aproxima a 100 euros, ¿a qué cantidad se aproxima el número de relojes ofertados?

$p \to 100^-$	99,9	99,99	99,999	…
n	3980,01	3998,0001	3999,800 001	…

$p \to 100^+$	100,1	100,01	100,001	…
n	4020,01	4002,0001	4000,200 001	…

$\lim\limits_{n\to 100^-} (-6000 + p^2) = \lim\limits_{n\to 100^+} (-6000 + p^2) = 4000$, luego $\lim\limits_{n\to 100} (-6000 + p^2) = 4000$

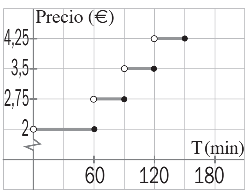
El número de relojes ofertados se aproximaría a 4000.

10.45 En un aparcamiento cobran 2 euros por la primera hora de estacionamiento y 75 céntimos por cada media hora o fracción posterior.

a) Representa en una gráfica el precio en función del tiempo de estacionamiento en minutos.

b) Calcula los límites laterales de la función cuando el tiempo de estacionamiento tiende a 60, 90 y 120 minutos, respectivamente.

a)



b) $\lim\limits_{x\to 60^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 60^+} f(x) = 2,75$

$\lim\limits_{x\to 90^-} f(x) = 2,75$; $\lim\limits_{x\to 90^+} f(x) = 3,50$

$\lim\limits_{n\to 120^-} f(x) = 3,50$; $\lim\limits_{n\to 120^+} f(x) = 4,25$

10.46 La función $f(x) = \dfrac{1}{a + bx}$, donde a y b son números reales, toma los valores $f(0) = 4$ y $f(1) = 5$.

a) Calcula $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ y $f(4)$. b) Calcula $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$. c) Dibuja la gráfica entre $x = 0$ y $x = 5$.

a) $f(0) = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \dfrac{1}{a} = 4 \to a = \dfrac{1}{4}$ $\qquad f(1) = \dfrac{1}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{a+b} = 5 \Rightarrow 5(a+b) = 1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{20}$

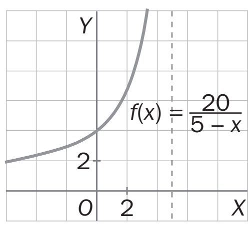
Por tanto, la función es $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{20}x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{20}{5 - x}$ $\qquad f(0) = 4$, $f(1) = 5$, $f(3) = 10$, $f(4) = 20$

b)

$x \to 5^-$	4,9	4,99	4,999	…
$f(x)$	200	2000	20 000	…

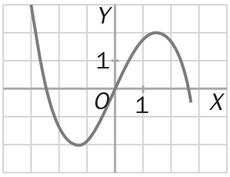
Por tanto: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$

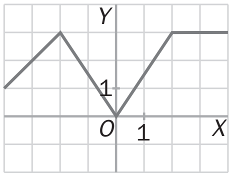
c)

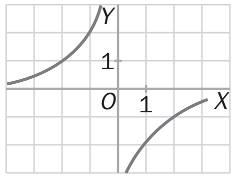


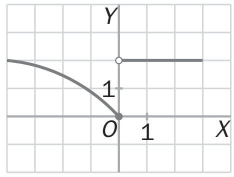
PARA PRACTICAR

10.47 ¿Cuáles de estas funciones no son continuas?

a) 

b) 

c) 

d) 

a) La función es continua en todo el dominio.

b) La función es continua en todo su dominio.

c) La función no es continua en $x = 0$.

d) La función no es continua en el punto $x = 0$.

Ejercicio resuelto

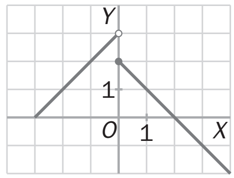
10.48 Estudia la continuidad de la siguiente función a partir de su representación gráfica $\begin{cases} x + 3 & \text{si } -3 < x < 0 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Si $x < 0$, la gráfica es la recta r: $y = x + 3$ de pendiente 1 y ordenada en el origen 3.

Señalamos con un círculo abierto el punto (0, 3), pues $x = 0$ pertenece a la otra región del dominio.

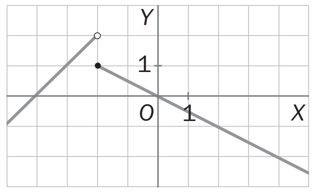
Si $x \geq 0$, la gráfica es la recta s: $y = 2 - x$ de pendiente -1 y ordenada en el origen 2. Señalamos con un círculo sólido el punto (0, 2).

La gráfica presenta un salto en $x = 0$; esta es la única discontinuidad. La función es continua en el resto del domino, es decir, en $[-3, 0)$ y $[0, -\infty)$.



10.49 Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad en $x = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$



En $x = -2$ la gráfica presenta un salto (de longitud 1), luego la función es discontinua en $x = -2$.

Ejercicio resuelto

10.50 Estudia si la función $f(x) = 3x^2 + 1$ es continua en el punto $x = 2$ empleando límites.

Calculamos los límites laterales dando valores próximos a 2 por la izquierda y por la derecha.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 13 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 13$$

Calculamos el valor de la función en $x = 2$. $\quad f(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$

Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 13 = f(2)$, la función es continua en $x = 2$.

10.51 Averigua si la función $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ es continua en los siguientes puntos.

a) $x = 0$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = -1$

a) Damos valores próximos a 0 por la izquierda y por la derecha: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

$f(0) = 0$. Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, la función es continua en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

$f(1) = \dfrac{1}{2}$. Como $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(1)$, la función es continua en $x = 1$.

c) La función no está definida en $x = -1$. Como no existe $f(-1)$, la función no es continua en $x = -1$.

10.52 **Estudia, empleando límites, la continuidad de la siguiente función en el punto $x = 1$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999	…
$f(x)$	0,81	0,9801	0,998 001	…

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001	…
$f(x)$	−1,01	−0,01	−0,001	…

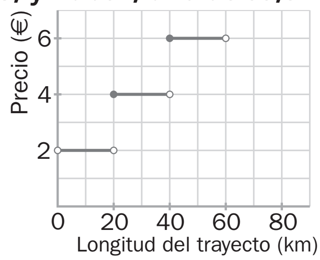
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$. Por tanto, no existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ y, en consecuencia, la función no es continua en $x = 1$.

PARA APLICAR

10.53 **El precio del viaje en un tren depende de la longitud del trayecto, como muestra la gráfica.**

a) Luis recorre un trayecto de 19,5 kilómetros; Ana, uno de 39; Emma, uno de 43, y Rubén, uno de 59,8. ¿Cuánto cuesta cada billete?

b) Estudia la continuidad de la función.



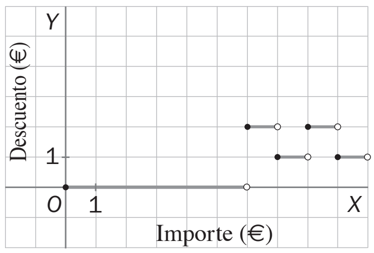
a) $f(19, 5) = 2$: el precio del billete de Luis cuesta 2 €.
$f(39) = 4$: el precio del billete de Ana cuesta 4 €.
$f(43) = 6$: el precio del billete de Emma cuesta 6 €.
$f(59, 8) = 6$: el precio del billete de Rubén cuesta 6 €.

b) La función no es continua en los puntos 20, 40, 60, 80… , pues en cada uno de ellos presenta un salto (de longitud 2).

10.54 **Un supermercado hace la siguiente oferta en las compras que sean al menos de 6 euros: si la cifra entera del importe de la compra es par, se descuentan 2 euros, y si es impar, se descuenta 1 euro.**

Representa gráficamente la función que asigna al importe de la compra el descuento establecido y averigua en qué puntos tiene discontinuidades.

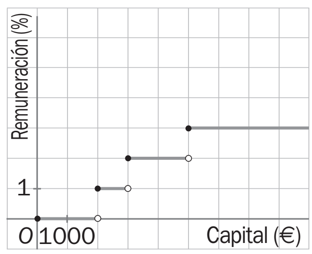
Importe (€)	Descuento (€)
3	0
5,5	0
6	2
6,9	2
7	1
7,2	1
8	2
9,5	1
…	…



La función presenta un salto en los puntos 6, 7, 8, 9… En $x = 6$, el salto es de longitud 2; en los demás, el salto es de longitud 1.
La función es discontinua en los puntos $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$…

10.55 **En una sucursal bancaria, los clientes que disponen en la cuenta desde 2000 euros hasta menos de 3000 reciben una remuneración de un 1% del capital; los que tienen desde 3000 hasta menos de 5000, un 2%, y si tienen 5000 euros o más, un 3%.**

Dibuja la gráfica de la función que indica el porcentaje de remuneración en términos del capital ingresado y estudia su continuidad.



De 2000 € hasta menos de 3000 € se recibe un 1%; o sea desde 20 € hasta menos de 30 €, proporcionalmente; de 3000 € a menos de 5000 € se recibe un 2%, o sea, de 60 € a menos de 100 €, proporcionalmente; y a partir de 5000 €, se recibe un 3%; o sea, a partir de 150 €, proporcionalmente.

La función presenta un salto en los puntos 2000, 3000 y 5000. En $x = 2000$, el salto es de longitud 20; en $x = 3000$, de longitud 30 y en $x = 5000$, de longitud 50.

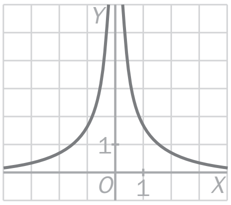
La función es discontinua en los puntos $x = 2000$, $x = 3000$ y $x = 5000$.

Simetrías y periodicidad

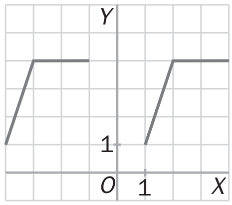
P A R A   P R A C T I C A R

10.56 Averigua cuáles de las siguientes funciones, dadas por sus gráficas, son simétricas.

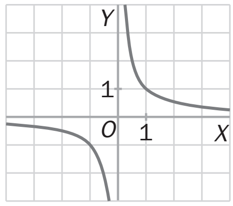
a)



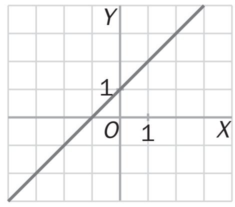
b)



c)



d)



a) Simétrica respecto eje de ordenadas. b) No simétrica. c) Simétrica respecto del origen. d) No simétrica.

E j e r c i c i o   r e s u e l t o

10.57 Estudia la simetría de las funciones siguientes.

a) $f(x) = 5x^2$ **b) $f(x) = -2x^3$** **c) $f(x) = 6x + 1$** **d) $f(x) = x^4 + 3$**

a) $f(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = f(x)$

b) $f(-x) = -2(-x)^3 = -2(-x^3) = 2x^3 = -f(x)$

c) $f(-x) = 6(-x) + 1 = -6x + 1$

d) $f(-x) = (-x)^4 + 3 = x^4 + 3 = f(x)$

Las funciones de los apartados a y d son simétricas respecto del eje de ordenadas.

La función del apartado b es simétrica respecto del origen.

En la función del apartado c, $f(-x)$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, luego no es simétrica respecto del eje de ordenadas ni respecto del origen.

10.58 Estudia si las siguientes funciones son pares o impares.

a) $f(x) = 3x^6 + 2$ **b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x}{4}$** **c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$** **d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$**

a) $f(-x) = 3 \cdot (-x)^6 + 2 = 3x^6 + 2 = f(x)$

b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3 - 5(-x)}{4} = \dfrac{-2x^3 + 5x}{4} = -\dfrac{2x^3 - 5x}{4} = -f(x)$

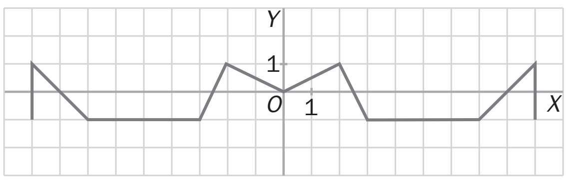
c) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + (-x) = -x^5 - x^3 - x = -f(x)$

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x)$

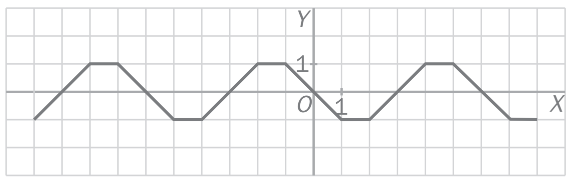
Las funciones de los apartados a y d son simétricas respecto del eje de ordenadas. Las funciones de los apartados b y c son simétricas respecto del origen de coordenadas.

10.59 Indica cuáles de las siguientes gráficas son periódicas y halla su período.

a)



b)



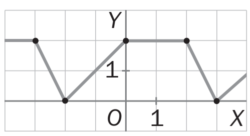
a) No es periódica.

b) Periódica con $T = 6$

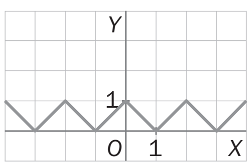
10.60 Dibuja la gráfica de una función que sea:

a) Periódica y ni par ni impar. **b) Periódica y par.** **c) Periódica e impar.**

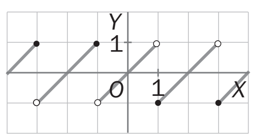
a)



b)



c)



10.61 **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2x$ y halla su función simétrica:**

a) Respecto del eje de abscisas.

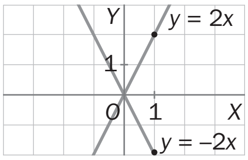
b) Respecto del eje de ordenadas.

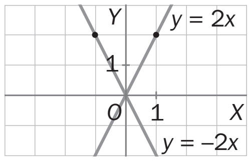
c) Respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrantes.

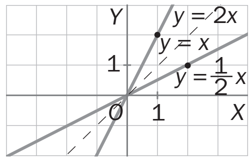
a) La función $g(x) = -2x$ es simétrica de la función $f(x)$ respecto del eje de abscisas, pues $g(x) = -f(x) = -2x$.

b) También $g(x)$ es la simétrica respecto al eje de ordenadas, pues $g(x) = -2x = f(-x)$.

c) La función simétrica de la $f(x)$ respecto de la bisectriz $y = x$ es la función $h(x) = \frac{1}{2}x$.

a)


b)


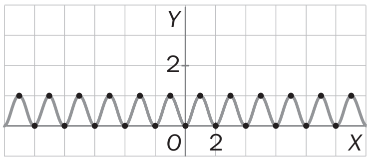
c)


10.62 **Dibuja la gráfica de una función periódica que tenga máximos en todos los puntos $P(2n + 1, 1)$ y mínimos en los puntos $Q(2n, 0)$, donde n es un número entero. ¿Cuál es su período?**

La función tiene un máximo en los puntos $(-5, 1)$, $(-3, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(5, 1)$…

Y tiene un mínimo en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$…

El período es $T = 2$.



PARA APLICAR

10.63 **Un alambre de una pieza eléctrica tiene la misma forma que la gráfica de la siguiente función.**

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ x^3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

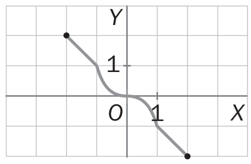
a) Representa gráficamente la función y estudia si es par o impar.

b) Halla la ecuación de la función simétrica de la anterior respecto del eje de ordenadas.

a) Es impar, pues $f(-x) = -f(x)$, ya que si $f(x) = x \Rightarrow f(-x) = -x$, y si $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = -x^3$

b) La función simétrica respecto del eje de ordenadas es:

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x \le -1 \\ -x^3, & -1 < x < 1 \\ -x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



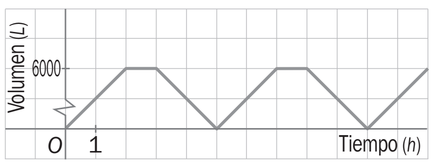
10.64 **Un estanque vacío tarda 2 horas en llenarse, aumentando la cantidad de agua de manera proporcional al tiempo, y permanece otra hora con su capacidad máxima, de 6000 litros. Después se vacía a lo largo de otras 2 horas, también de modo proporcional, y a continuación vuelve a llenarse con la misma cantidad de agua, repitiéndose sucesivamente un proceso idéntico.**

a) Representa la función que expresa los litros que hay dentro del estanque en función del tiempo en el intervalo [0, 10].

b) Estudia la periodicidad de la función.

a) Por llenarse y vaciarse de manera proporcional al tiempo, las partes de la gráfica de la función correspondientes son trozos de rectas (segmentos).

b) Se trata de una función periódica cuyo período es 5.

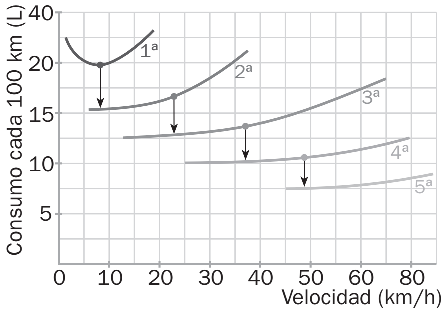


Matemáticas aplicadas

PARA APLICAR

10.65 Una de las causas del incremento de CO_2 en la atmósfera es el empleo del automóvil. Mediante una conducción eficiente se puede conseguir una disminución del consumo de gasolina y de emisiones contaminantes.

Las gráficas muestran cómo varía el consumo en función de la velocidad para cada una de las marchas de la caja de cambios.



a) ¿En qué marcha se produce un incremento más rápido del consumo?

b) ¿Qué diferencia de consumo hay si voy a 60 kilómetros por hora en tercera, en cuarta o en quinta velocidad?

c) ¿Cuáles son las marchas en las que es necesario acelerar para consumir menos?

a) En la primera.

b) En tercera el consumo medio es 12,5 L cada 100 km, en cuarta el consumo medio es 10 L cada 100 km, 2,5 L menos que en tercera y en quinta el consumo medio es 7,5 L cada 100 km, 2,5 L menos que en cuarta.

c) En cuarta y quinta el incremento del consumo es menor.

Actividades finales

PARA PRACTICAR Y APLICAR

10.66 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^2$ **b) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$**

a) La función está definida para todo x. Su dominio es el conjunto de los números reales: $D(f) = \mathbf{R}$.

$y = 3x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{y}{3}}$: el recorrido son todos los números reales mayores o iguales que 0: $R(f) = [0, +\infty)$.

b) La función está definida si $2x + 1 \neq 0$, esto es, si $x \neq -\dfrac{1}{2}$. El dominio es: $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$y = \dfrac{1}{2x + 1} \Rightarrow 2x + 1 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow 2x = \dfrac{1}{y} - 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y - 1}\right)$. El recorrido es: $R(f) = \mathbf{R} - \{0\}$.

10.67 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = +\sqrt{4x - 2}$ **b) $f(x) = +\sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$**

a) $4x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$

El dominio es: $D(f) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

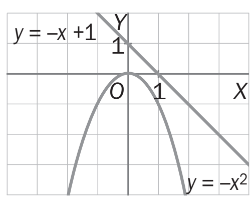
b) Como $x^2 + 1$ es siempre mayor que cero, el dominio es: $D(f) = \mathbf{R}$.

10.68 La variación de una función en un intervalo $[-a, a]$ es -3, y la tasa de variación media en ese mismo intervalo es -1. ¿Cuánto vale a?

$TVM[-a, a] = \dfrac{V[-a, a]}{a - (-a)}$, luego $-1 = \dfrac{-3}{2a} \Rightarrow -2a = -3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$

10.69 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones y estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos o mínimos.

a) $f(x) = -x + 1$ **b) $f(x) = -x^2$**



a) La función es siempre decreciente. No tiene máximos ni mínimos.

b) La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.
No tiene mínimos. Tiene un máximo (absoluto y relativo) en el punto O (0, 0).

10.70 Demuestra que la función $f(x) = x^2 + x + 1$ es continua en el punto $x = 3$.

$x \to 3^+$	3,1	3,01	3,001	…
$f(x)$	13,71	13,0701	13,007 001	…

$x \to 3^-$	2,9	2,99	2,999	…
$f(x)$	12,31	12,9301	12,993 001	…

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 13$, luego $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 13$ $\qquad f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$

Como $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 13 = f(3)$, la función es continua en $x = 3$.

10.71 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+9}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x-2}$

a)

$x \to 3^-$	2,9	2,99	2,999	…
$f(x)$	$\dfrac{11,9}{2,9} = 4,103$	$\dfrac{11,99}{2,99} = 4,010$	$\dfrac{11,999}{2,999} = 4,001$	…

$x \to 3^+$	3,1	3,01	3,001	…
$f(x)$	$\dfrac{12,1}{3,1} = 3,903$	$\dfrac{12,01}{3,01} = 3,990$	$\dfrac{12,001}{3,001} = 3,999$	…

Los límites laterales cuando x tiende a 3 coinciden y valen 4, luego $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+9}{x} = 4$.

b)

$x \to 2^-$	1,9	1,99	1,999	…
$f(x)$	−38	−398	−3998	…

luego $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$x \to 2^+$	2,1	2,01	2,001	…
$f(x)$	42	402	4002	…

luego $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

No existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x-2}$.

10.72 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^2+7}$

a) $f(-x) = \dfrac{1}{-x+4}$: la función no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, luego no es simétrica respecto de OY ni respecto de O.

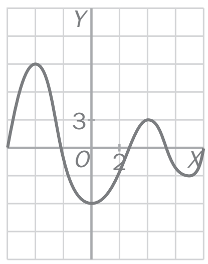
b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^4}{(-x)^2+7} = \dfrac{2x^4}{x^2+7} = f(x) \Rightarrow$ La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

10.73 ¿Por qué una función no puede ser simétrica respecto del eje OX?

Una función no puede ser simétrica respecto del eje OX porque eso significaría que a cada x no le correspondería un único $f(x)$, sino dos valores: $f(x)$ y $-f(x)$.

10.74 Sea la función dada por la siguiente gráfica.

a) Halla su dominio y recorrido.
b) Indica los intervalos de crecimiento.
c) Halla sus máximos y mínimos.
d) Averigua si es simétrica o periódica.



a) Dominio: $D(f) = [-6, 8]$. Recorrido: $R(f) = [-6, 9]$

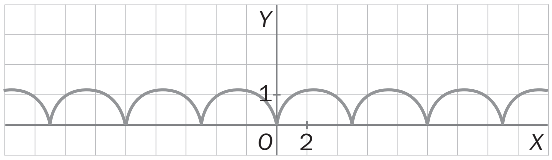
b) Intervalos de crecimiento: $(-6, -4)$, $(0, 4)$ y $(7, 8)$
Intervalos de decrecimiento: $(-4, 0)$ y $(4, 7)$

c) Máximos: los puntos $(-4, 9)$ (absoluto y relativo) y $(4, 3)$ (relativo)
Mínimos: $(0, -6)$ (absoluto y relativo) y $(7, -3)$ (relativo)

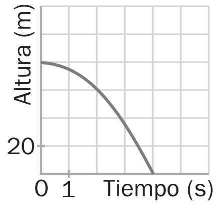
d) No es simétrica ni periódica.

10.75 Dibuja la gráfica de una función periódica de período 5.

La gráfica podría ser la siguiente:



10.76 La gráfica muestra la altura, en metros, a la que se encuentra un objeto en caída libre en función del tiempo, en segundos.



a) ¿Desde qué altura se dejó caer?

b) ¿Cuánto tardó el cuerpo en llegar al suelo?

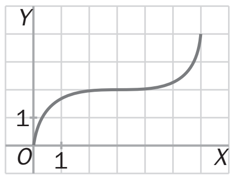
c) Estudia las características de la función: dominio, recorrido, crecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetría y periodicidad.

a) $x = 0 \Rightarrow y = 80$: el cuerpo se dejó caer desde 80 m de altura.

b) $y = 0 \Rightarrow x = 4$: el cuerpo tardó 4 segundos en llegar al suelo.

c) El dominio es el intervalo [0, 4], y el recorrido el intervalo [0, 80].
La función es decreciente en todo su dominio.
La función tiene un máximo absoluto en el punto (0, 80) y un mínimo absoluto en el punto (4, 0).
La función es continua en todo su dominio, no es simétrica y no es periódica.

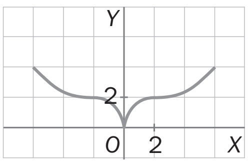
10.77 Copia la gráfica y complétala para que la función:

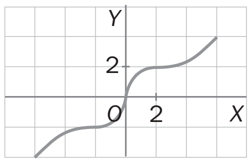


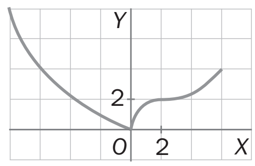
a) Sea par.

b) Sea impar.

c) No sea ni par ni impar.

a) 

b) 

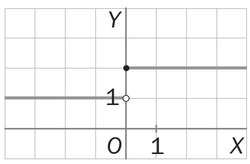
c) 

10.78 Halla el período de la función $y = \text{sen } x$.

Cada 2π radianes, el seno de un ángulo vuelve a ser el mismo: $\text{sen }(x + 2\pi) = \text{sen } x$. La función $y = \text{sen } x$ es periódica, y su período es $T = 2\pi$.

10.79 Dibuja la gráfica y encuentra la expresión de una función cuyo recorrido esté formado por los puntos 1 y 2 y que sea discontinua en $x = 0$.

Una función que lo verifica es, por ejemplo, la que tiene la siguiente gráfica:



Su expresión algebraica es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

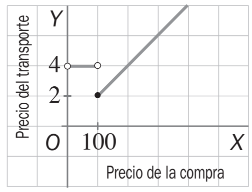
10.80 En un hipermercado cobran por el transporte a domicilio una cantidad fija de 4 euros si la compra es inferior a 100 euros, y un 2% del importe de la compra si esta es al menos de 100 euros.

a) Haz una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función que expresa el precio del transporte en términos del importe de la compra.

b) Halla la expresión algebraica de esa función y estudia su continuidad en el punto $x = 100$.

a)

x	30	90	100	200	300	…
$f(x)$	4	4	2	4	6	…



b) Si $x \geq 100$ su ecuación será: $y = mx + n$.

Por pasar por (100, 2) y (200, 4): $\begin{cases} 2 = 100m + n \\ 4 = 200m + n \end{cases} \rightarrow 2 = 100m,\ m = \dfrac{1}{50}$

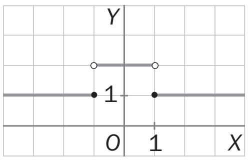
La expresión algebraica de la función es: $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leqslant x < 100 \\ \dfrac{x}{50} & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$

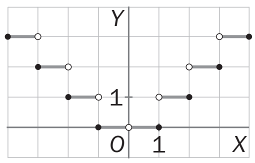
La función no es continua en $x = 100$, pues su gráfica da un salto de valor -2.

10.81 Dibuja en cada caso la gráfica de una función:

a) Que no tenga límite en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, pero sí en los demás puntos.

b) Que no tenga límite en los puntos de abscisa entera, pero sí en los demás.





a) La función de la gráfica tiene límite en todos sus puntos, salvo en $x = -1$ y $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

b) La función tiene límite en $x = a$ si a no es entero.

10.82 ¿Qué condiciones deben cumplir m y n para que una recta cualquiera de ecuación $f(x) = mx + n$ sea simétrica respecto del origen de coordenadas? ¿Y para que sea periódica?

Para que sea simétrica respecto del origen, deben ser $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = m(-x) + n = -mx + n$; luego $-mx + n = -\ (mx + n)$. Por tanto: $-mx + n = -mx - n \Rightarrow n = -n \Rightarrow n = 0$.

Es decir, debe cumplirse que $n = 0$.

Por tanto, son simétricas respecto del origen las rectas cuya ecuación es de la forma $f(x) = mx$; o sea, todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Sólo es periódica (de período cualquier número) si la recta es horizontal; o sea, si $m = 0$, es decir, todas las rectas de la forma $f(x) = n$.

PARA REFORZAR

10.83 Considera la función $y = f(x)$ dada por la tabla siguiente.

x	−2	−1	3	4	…
$f(x)$	−4	−1	−9	−16	…

a) Halla su expresión algebraica.

b) Calcula $f(6)$ y $f(-6)$.

c) Halla x si $f(x) = -25$.

d) ¿Hay algún valor de x tal que $f(x) = 1$?

a) A cada número le hace corresponder el opuesto de su cuadrado. La expresión algebraica es: $f(x) = -x^2$.

b) $f(6) = -6^2 = -36$, $f(-6) = -(-6)^2 = -36$

c) $-25 = -x^2 \Rightarrow x = \pm 5$

d) $-x^2 = 1$: no existe ningún número real que lo verifique. Por tanto, no hay algún x tal que $f(x) = 1$.

10.84 **Calcula la variación y la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ en los siguientes intervalos.**

a) $[-2, 0]$ **b) $[0, 3]$** **c) $[-2, 3]$**

a) f: $V[-2, 0] = f(0) - f(-2) = 0 - (-2)^2 = -4$, $TVM[-2, 0] = \dfrac{-4}{0 - (-2)} = -2$

g: $V[-2, 0] = g(0) - g(-2) = 0 + (-2)^2 = 4$, $TVM[-2, 0] = \dfrac{4}{2} = 2$

b) f: $V[0, 3] = f(3) - f(0) = 3^2 - 0 = 9$, $TVM[0, 3] = \dfrac{9}{3 - 0} = 3$

g: $V[0, 3] = g(3) - g(0) = -3^2 + 0 = -9$, $TVM[0, 3] = \dfrac{-9}{3 - 0} = -3$

c) f: $V[-2, 3] = f(3) - f(-2) = 9 - 4 = 5$, $TVM[-2, 3] = \dfrac{5}{3 + 2} = 1$

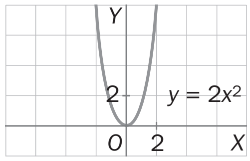
g: $V[-2, 3] = g(3) - g(-2) = -9 + 4 = -5$, $TVM[-2, 3] = \dfrac{-5}{3 + 2} = -1$

10.85 **Representa gráficamente las siguientes funciones y determina los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos.**

a) $f(x) = 2x^2$ **b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$** **c) $f(x) = x^3$** **d) $f(x) = \dfrac{-2}{x}$**

a)

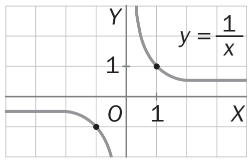
x	…	-2	-1	0	1	2	…
$f(x)$	…	8	2	0	2	8	…



f es decreciente en $(-\infty, 0]$, creciente en $[0, +\infty)$.
Tiene un mínimo (absoluto y relativo) en $O(0, 0)$ y no tiene máximos.

b)

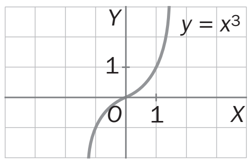
x	…	$-\frac{1}{2}$	-1	1	2	…
$f(x)$	…	-2	-1	1	$\frac{1}{2}$	…



f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$. No tiene máximos ni mínimos.

c)

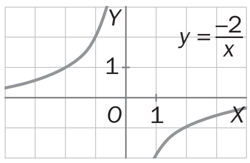
x	…	-2	-1	0	1	2	…
$f(x)$	…	8	-1	0	1	8	…



f es creciente en todo su dominio **R**, y no tiene máximos ni mínimos.

d)

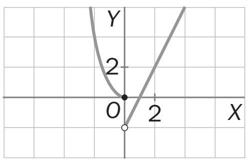
x	…	-2	-1	1	2	…
$f(x)$	…	1	2	-2	-1	…



f es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$. No tiene máximos ni mínimos.

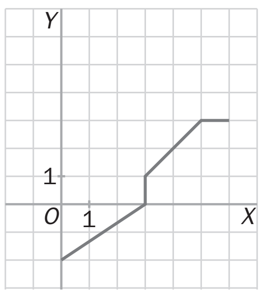
10.86 **Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$



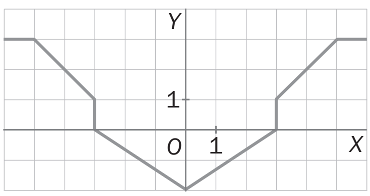
Es continua en todo **R** salvo en $x = 0$, en que hay salto.

10.87 **Completa la gráfica para que sea simétrica:**

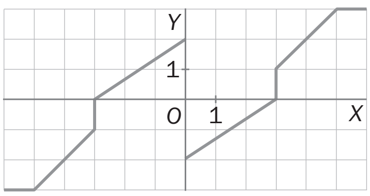


a) Respecto del eje de ordenadas. **b) Respecto del origen de coordenadas.**

a)



b)



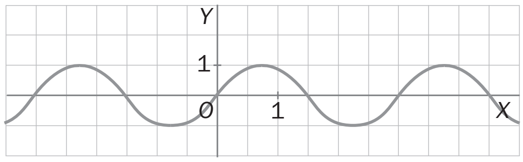
10.88 Si f es una función periódica de período T que verifica $f(1) = 6$, calcula:

a) $f(1 + T)$ **b) $f(1 - T)$** **c) $f(1 + 4T)$**

a) $f(1 + T) = 6$ b) $f(1 - T) = 6$ c) $f(1 + 4T) = 6$

10.89 Dibuja la gráfica de una función impar y periódica de período 3.

La gráfica podría ser esta:



PARA AMPLIAR

10.90 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^4}$ **b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$**

a) La función está definida para todo x salvo para $x = -1$. Su dominio son todos los números reales distintos de $x = -1$: $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$.

$y = \dfrac{1}{(x + 1)^4} \Rightarrow (x + 1)^4 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x + 1 = \dfrac{1}{\pm\sqrt[4]{y}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\pm\sqrt[4]{y}} - 1.$

El recorrido son todos los números reales mayores que

0: $R(f) = (0, +\infty)$.

b) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. El dominio son todos los números reales distintos de 1 y -1: $D(f) = \mathbf{R} - \{1, -1\}$.

$y = \dfrac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{y} + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{y} + 1} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + y}{y}}$. Para que sea $\dfrac{1 + y}{y}$ mayor o igual que cero debe ser $(1 + y)\, y \geq 0$ (salvo $y = 0$, que está en el denominador); luego $y \leqslant -1$ ó $y > 0$: $R(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

10.91 Escribe la expresión algebraica de la función que expresa el perímetro de todas las parcelas rectangulares de 100 metros cuadrados de superficie en términos de uno de sus lados.

¿En qué valor tiene la función un mínimo?

Si los lados son x e y, el área es: $100 = xy \Rightarrow y = \dfrac{100}{x}$.

La función que expresa el perímetro es: $P = 2x + 2y$; o sea, $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$.

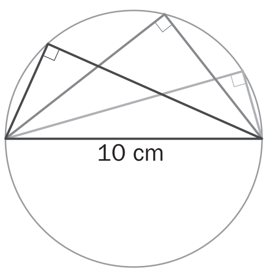
Veamos dónde tiene un mínimo:

x	1	2	5	9	10	11	20	40	100	…
$P(x)$	202	104	50	40,22…	40	40,18…	45	85	202	…

La función tiene un mínimo cuando x es 10 m. Por tanto, también $y = \dfrac{100}{10} = 10$ m. La función tiene un mínimo en el punto (10, 10).

10.92 Considera todos los triángulos rectángulos inscritos en una circunferencia de 10 centímetros de diámetro. Al variar la longitud de los catetos, se obtienen diferentes áreas para el triángulo.

¿Cuánto deben medir los catetos para que el área del triángulo sea máxima?



La hipotenusa de todos los triángulos rectángulos inscritos en la circunferencia es el diámetro: o sea, 10 cm.

El área de cada triángulo será: $A = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = 5h$, siendo h la altura sobre la hipotenusa.

El área será máxima, pues, cuando la altura h sea máxima. Pero h es la mitad de una cuerda, y la mitad de una cuerda es máxima cuando coincide con el radio. Por tanto, el área máxima se tiene cuando h es el radio; esto es, cuando el triángulo rectángulo es isósceles. Los dos catetos entonces deben ser iguales:

$b^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow b = 5\sqrt{2}$ cm, $c = 5\sqrt{2}$ cm.

10.93 Halla los límites laterales, cuando *x* tiende a 1, de las siguientes funciones. ¿Existe el límite cuando *x* tiende a 1?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

a)

$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999	…
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	…

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001	…
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	…

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$. Por lo tanto, existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

b)

$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999	…
$f(x)$	0,526…	0,502…	0,500…	…

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001	…
$f(x)$	0,476	0,497…	0,499…	…

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0{,}5$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0{,}5$. Por tanto, existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0{,}5$

10.94 Considera la función: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) Completa la siguiente tabla de valores.

x	10	100	1000	10 000
$f(x)$				

b) ¿Qué significa $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$**?** **c) Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2}{x}$.

a)

x	10	100	1000	10 000	…
$f(x)$	0,01	0,001	0,000 001	0,00 000 001	…

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ significa que al dar a *x* valores grandes, cada vez mayores, *f*(*x*) se aproxima a 0.

c) Damos a *x* valores grandes, cada vez mayores:

x	10	100	1000	10 000	…
$\dfrac{x+1}{x}$	1,2	1,02	1,002	1,0002	…

Por tanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2}{x} = 1$

10.95 Considera la función $f(x) = \dfrac{-x + 1}{x}$

a) Completa la siguiente tabla de valores.

x	−10	−100	−1000	−10 000
$f(x)$				

b) ¿Qué significa $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$**?** **c) Calcula** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$.

a)

x	−10	−100	−1000	−10 000	
$f(x)$	−1,1	−1,01	−1,001	−1,0001	…

b) Significa que al dar a *x* valores negativos, en valor absoluto cada vez mayores, *f*(*x*) se aproxima a −1.

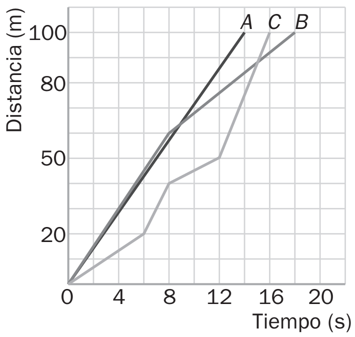
c)

x	−10	−100	−1000	−10 000	…
$\dfrac{x^2+1}{x^2}$	1,01	1,0001	1,000 001	1,00 000 001	…

Por tanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = 1$.

10.96 Los 100 metros lisos

Tres corredores *A*, *B* y *C* participan en una carrera de 100 metros lisos. La siguiente gráfica muestra el desarrollo de la prueba.



a) Indica el resultado final de la carrera, así como las posiciones cuando han pasado 14 segundos.

b) ¿A qué distancia de la salida se encuentran *A*, *B* y *C* en el momento en que *C* adelanta a *B*?

c) Dibuja la función que determina la velocidad que lleva el corredor *B* en cada momento, medida en kilómetros por hora.

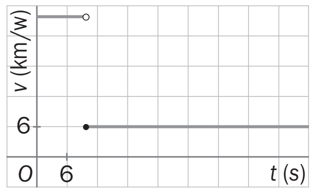
a) El orden de llegada es: primero llega el corredor *A*, en segundo lugar el corredor *C* y por último el corredor *B*.
A los 14 segundos, el corredor *A* ha recorrido 100 m, el corredor *B*, 85 m, y el corredor *C*, 75 m.

b) *A* ha acabado la carrera. *B* y *C* están a unos 87 m de la salida.

c) Calculamos la velocidad media del corredor en dos tramos; en los 8 primeros segundos y de los 8 a los 18 segundos, para eso calculamos la tasa de variación media en esos tramos:

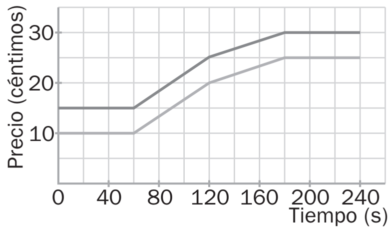
En el primer tramo: $TVM\ [0, 8] = \dfrac{60 - 0}{8 - 0} = 7{,}5 \text{ m/s} = 27 \text{ km/h}$

En el segundo tramo: $TVM\ [0, 18] = \dfrac{100 - 60}{18 - 8} = \dfrac{40}{10} = 4 \text{ m/s} = 14{,}4 \text{ km/h}$



10.97 Móvil con tarifa de prepago

En la propaganda de una empresa de servicios telefónicos aparece la siguiente gráfica, en la que se refleja el coste de las llamadas, según su duración, para los móviles con tarjeta de prepago. Dicho coste es distinto para los jóvenes menores de 16 años (color rojo) que para el resto de clientes (color azul).



a) ¿Coinciden el dominio y el recorrido en las dos funciones? Especifícalos.

b) ¿En qué intervalo de tiempo es mayor el porcentaje de rebaja efectuada a los menores de 16 años? ¿Cuál es este porcentaje?

c) Halla la tasa de variación media para los cuatro intervalos de la gráfica y para cada una de las tarifas. ¿En cuál de las dos es mayor la variación relativa de los precios según la duración de la llamada?

a) El dominio [0, 240] coincide en las dos gráficas. Recorrido (menores de 16) = [10, 25] y Recorrido (mayores de 16) = [15, 30].

b) Las dos gráficas son paralelas en sentido vertical. Así el descuento es siempre de 5 cts sobre el precio normal. Por tanto el porcentaje de descuento será mayor cuanto menor sea el coste de la llamada normal. Eso ocurre en el primer minuto donde este porcentaje es $\dfrac{5}{15} = 33{,}3\%$.

c) Primer tramo: de 20 s a 60 s

TVM (menores de 16) $= \dfrac{10 - 10}{60 - 20} = 0$ $\qquad$ TVM (mayores de 16) $= \dfrac{15 - 15}{60 - 20} = 0$

Segundo tramo: de 60 s a 120 s

TVM (menores de 16) $= \dfrac{20 - 10}{120 - 60} = \dfrac{10}{60} = 0{,}167$ $\qquad$ TVM (mayores de 16) $= \dfrac{25 - 15}{120 - 60} = \dfrac{10}{60} = 0{,}167$

Tercer tramo: de 120 s a 180 s

TVM (menores de 16) $= \dfrac{25 - 20}{180 - 120} = \dfrac{5}{60} = 0{,}084$ $\qquad$ TVM (mayores de 16) $= \dfrac{30 - 25}{180 - 120} = \dfrac{5}{60} = 0{,}084$

Cuarto tramo: de 180 s a 240 s

TVM (menores de 16) $= \dfrac{25 - 25}{240 - 180} = 0$ $\qquad$ TVM (mayores de 16) $= \dfrac{30 - 30}{240 - 180} = 0$

En las dos tarifas las variaciones medias por intervalo son iguales.

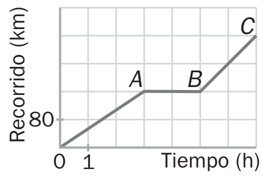
10.A1 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

a) La raíz cúbica de un número está definida siempre que exista ese número. Por tanto, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: $D(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x)$ no está definida si $x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$.
El dominio son todos los números reales distintos de 0 ó 1: $D(f) = \mathbb{R} - \{0,1\}$.

10.A2 Interpreta la siguiente gráfica, correspondiente a un viaje en coche por carretera. Calcula la velocidad media en los tramos *OA*, *AB* y *BC*.



La velocidad media en un intervalo es la tasa de variación media en el mismo. Por tanto:

$$TVM[0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{160 - 0}{3} = 53{,}3$$

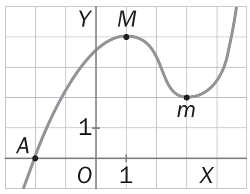
$$TVM[3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = 0$$

$$TVM[5, 7] = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{320 - 160}{2} = 80$$

La velocidad media en el tramo *OA* es de 53,3 km/h, en el tramo *AB* es de 0 km/h y en el tramo *BC* de 80 km/h. La interpretación de la gráfica es la siguiente: un coche parte de *O* y circula a una velocidad uniforme de 53,3 km/h durante 3 horas; luego está parado 2 horas y a continuación sigue a una velocidad uniforme de 80 km/h durante 2 horas.

10.A3 Dibuja la gráfica de una función que tenga un máximo relativo en $M(1, 4)$, un mínimo relativo en $m(3, 2)$ y corte el eje de abscisas en el punto $A(-2, 0)$.

La gráfica podría ser la siguiente:



10.A4 Averigua si la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es continua en los siguientes puntos.

a) $x = 0$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = -5$

a)

$x \to 0^-$	−0,1	−0,01	−0,001	…
$f(x)$	1,21	1,0201	1,002 001	…

$x \to 0^+$	0,1	0,01	0,001	…
$f(x)$	0,81	0,9801	0,998 001	…

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Luego $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Como también $f(0) = 1$, la función es continua en $x = 0$.

b)

x	1,9	1,99	1,999	…
$f(x)$	0,81	0,9801	0,998 001	…

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$

x	2,1	2,01	2,001	…
$f(x)$	1,21	1,0201	1,002 001	…

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

Luego $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$. Como también $f(2) = 1$, la función es continua en $x = 2$.

c)

x	−5,1	−5,01	−5,001	…
$f(x)$	37,21	36,1201	36,012 001	…

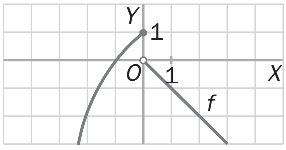
$\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = 36$

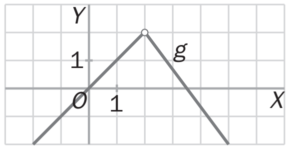
x	−4,9	4,99	−4,999	…
$f(x)$	34,81	35,8801	35,988 001	…

$\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = 36$

Luego $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 36$. Como también $f(5) = 36$, la función es continua en $x = 5$.

10.A5 Considera las gráficas de las siguientes funciones.





A la vista de ellas, razona:

a) Si la función $f(x)$ tiene límite cuando x tiende a 0.

b) Si la función $g(x)$ tiene límite cuando x tiende a 2.

a) Cuando x tiende a 0 por la izquierda $f(x)$ tiende a 1; en cambio, cuando x tiende a 0 por la derecha, $f(x)$ tiende a 0. Los límites laterales, por tanto, no coinciden, y la función no tiene límite en $x = 0$.

b) Cuando x tiende a 2 por la izquierda, $g(x)$ tiende a 2; cuando x tiende a 2 por la derecha, también $g(x)$ tiende a 2. Los límites laterales, por tanto, coinciden, y existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 2 (a pesar de que no existe $g(2)$), y vale precisamente 2.

10.A6 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{3}$

b) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

d) $f(x) = 2x^5 + 4$

a) $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{3} = -\dfrac{2x}{3} = -f(x)$

b) $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 5 = x^4 + 2x^2 - 5 = f(x)$

c) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^5} = -\dfrac{1}{x^5} = -f(x)$

d) $f(-x) = 2(-x)^5 + 4 = -2x^5 + 4$

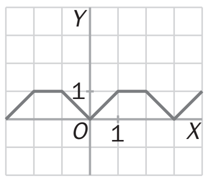
Las funciones de los apartados a y c son simétricas respecto del origen de coordenadas.

La función del apartado b es simétrica respecto del eje de ordenadas.

La función del apartado d no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, luego no es simétrica respecto de OY ni respecto de O.

10.A7 Dada la siguiente función:

¿Es periódica? En caso afirmativo, indica el período.

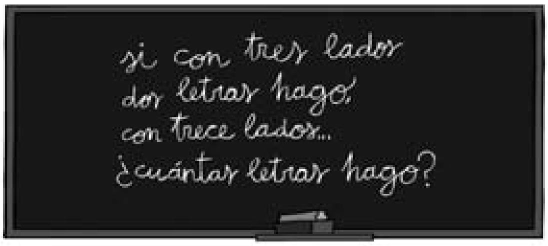


Sí. El período es $T = 3$.

Juega con los anagramas

En castellano los anagramas se emplean con frecuencia en acertijos, juegos de palabras y formación de seudónimos.

¿Eres capaz de resolver este acertijo?



En esta dirección de internet encontrarás muchos más juegos con anagramas: www.e-sm.net/mt4yeso01

Se trata de resolver un acertijo en el que intervienen anagramas.

Si con tres lados dos letras hago, con trece lados…

¿Cuántas letras hago?

Para resolver este acertijo planteamos los dos anagramas a los que su enunciado hace referencia:

ANAGRAMAS

TRES LADOS → DOS LETRAS

TRECE LADOS → _____ LETRAS

De este modo, basta con eliminar del texto original "TRECE LADOS" las letras correspondientes al texto final "LETRAS" y reordenar las letras sobrantes para averiguar el número que forman.

TRECE **LA**DO**S** las letras que "sobran" son CEDO que se pueden componer para formar el número DOCE.

Así, la respuesta al acertijo es: doce.