3. La lógica formal: lógica proposicional

El fundador de esta ciencia fue ARISTÓTELES, aunque solo desarrollara una pequeña parte de ella: la lógica cuantificacional de predicados monádicos, llamada *silogística*. Los estoicos (siglo III a. C.) desarrollaron otra parte, la *lógica conectiva*. La obra de ARISTÓTELES y la de los estoicos constituyeron, si prescindimos de algunos pequeños desarrollos de la época medieval, todo el saber lógico hasta el siglo XIX. A partir de entonces, la lógica experimentó un gran desarrollo, que continuó en el siglo XX, y no solo se han desarrollado las partes de la lógica citadas, sino que se han creado otras nuevas (*lógica de predicados nádicos, de relaciones, modal*, etc.) y se ha utilizado un complicado aparato técnico. A continuación solo se hará una introducción a la parte más simple, llamada **lógica proposicional**, que es la versión moderna de la lógica conectiva de los estoicos.

Como se ha dicho en el apartado anterior, la lógica se ocupa de hallar los esquemas de razonamiento formalmente válidos. En algunos de ellos se ve directamente su validez, como en el siguiente caso:

Primera premisa: Si A, entonces B.
Segunda premisa: A
Conclusión: B

Está claro que, con independencia de lo que signifiquen A y B, si las dos premisas son verdaderas, también lo será necesariamente la conclusión. En el esquema anterior, los símbolos A, B, etc., sustituyen a **proposiciones**, y el razonamiento se basa en las **conexiones** entre ellas (*si..., entonces...; o..., o...*, etc.). La lógica que estudia este tipo de esquemas se denomina, ***lógica proposicional*** o ***de enunciados***. Para analizar estos esquemas, se utilizan una serie de símbolos, que pueden variar de unos autores a otros. Las proposiciones suelen simbolizarse con las letras minúsculas p, q, r, s, t, u, v (con subíndices cuando sean insuficientes: p_1, q_1, etc.), y se denominan **variables proposicionales**.

Por lo que respecta a las conexiones entre las proposiciones, aunque en el lenguaje natural hay muchas, la lógica solo utiliza algunas, ya que considera que las demás son reductibles a estas. Estas conexiones se representan por medio de unos símbolos denominados precisamente **conectores**, que se exponen en el cuadro (unos sistemas lógicos utilizan más y otros menos, y los símbolos pueden ser distintos).

Nombre	Símbolo	Aplicación	Lenguaje natu[ral]
Negador	$\neg$	$\neg p$	No p, ni p; no es e[l] caso que p; etc.
Conjuntor	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q; p también q[;] pero q; p igualme[nte] q; etc.
Disyuntor	$\vee$	$p \vee q$	p o q (o ambos)
Condicionador	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	Si p entonces q; si p, q; suponiendo q[ue] p, q; q si p; q a con[]dición de que p; p [es] una condición sufi[]ciente de q; q es u[na] condición necesar[ia] de p; etc.
Bicondicionador	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p, si y solo si q (y a[l] revés); si p, q y si q[,] p; p es una condici[ón] necesaria y sufic[iente] de q (y al revés), e[tc.]

Con las variables proposicionales y las conectivas se tra[du]cen al lenguaje simbólico las proposiciones del lenguaje [na]tural. Por ejemplo, la proposición «Si hay suficiente sol [y] riegan a menudo, los tomates crecen sanos y no se pud[ren]» se simboliza así: $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$. Se utilizan paréntesis y [cor]chetes para separar las frases, aunque en este caso no se[rían] necesarios porque se conviene en que el condicionador [y el] bicondicionador separan más que el conjuntor y el disy[un]tor. Se conviene también en que, si hay varias conjuncion[es o] disyunciones seguidas, no son necesarios los paréntesis, [pero] sí lo son cuando están mezcladas. Para ver de una forma p[rác]tica cómo se formaliza, a continuación se ofrece un conju[nto] de frases con su simbolización. Hay que fijarse bien en có[mo] se traducen las conectivas. Por ejemplo, la frase «Cuando h[ace] calor nos remojamos sin quitarnos la ropa» equivale a «*Si* h[ace] calor, *entonces* nos remojamos y *no* nos quitamos la ropa».

- Herminia solo está contenta y trabaja, cuando traba[ja,] estudia al mismo tiempo y no tiene que preocuparse [de] otras cosas: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge r \wedge \neg s$
- Año de nieves, año de bienes: $p \rightarrow q$
- No es verdad que Teodoro solo piense en su novi[a,] salga siempre con ella sin cumplir con sus obligacio[nes]: $\neg (p \wedge q \wedge \neg r)$
- Natalia y su hermano pequeño van cada día a la esc[ue]la: $p \wedge q$
- Lo que acabas de decir o lo sabes, o es una pura sup[o]sición, o te lo acabas de inventar y ni siquiera tú te [lo] crees: $p \vee q \vee (r \wedge \neg s)$
- Si te apetece, iremos de excursión, pero si no te apete[ce,] no iremos y nos quedaremos en casa a escuchar músi[ca] o a jugar al póquer: $(p \rightarrow q) \wedge [\neg p \neg q \wedge r \wedge (s \vee r)]$

- Cuando venga tu sobrina, solo la ayudaré a hacer los deberes si después recoge las cosas y se va a jugar con sus amigas sin molestarme: $p \rightarrow (q \leftrightarrow r \wedge s \wedge \neg t)$

Las tablas de verdad

La lógica proposicional es una lógica binaria porque solo establece dos valores de verdad: cualquier fórmula es o **verdadera** o **falsa**. Por ejemplo, a propósito de la verdad de la proposición «Alicia estudia y trabaja», pueden darse cuatro casos:

a) que, en efecto, estudie y trabaje;
b) que estudie, pero no trabaje;
c) que no estudie, pero trabaje;
d) que ni estudie ni trabaje.

Ya se ve que esta proposición («Alicia estudia y trabaja») solo será verdadera en el primer caso; pero, si en lugar de afirmar que «estudia *y* trabaja», hubiéramos afirmado que «estudia *o* trabaja», entonces sería verdad en los tres primeros casos y sería falsa en el cuarto (ya que entendemos la disyunción de forma inclusiva). Por tanto, para saber cuál es el valor de verdad de una proposición, tenemos que ver cuál es el valor de los diversos elementos (oraciones simples y conectivas que la componen). Si la proposición está constituida por una sola oración (*p*), su valor de verdad dependerá únicamente de ella: o es verdad o no es verdad que Alicia estudia; si es verdad que «estudia» (*p*), no es verdad que «no estudia» ($\neg p$), y viceversa. En cambio, si la proposición está formada por dos o más oraciones conectadas, su valor de verdad dependerá de la verdad de cada una y del tipo de conectiva que las una. Cada oración puede ser, hemos dicho, o verdadera o falsa, y el valor de verdad de las conectivas es el que aparece en el siguiente cuadro:

p	¬p
V	F
F	V

p q	p∧q	p∨q	p→q	p↔q
V V	V	V	V	V
V F	F	V	F	F
F V	F	V	V	F
F F	F	F	V	V

Por tanto, si tenemos una fórmula concreta, por ejemplo $\neg p \rightarrow \neg q \vee p$, podremos examinar el valor de verdad de cada caso, elaborando una tabla (llamada **tabla de verdad**).

p q	¬p	→	q	∨	p
V V	F	V	V	V	V
V F	F	V	F	V	V
F V	V	V	V	V	F
F F	V	F	F	F	F
	1	5	2	4	3

(La columna destacada es el resultado final, y el número que aparece debajo de cada columna indica el orden de resolución.)

Como puede verse, se trata de una fórmula condicional formada por dos miembros: el antecedente es una negación, $\neg p$, y el consecuente es una disyunción, $q \vee p$. A la izquierda de la tabla se anotan todas las combinaciones posibles de valores que pueden tener las variables proposicionales que tiene la fórmula (en este caso, *p* y *q*), y a la derecha, el resultado de estas combinaciones con las conectivas que unen las variables. Examinemos el primer caso: el antecedente es falso (F), ya que cuando la *p* es verdadera (V), como se indica a la izquierda de la tabla, su negación será F; el consecuente es una disyunción entre *q* y *p*: al ser las dos V, la disyunción también lo será y, por tanto, la fórmula será verdadera. En cambio, en el último caso, la fórmula es falsa, ya que el antecedente es V y el consecuente, F.

Así, para construir una tabla de verdad, hay que seguir los siguientes pasos:

a) Ver cuántas variables distintas intervienen en la fórmula, y, puesto que cada una puede tener dos valores, V y F, calcular cuántas combinaciones son posibles mediante la fórmula 2^n (n = número de variables). Así, cuando hay una sola variable son $2^1 = 2$; cuando son dos, $2^2 = 4$; cuando son tres, $2^3 = 8$, etc.

b) Se colocan a la izquierda todas las combinaciones posibles.

c) Arriba, a la derecha, se anota la fórmula.

d) Se analiza qué tipo de fórmula es. Según la conectiva principal, las fórmulas pueden ser: una *negación*, por ejemplo $\neg\ [(p \vee q) \wedge \neg r \rightarrow \neg p \wedge r]$; una *conjunción*, por ejemplo $(p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg p \wedge r)$; una *disyunción*, por ejemplo $(p \vee q) \vee (\neg r \rightarrow \neg p \wedge r)$; una *condicional*, por ejemplo $[(p \vee q) \vee \neg r] \rightarrow \neg p \wedge r$; o una *bicondicional*, por ejemplo $[(p \vee q) \vee \neg r]$ « $\neg p \wedge r$.

e) La conectiva principal es la última en resolverse y es el resultado de la fórmula. Primero se resuelven las conectivas de cada miembro, empezando por las incluidas en los paréntesis.

La fórmula del primer ejemplo del paso *d*), $\neg\ (p \vee q) \wedge \neg r \rightarrow \neg p \wedge r]$, se resolvería de la siguiente manera:

p	q	r	¬[	(p	∨	q)	∧	¬r	→	:p	∧	r]
V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F
			10	1	3	2	5	4	9	6	8	7

a) Contamos las variables: hay tres (*p*, *q* y *r*), por tanto habrá ocho combinaciones posibles de V y F, que anotaremos a la izquierda de la tabla.

b) Vemos que la fórmula es una negación de una condicional. Resolveremos, por tanto, primero los dos miembros de la condicional (el *antecedente* y el *consecuente*) y, al final, negaremos el resultado.

c) Observamos que el antecedente es una conjunción en la que el primer miembro es una disyunción; el segundo, una negación, y el consecuente, otra conjunción con el primer miembro negado.

d) El orden de resolución se ha indicado con un número debajo de cada columna y con sombreados en las columnas principales.

Como podemos observar, en el resultado final hay Fs y Vs, lo cual significa que el valor de esta fórmula depende del valor de sus variables proposicionales. Así, cuando *p*, *q* y *r* son V, la fórmula es F (primer caso); en cambio, cuando *p* y *q* son V y *r* es F, la fórmula es V (segundo caso), etc.

Por tanto, según el resultado final, pueden darse tres clases de fórmulas:

- A las que, en unos casos son verdaderas y en otros falsas, las llamamos **indeterminaciones lógicas**.
- De las que son verdaderas en todos los casos, decimos que son **verdades lógicas** o **tautologías**, porque su valor no depende del valor de las variables, sino de su forma o estructura: siempre es V.
- De las que, por el contrario, son falsas en todos los casos, decimos que son **contradicciones lógicas**, ya que, por su estructura, nunca pueden ser verdad.

Por tanto, según su valor de verdad, las fórmulas se dividen en tres clases: **indeterminaciones**, **tautologías** y **contradicciones**. La lógica solo se ocupa de las tautologías, porque, como hemos dicho, su objetivo es determinar qué razonamientos son verdaderos por su forma.

Así pues, las tablas de verdad son un **método de decisión lógica** que nos permite saber si una fórmula es lógicamente válida (es una tautología) o no. Por tanto, con ellas podremos saber si un razonamiento es correcto. Examinemos el siguiente:

«Si estudio, obtengo buenas notas. Si no estudio, me lo paso bien. Pero si no obtengo buenas notas, no me lo paso bien. Por tanto, obtengo buenas notas».

¿Es correcto desde el punto de vista lógico (es... las premisas son verdaderas, también lo es necesa... te la conclusión)? Cualquier razonamiento se pu... cribir en forma de un condicional, cuyo antecede... formado por la conjunción de las premisas (P), y el... cuente, por la conclusión (C):

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \text{etc.} \rightarrow C$

El razonamiento anterior consta de tres premisa... conclusión:

P_1 Si estudio, obtengo buenas notas: $p \rightarrow q$

P_2 Si no estudio, me lo paso bien: $\neg p \rightarrow r$

P_3 Si no obtengo buenas notas, no me lo paso bien: $\neg q \neg r$

C Obtengo buenas notas: q

La fórmula queda así: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r) \wedge (\neg q$... Si elaboramos la tabla de verdad, obtenemos el sig... resultado:

p	q	r	(p	→	q)	∧	(¬p	→	r)	∧	(¬q	→	¬r)
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	V
			1	3	2	7	4	6	5	11	8	10	9

Como muestra la tabla, el razonamiento es una t... logía, por tanto es correcto. Así pues, las tablas de ve... constituyen un método que permite analizar cual... razonamiento, pero cuando aparecen en él más de... variables proposicionales, el procedimiento es muy... gorroso, ya que aumenta mucho el número de comb... ciones posibles, por eso la lógica ha inventado pru... más simples: *pruebas de independencia*, *deducciones*, e...

ACTIVIDADES

1. Formaliza las siguientes proposiciones y elabora las tablas de verdad de *a*, *b* y *c*.

a) Tanto Julia como Rodrigo y su hermano tienen vacaciones en agosto.

b) Cuando vayas a mi casa, te enseñaré mi equipo de música, pero no lo pondré en marcha.

c) No es verdad que, cuando un alumno llega tarde, este profesor de música no lo deje entrar y le ponga falta.

d) Es un poco tímido y no tiene mucha marcha, pero me gusta y me lo paso bien con él.

2. Decide, con la ayuda de las tablas de verdad, si los si... guientes razonamientos son lógicamente correctos.

a) Si aumenta el calor en mi habitación, el mercurio sube ... el tubo del termómetro; pero, si abro la ventana, el me... curio no sube. Por tanto, el calor solo aumenta si no ab... la ventana.

b) Siempre que Isabel llega tarde, su hermana es puntua... pero cuando no llega tarde, su hermana no es puntual. Po... tanto, o Isabel llega tarde o su hermana es puntual.

c) O la lógica es difícil o no gusta a los estudiantes. Pero, s... las matemáticas son fáciles, la lógica no es difícil. Por tan... to, si a los est... las matemáticas...

Falacias no formales

<table>
<tr><th colspan="4">FALACIAS DE PERTINENCIA
(muchas de estas falacias tienen nombres latinos que provienen de la época medieval)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ad hominem
(contra el hombre)
Para demostrar que una afirmación es falsa, se aportan razones que desprestigien a la persona que la formula. Se trata del típico: «¿Esto lo ha dicho tal persona? Pues seguro que no es verdad»:</td><th>Esquema</th><th>Ejemplo</th><td rowspan="2">Una modalidad de esta falacia es la llamada «del hombre de paja», que consiste en ridiculizar la opinión del contrario para así rebatirla. (Ejemplo: «Lo que quieren los ecologistas es que volvamos a la Edad de Piedra».)</td></tr>
<tr><td>A afirma p.
A es persona poco fiable.
Por tanto, p es falso.</td><td>Los antiglobalización ven un peligro en la economía actual.
Estos sectores son exagerados y violentos
Por tanto, no debemos temer la economía globalizada.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ad verecundiam (al respeto)
Se apela a la autoridad. Sería el caso contrario del anterior.</td><th>Esquema</th><th>Ejemplo</th><td rowspan="2">Como hemos visto en el apartado anterior, este tipo de argumento no siempre es falaz; solo lo es cuando la autoridad a la que se apela no es competente en aquella materia. Este tipo de falacia se utiliza frecuentemente en anuncios publicitarios: «Tal deportista famoso recomienda tal alimento...».</td></tr>
<tr><td>A afirma p.
A es digno de confianza
Por tanto, p es verdad.</td><td>Según Schopenhauer, las mujeres son poco inteligentes.
Schopenhauer era un gran filósofo.
Las mujeres son poco inteligentes.</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Ad baculum (al bastón)
Apela a la fuerza. Por lo general, se utiliza para demostrar que alguien debe hacer algo o dejar de hacerlo.</td><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>«Debo sacar buenas notas porque, si no, mis padres se enfadan.»</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Ad ignorantiam (a la ignorancia)
Considera que una afirmación es verdadera solo por el hecho de que nadie ha podido demostrar su falsedad, o al revés.</td><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>«Los extraterrestres existen porque nadie ha podido demostrar que no existan.»</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Ad populum (al pueblo)
Se dan argumentos que exalten las emociones o los sentimientos de la gente para predisponerla a dar su consentimiento a la proposición que se afirma.
Es el tipo de argumentos que a veces utilizan los padres para convencer a sus hijos: «¡Si todo lo hacemos por ti...!».
Un caso especial es la llamada falacia ad misericordiam, que recurre al sentimiento de pena: «Sr. director, debe darme este trabajo, no querrá usted que mis hijos se mueran de hambre...».</td><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>«¿Quiere que sus hijos tengan una gran cultura? ¿Quiere que estén al día? Pues compre tal enciclopedia.»</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ex populo (a partir del pueblo)
Se intenta convencer de la verdad de una afirmación aduciendo que la mayoría cree en ella. Para demostrar la existencia de Dios se ha recurrido al llamado argumento del «consenso universal»: la gran mayoría de la humanidad ha creído en su existencia desde siempre.</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Tu quoque (tú también)
Intenta desautorizar una acusación aduciendo que el acusador se halla en un caso parecido.</td><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>«En nuestro partido hay corrupción. Pues, en el vuestro, mucho más.»</td></tr>
</table>