Resuelve

Página 171

Descomposición de una fuerza

I. Una cuerda de 10 m de larga cuelga de dos escarpias, A y B, situadas a la misma altura y a 8 m de distancia entre sí. De ella se cuelga una pesa de 50 kg de masa que permanece en equilibrio en un punto situado a 3 m de A y a 7 m de B.

Observa que descomponemos el peso, P, que produce los 50 kg de masa, en dos componentes, P_1 y P_2, cada una de las cuales tira de uno de los trozos de cuerda. Estima, midiendo y teniendo en cuenta la escala, la magnitud de cada una de las dos componentes del peso.

II. Repite la construcción suponiendo que la masa se coloca simétricamente respecto a las dos escarpias (5 m de cuerda a cada lado). Estima, midiendo, la tracción que, en este caso, debe soportar cada trozo de cuerda.

III. Vuelve a repetir la construcción para una cuerda de doble longitud y en la que se coloca la pesa simétricamente.

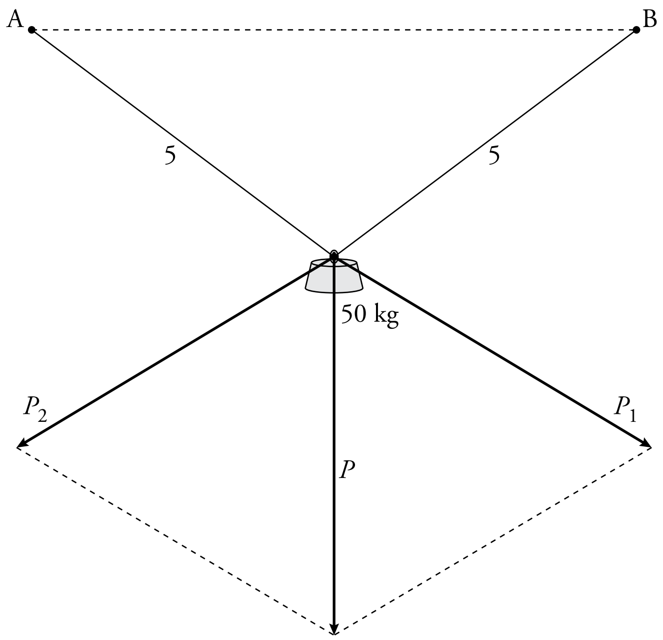
Si la cuerda fuera débil y temieras que pudiera romperse con tracciones fuertes, ¿cuál de las tres situaciones I, II o III te parecería la más adecuada para colgar la pesa?

I. $P = 50$ kg

$P_1 = 48$ kg

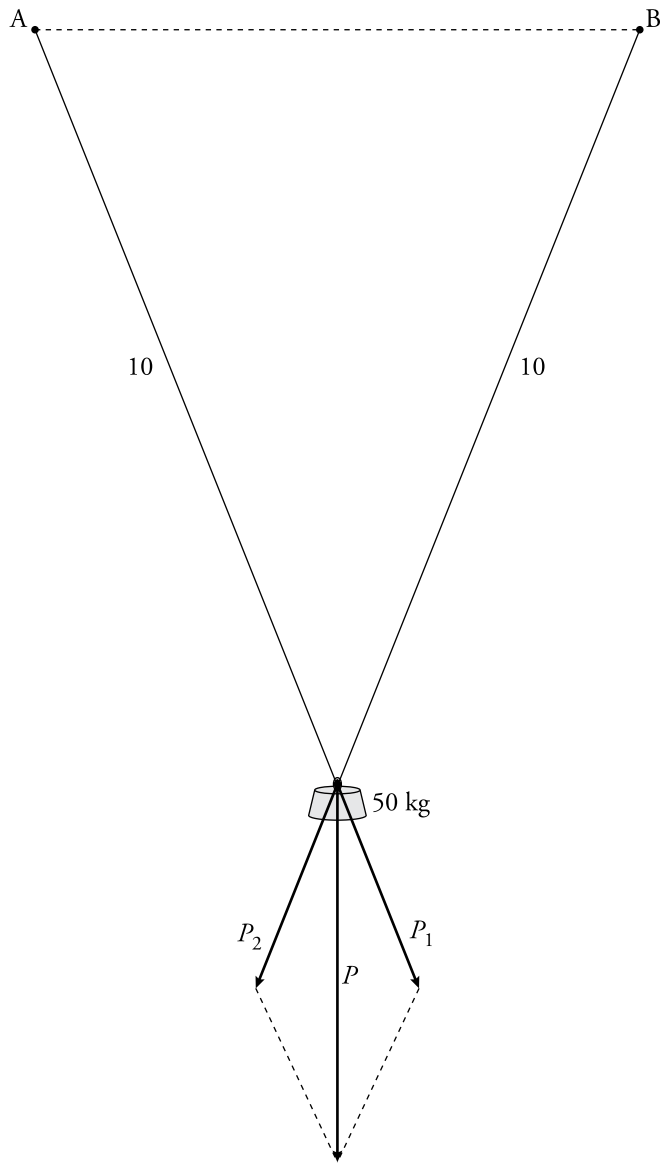
$P_2 = 27$ kg

II.



Cada componente del peso es de unos 42 kg.

III.



Cada componente del peso es de unos 27 kg.

Conclusiones: Si la cuerda es débil, tenemos que colgar el peso en el centro y cuanto más larga sea la cuerda, mejor.

2 Coordenadas de un vector

Página 175

1 **Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:**

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ **d)** $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

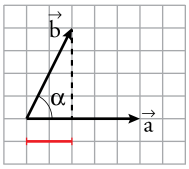
c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

3 Producto escalar de vectores

Página 176

1 **¿Verdadero o falso?**



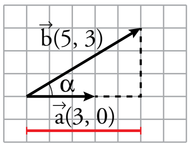
Demostramos que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{b}|\cos\alpha = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 5 \cdot 2 = 10$$

Verdadero. Partimos de la longitud de la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ y de su expresión en relación con el producto escalar de dos vectores para calcular el producto escalar de dichos vectores.

2



Observando el razonamiento del ejercicio anterior, calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}|\cos\alpha = 5 \to \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 3 \cdot 5 = 15$$

3 **Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30°$. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \cdot \vec{u}$ **c)** $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ **e)** $\vec{u} \cdot \vec{u}$ **f)** $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \cos 0° = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

4 **Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$. (Usa la calculadora).**

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 97°\ 39'\ 44''$$

5 **Halla $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ y $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 120°$.**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos 120° + |\vec{u}|\,|\vec{u}|\cos 0° =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

Página 178

6 **Las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-1, 3)$. Halla:**

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y $\vec{v} \bullet \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (3, -4) \bullet (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = (-1, 3) \bullet (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \bullet (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \dfrac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \dfrac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, $(4, 3)$.

Un vector unitario paralelo a $(4, 3)$ es $\dfrac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \dfrac{1}{5}(4, 3) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $(3, -4)$, son $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 179

1. Producto escalar en bases no ortonormales

Hazlo tú. **Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, siendo $\vec{a}(0, 3)$ y $\vec{b}(-1, 1)$ sus coordenadas respecto a la base *B*.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3|\vec{v}|^2 = -9 + 9 = 0$

Página 180

4. Descomponer un vector

Hazlo tú. **Resuelve este mismo problema si $\vec{a} = (-1, 4)$ y $\vec{b} = (2, 9)$.**

$$\begin{cases} \vec{u} = k\vec{a} \\ \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = \vec{u} + \vec{v} \end{cases} \to \begin{cases} \vec{u} = k(-1, 4) = (-k, 4k) \\ \vec{v} = h(4, 1) = (4h, h) \\ (2, 9) = (-k, 4k) + (4h, 4) \end{cases} \to \begin{cases} 2 = -k + 4h \\ 9 = 4k + h \end{cases} \to k = 2, \ h = 1$$

Los vectores buscados son $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 181

1. Obtención de vectores paralelos y perpendiculares a uno dado

Dado el vector $\vec{v}\,(9, 12)$, calcular las coordenadas de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}$, unitario y de la misma dirección que el vector $\vec{v}$.

b) $\vec{w}$, ortogonal al vector $\vec{v}$ y del mismo módulo.

c) $\vec{z}$, de módulo 5 y ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9, 12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Otra solución: $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w}_1 = (-12, 9)$

Otra solución: $\vec{w}_2 = (12, -9)$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$

$$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$$

$$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$$

2. Cálculo de los módulos de la suma y de la diferencia de dos vectores

De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos sus módulos, 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente, y sabemos que forman un ángulo de 45°.

Hallar $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° + 2 =$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 5$$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° + 2 =$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1$$

$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$

3. Determinación de parámetros para que un vector cumpla ciertas condiciones

Sean los vectores $\vec{a}(3, n)$ y $\vec{b}(-2, m)$. Calcular el valor de los parámetros n y m en cada uno de los siguientes casos, para que se cumpla:

a) $|\vec{a}| = 5$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***y*** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

c) $\vec{a}$ ***forme un ángulo de 45° con el vector*** $\vec{u} = (1, 1)$***.***

a) $|\vec{a}| = \sqrt{9+n^2} = 5 \;\to\; 9 + n^2 = 25 \;\to\; n = -4,\; n = 4$

b) $\begin{cases} \vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases} \to \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ \sqrt{9+n^2} = \sqrt{4+m^2} \end{cases} \to \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ 9 + n^2 = 4 + m^2 \end{cases} \to \begin{cases} m = \dfrac{6}{n} \\ 9 + n^2 = 4 + \left(\dfrac{6}{n}\right)^2 \end{cases}$

Soluciones: $n = -2,\ m = -3;\ \ n = 2,\ m = 3$

c) $\vec{a} \bullet \vec{v} = |\vec{a}|\,|\vec{v}|\, \cos 45° = |\vec{a}|\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = |\vec{a}| = \sqrt{9+n^2}$

$\vec{a} \bullet \vec{v} = (3, n) \bullet (1, 1) = 3 + n$

Luego $\sqrt{9+n^2} = 3 + n \;\to\; n = 0$

4. Coordenadas de un vector en una base no ortonormal

En una base ortonormal se consideran los vectores $\vec{u}(3, 0)$, $\vec{v}(2, 1)$ y $\vec{w}(-1, -2)$.
Comprobar que $B(\vec{u}, \vec{v})$ es también una base y calcular las coordenadas de $\vec{w}$ en esta base.

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{0}{1}$, luego no tienen la misma dirección. Por tanto, forman una base.

$\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \;\to\; (-1, -2) = m(3, 0) + n(2, 1) \;\to\; (-1, -2) = (3m + 2n, n)$

Igualando ambas coordenadas: $\begin{cases} -1 = 3m + 2n \\ -2 = n \end{cases}$

Solución: $m = 1,\ n = -2$

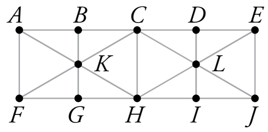
Ejercicios y problemas propuestos

Página 182

Para practicar

Los vectores y sus operaciones

1 Observa la siguiente figura:



a) Compara el módulo, la dirección y el sentido de las siguientes parejas de vectores:
$\overrightarrow{AB}$ **e** $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{AH}$ **y** $\overrightarrow{LC}$.

b) Calcula $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}$ **y** $\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{CL}$.

c) Completa las siguientes igualdades: $\overrightarrow{LC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{L\ldots}$; $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{H\ldots}=\overrightarrow{HC}$

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

$\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{LC}$ tienen misma dirección, sentido contrario y $|\overrightarrow{AH}|=2|\overrightarrow{LC}|$.

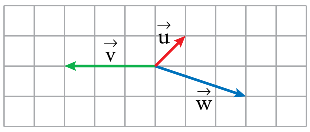
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{HJ}$

c) $\overrightarrow{LC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{LD}$

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HC}$

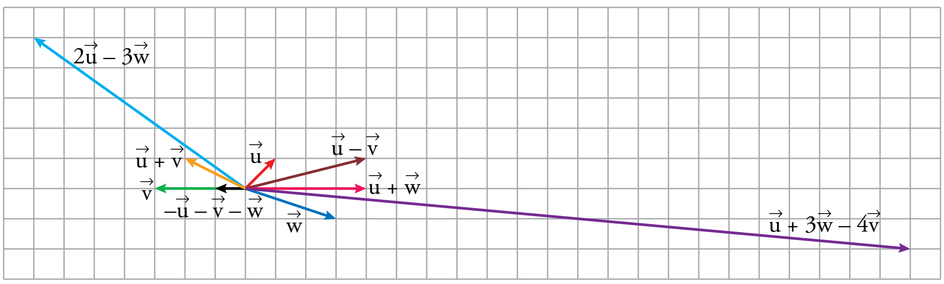
2 Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **los siguientes vectores:**



Calcula gráficamente los vectores:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}$ **c)** $\vec{u}+\vec{w}$

d) $2\vec{u}-3\vec{w}$ **e)** $\vec{u}+3\vec{w}-4\vec{v}$ **f)** $-\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$



3 **Observa el rombo de la figura y calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

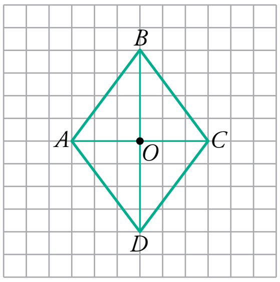
b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

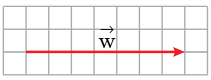


Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$

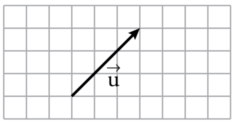
d) $\overrightarrow{AA} = 0$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

4 **Considera el vector** $\vec{w}$**:**

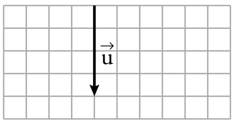


Dibuja en cada uno de estos casos un vector $\vec{v}$ **que sumado con** $\vec{u}$ **dé como resultado** $\vec{w}$**:**

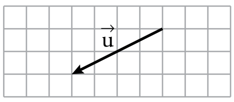
a)



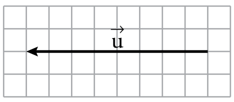
b)

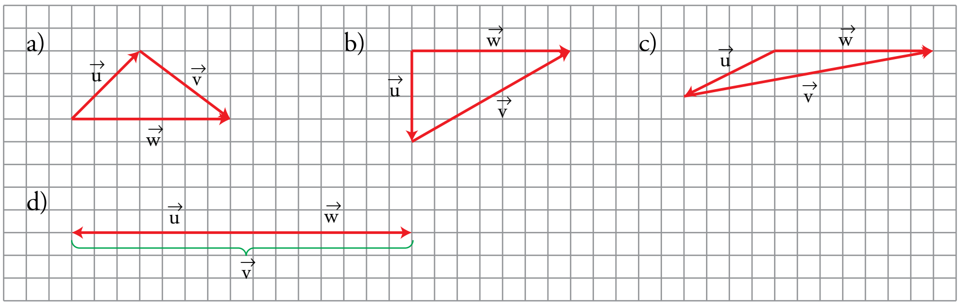


c)

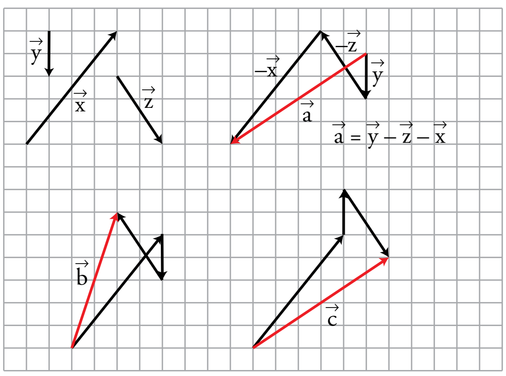


d)





5 **Los vectores** $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ **y** $\vec{c}$ **los hemos obtenido operando con los vectores** $\vec{x}$**,** $\vec{y}$**,** $\vec{z}$**. ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?**

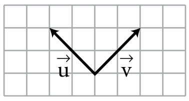


$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$ $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

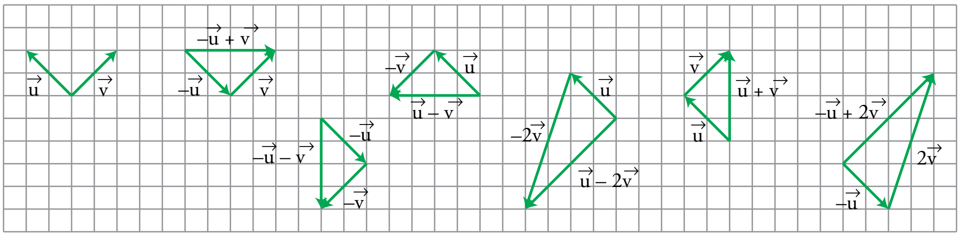
Bases y coordenadas

6 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**

$$-\vec{u}+\vec{v} \qquad \vec{u}-\vec{v} \qquad \vec{u}+\vec{v}$$
$$-\vec{u}-\vec{v} \qquad -\vec{u}+2\vec{v} \qquad \vec{u}-2\vec{v}$$



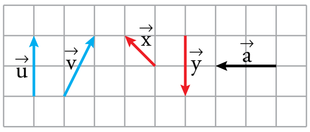
Si tomamos como base $B(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



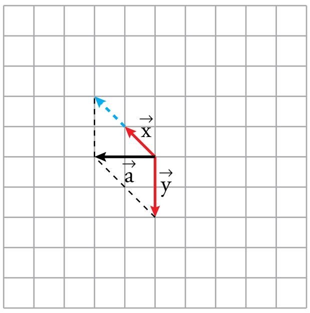
$-\vec{u}+\vec{v}=(-1, 1)$ $\qquad$ $\vec{u}-\vec{v}=(1, -1)$ $\qquad$ $\vec{u}+\vec{v}=(1, 1)$

$-\vec{u}-\vec{v}=(-1, -1)$ $\qquad$ $-\vec{u}+2\vec{v}=(-1, 2)$ $\qquad$ $\vec{u}-2\vec{v}=(1, -2)$

7 **Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Escríbelo también como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

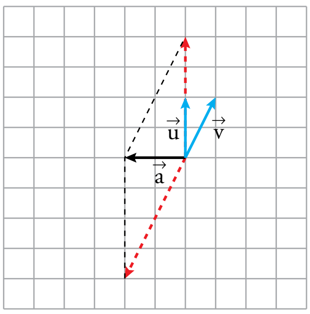


¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$? ¿Y respecto de la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$?



$\vec{a}=2\vec{x}+\vec{y}$

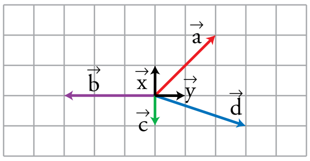
En la base $B(\vec{x}, \vec{y})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a}=(2, 1)$.



$\vec{a}=2\vec{u}-2\vec{v}$

En la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a}=(2, -2)$.

8 **Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (0, -3)$; $\vec{c} = (-1, 0)$; $\vec{d} = (-1, 3)$

9 **¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

10 **Considera el vector $\vec{u}(-1, -3)$. Da un vector $\vec{v}$ tal que $B(\vec{u}, \vec{v})$ sea una base, y un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ no formen una base.**

Para que formen una base sus coordenadas no pueden ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{v} = (1, 4)$.

Para que no formen una base, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{w} = (2, 6)$.

Página 183

11 **Dados los vectores $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula:**

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}[(3,-5)+(-2,1)] - \frac{2}{3}[(3,-5)-(-2,1)] = \frac{1}{2}(1,-4) - \frac{2}{3}(5,-6) = \left(\frac{1}{2},-2\right) + \left(\frac{-10}{3},4\right) = \left(\frac{-17}{6},2\right)$

12 **Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.**

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \;\to\; \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)\,b_1 \;\to\; b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)\,b_2 \;\to\; b_2 = 22 \end{cases}$$

$\vec{b}\,(-20, 22)$

13 **Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \;\to\; \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, $n = 3m$, y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \;\to\; -5 = 4m \;\to\; m = \frac{-5}{4} \;\to\; n = \frac{-15}{4}$$

14 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo). Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{r} -1 = 3m + 4n \\ \underline{-64 = -16m - 4n} \\ -65 = -13m \rightarrow m = \dfrac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

15 **En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(1,-1) \\ \vec{y}(0,-1) \\ \vec{v}(2,-5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} \rightarrow (2,-5) = a(1,-1) + b(0,-1) = (a,-a) + (0,-b) = (a,-a-b) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ en la nueva base son (2, 3).

Producto escalar. Módulo y ángulo

16 **Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:**

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z}$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

17 **De los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sabemos que:**

$$\vec{u}(-1, 1);\ |\vec{v}| = 1;\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°;\ \vec{w} \perp \vec{v}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\, cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot cos\,45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

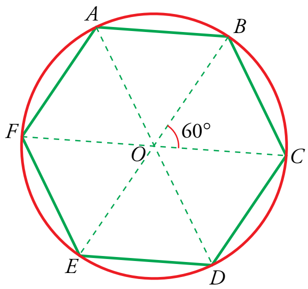
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, porque $cos\,90° = 0$.

18 **En una circunferencia de centro *O* y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Calcula los productos:**

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ **c)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$ **d)** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$



c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(∗) *OAB* es un triángulo equilátero, luego:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OA}| = 2$

Razonamos igual para $|\overrightarrow{ED}|$.

d) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

19 **Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

20 **Si *A*, *B* y *C* son los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC})$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

d) $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}$

En un triángulo equilátero, los lados miden 1 y forman un ángulo de 60°.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC}) = 2 \cdot (-3)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{6}{2} = 3$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3|\overrightarrow{AC}|^2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

21 Comprueba si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares:

a) $\vec{u}(0, 1)$, $\vec{v}(2, 4)$

b) $\vec{u}(0, 7)$, $\vec{v}(-5, 0)$

c) $\vec{u}(2, 5)$, $\vec{v}(5, 2)$

d) $\vec{u}(3, 6)$, $\vec{v}(-2, 1)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0,1) \cdot (2, 4) = 4 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 7) \cdot (-5, 0) = 0 \rightarrow$ Sí son perpendiculares.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 5) \cdot (5, 2) = 20 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 6) \cdot (-2, 1) = 0 \rightarrow$ Sí son perpendiculares.

22 Obtén, en cada caso, un vector paralelo y otro perpendicular al vector dado.

a) $\vec{u}(0, 3)$ **b)** $\vec{u}(-5, 0)$ **c)** $\vec{u}(3, 8)$ **d)** $\vec{u}(-1, -1)$

	PARALELO	PERPENDICULAR
a)	(0, 9)	(3, 0)
b)	(10, 0)	(0, –5)
c)	(30, 80)	(–8, 3)
d)	(2, 2)	(1, –1)

23 Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$

c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

d) $\vec{u}(k, -k)$, $\vec{v}(5, 5)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k,\ 3) = \frac{1}{5}k - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = -2k - 15 = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (k, -k) \cdot (5, 5) = 0 \rightarrow$ Cualquier $k \in \mathbb{R}$ es válido.

24 Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(5, 0)$

$|\vec{u}| = |(3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |(-2, 3)| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = |(5, 0)| = \sqrt{25 + 0} = 5$

25 Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.

$|\vec{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, m\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1 \rightarrow m = -\frac{4}{5},\ m = \frac{4}{5}$

26 **Dada la base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ donde $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada caso, una base B' de vectores unitarios tales que:**

a) Los vectores de B' sean paralelos a los de B.

b) Los vectores de B' sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5;\ |\vec{v}| = \sqrt{0+64} = 8$

$\vec{u}' = \frac{1}{5}\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ $\quad\quad$ $\vec{v}' = \frac{1}{8}\vec{v} = \frac{1}{8}(0, -8) = (0, -1)$

b) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$\vec{u}' \perp \vec{u} \ \rightarrow\ \vec{u}' = (4, 3)$

$\vec{v}' \perp \vec{v} \ \rightarrow\ \vec{v}' = (8, 0)$

27 **Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \rightarrow\ (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \ \rightarrow\ -20 - 2k = 0 \ \rightarrow\ k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \ \rightarrow\ 25 + k^2 = 34 \ \rightarrow\ k^2 = 9 \ \rightarrow\ k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

28 **Dado el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:**

a) Los vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{u}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{25+144} = 13$

a) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(5, 12) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(5, 12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

b) $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$\vec{v}_2 = (12, -5)$

c) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(-12, 5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

29 **Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.**

$\vec{u}' = (6, -8)$ es perpendicular a $\vec{a}$.

$|\vec{u}'| = \sqrt{36+64} = 10$

Un vector con esta dirección y de módulo 1 es:

$\vec{u} = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

El vector que buscamos es:

$\vec{v} = 50\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (30, -40)$

También es solución $\vec{v}' = (-30, 40)$.

30 **Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4}\sqrt{1+25}} = -\dfrac{7}{26}\sqrt{2} \approx -0{,}38 \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 20'\ 12''$

b) $cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36}\sqrt{9+4}} = 0 \to (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36}\sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

31 **Dados** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ **y** $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, **calcula** k **para que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **formen un ángulo de 60°.**

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = cos\ 60° = \frac{1}{2} \to$$

$$\to \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{2} \to \sqrt{\frac{1}{4}+k^2} = 1 \to k = -\frac{1}{2}\sqrt{3};\ k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

32 **Calcula** x, **de modo que el producto escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **y** $\vec{b}(x, 2)$ **sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$**?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \to 3x - 10 = 7 \to x = \dfrac{17}{3}$

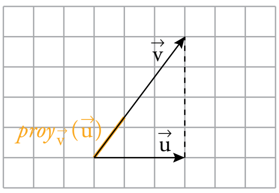
$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{9+25}\sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2+4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2\,210} \approx 0{,}2 \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 79°\ 31'\ 17''$$

33 **Calcula la proyección de** $\vec{u}$ **sobre** $\vec{v}$, **la de** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$ **y representa gráficamente cada situación.**

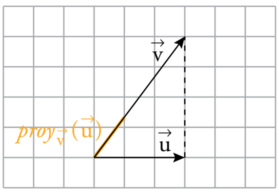
a) $\vec{u}(3, 0)$ **y** $\vec{v}(3, 4)$ **b)** $\vec{u}(1, 3)$ **y** $\vec{v}(-4, 2)$ **c)** $\vec{u}(-2, -5)$ **y** $\vec{v}(5, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3$; $|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$; $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{9}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3$

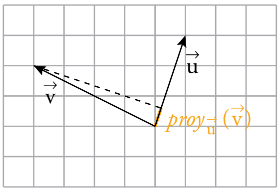


$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{5}$

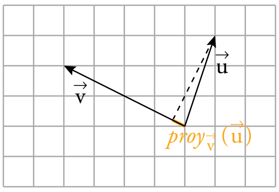


b) $|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{-4 \cdot 6}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$



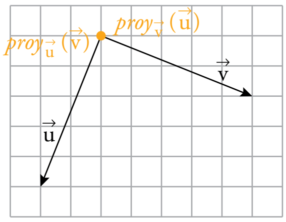
$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{10} \cdot \dfrac{1}{10}\sqrt{2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{5}$



c) $|\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$; $|\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$



Página 184

Para resolver

34 Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $B = (\vec{u}, \vec{v})$ es una base.

b) Dos vectores paralelos pueden tener sus coordenadas no proporcionales.

c) Si dos vectores son perpendiculares, sus coordenadas no pueden ser proporcionales.

d) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo, pero distinta dirección.

e) El módulo de $-3\vec{v}$ es el triple que el módulo de $\vec{v}$.

a) Verdadera, porque los vectores son perpendiculares, luego no tienen la misma dirección.

b) Falsa. Si son paralelos, sus coordenadas son proporcionales porque $\vec{u} = k\vec{v}$.

c) Verdadera. Si las coordenadas fueran proporcionales, serían paralelos.

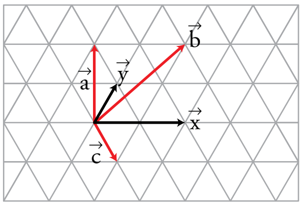
d) Falsa. Tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios.

e) Verdadera: $|-3\vec{v}| = |-3|\,|\vec{v}| = 3|\vec{v}|$

35 **¿Cómo es el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos?:**

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$ **b)** $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$ **c)** $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$

a) $0° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 90°$ b) $90° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 180°$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$

36 

Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$

37 **Sean *A*, *B* y *C* los vértices de un triángulo. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?**

$\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (4, -5)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -1) \cdot (4, -5) = 17$

Ninguno de los tres productos escalares es cero, luego ningún par de vectores es perpendicular.

Los lados no son perpendiculares. Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

38 **Sean *A*, *B*, *C* y *D* los vértices de un cuadrilátero. Señala, en cada caso, las condiciones que deben cumplir los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$ para que el cuadrilátero *ABCD* sea un:**

a) Cuadrado. **b) Paralelogramo.** **c) Trapecio isósceles.** **d) Trapecio escaleno.**

a) Lados iguales y perpendiculares:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b) Lados iguales dos a dos:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

c) Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos y con el mismo módulo:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$; $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$

d) Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos y con distinto módulo:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$; $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{DA}|$

39 **Sean $\vec{a}(-6, 8)$ y $\vec{b}(3, 4)$. Halla, en cada caso, un vector $\vec{c}(x, y)$ perpendicular a $\vec{b}$ tal que:**

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ **b)** $|\vec{c}| = 1$ **c)** $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{36+64} = 10$; $|\vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5$

Un vector $\vec{c} \perp \vec{b}$ es de la forma $\vec{c} = k \cdot (-4, 3)$.

$\vec{c} = k(-4, 3) = 10 \cdot \frac{1}{5}(-4, 3) = (-8, 6)$

b) $\vec{c} = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdot (-4, 3) \cdot (-6, 8) = 24k + 24k = 48k = 4 \rightarrow k = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

$\vec{c} = \frac{1}{12}(-4, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

40 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b, en cada caso, de modo que:**

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ **y** $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ **y** $|\vec{v}| = 17$

a) $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1 + a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Soluciones: $a = -3,\ b = -45;\ a = 3,\ b = 45$

b) $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Soluciones: $a = -\dfrac{1}{15},\ b = -8;\ a = 1,\ b = 8$

41 **Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.**

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} &= -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

42 **Calcula la proyección de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sabiendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°$.**

Por ser $|\vec{u}| = |\vec{v}| \rightarrow cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \dfrac{1}{2}\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 22°\ 30'$

$$proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{|\vec{u} + \vec{v}|^2}\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})}\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) =$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2}\ cos\ 22°\ 30' = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4}\ cos\ 22°\ 30' =$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \cdot 0{,}92 \approx 3{,}4$$

43 **De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\,|\vec{v}|\ cos\ 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cos\ 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

44 **Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(3/2, 4)$ y $\vec{b}(5, 0)$.**

$$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 16 = \frac{73}{4}$$

$$|\vec{b}|^2 = 25$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = k^2\vec{a} \cdot \vec{a} - k\vec{a} \cdot \vec{b} + k\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = k^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = k^2\,\frac{73}{4} - 25$$

Este producto erscalar tiene que ser cero, luego:

$$k^2\,\frac{73}{4} - 25 = 0 \rightarrow k = \frac{10}{73}\sqrt{73};\; k = -\frac{10}{73}\sqrt{73}$$

45 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.**

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

46 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

$$(*)\ \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

47 **Sea $B(\vec{x}, \vec{y})$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x} + \vec{y}|$ y $|\vec{x} - \vec{y}|$.**

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| + 0 + |\vec{y}| = 2 \rightarrow |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| - 0 + |\vec{y}| = 2 \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{2}$$

48 **Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Razonando como en el problema guiado número 2, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 3^2$$

$$25 = 16 + 24\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 9$$

$$\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{25 - 25}{24} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 90°$$

49 Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 45° \to 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$\to 14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \to \frac{14+2x}{10} = \sqrt{1+x^2} \to$$

$$\to \frac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \to \frac{49+x^2+14x}{25} = 1 + x^2 \to$$

$$\to 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \to 24x^2 - 14x - 24 = 0 \to$$

$$\to 12x^2 - 7x - 12 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

50 Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.

Llamamos $\vec{u} = (x, y)$ al vector buscado:

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{a}}) = 30° \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \cos 30° = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{3} = x + y\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: $x = 0, y = 1$; $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$

Por tanto: $\vec{u}_1 = (0, 1)$; $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

51 Determina x para que los vectores $\vec{u}(x, 1)$ y $\vec{v}(x, 0)$ formen un ángulo de 30°.

$$\cos 30° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \to 4x^2 = 3(x^2+1) \to x = \pm\sqrt{3}$$

52 Halla un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 60° con el vector $\vec{b}(2, 2\sqrt{3})$ y tenga como módulo la mitad del módulo de $\vec{b}$.

$\vec{a} = (x, y)$

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60° \\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}|\vec{b}| \end{cases} \to \begin{cases} \cos 60° = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4+12}} \\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4+12} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{4\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 1 = \dfrac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2 = x + \sqrt{3}y \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to x = -1, y = \sqrt{3};\ x = 2, y = 0$$

Soluciones: $\vec{a}_1 = (-1, \sqrt{3})$; $\vec{a}_2 = (2, 0)$

53 De una base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

* ***Mira el problema resuelto número 1.***

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) =$$

$$= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7$$

54 **Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector $\vec{b}$ como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que $\vec{a}$ y otro ortogonal a $\vec{a}$.**

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, donde:

- $\vec{x}$ tiene la misma dirección de $\vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Entonces:

$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = 3 \\ h = -1 \end{array}$$

Los vectores pedidos son $\vec{x}(3, 6)$ e $\vec{y}(2, -1)$.

55 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \rightarrow 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

56 **Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$.**

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

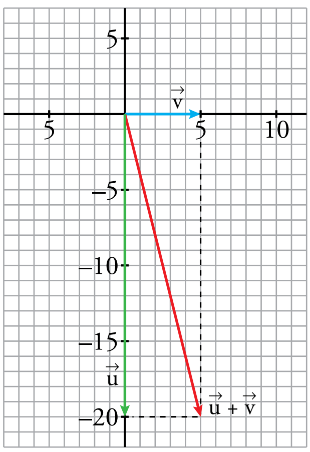
- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} = (b_1c_1 + b_2c_2)\,(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\,(b_1, b_2) =$$
$$= ((b_1c_1 + b_2c_2)\,a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)\,a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)\,b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)\,b_2) =$$
$$= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) =$$
$$= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) =$$
$$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)$$

- Calculamos ahora:

$$[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}] \cdot \vec{c} = (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) =$$
$$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\,c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\,c_2 =$$
$$= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0$$

57 **Una barca se desplaza por un río en dirección sur a una velocidad de 20 km/h. Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿en qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?**



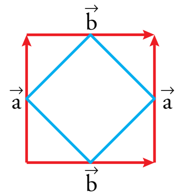
La velocidad es $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{400 + 25} = 5\sqrt{17}$

La dirección es $(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}})$. Calculemos este ángulo:

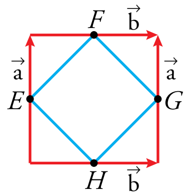
$$\cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{20}{5\sqrt{17}} \approx 0{,}97 \rightarrow (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) \approx 14°\ 4'\ 11''$$

Se mueve en dirección sureste con 14° 4' 11'' respecto de la dirección sur.

58 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.**



** Mira el problema resuelto número 5.*



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\end{array}\right\} \to \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\end{array}\right\} \to \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{EH}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ |\overrightarrow{EF}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2\end{array}\right\} \to |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{EF}|$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} =$$

$= -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 0$ porque el polígono original era cuadrado y, por tanto, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Como los otros dos lados son paralelos a estos, también son perpendiculares entre sí. Luego los lados del polígono $EFGH$ miden lo mismo, los opuestos son paralelos y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, el polígono $EFGH$ es un cuadrado.

Página 185

Cuestiones teóricas

59 **Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:**

a) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ **b)** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ **c)** $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot\vec{c}$ **d)** $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$

a) Número. b) Vector. c) Número. d) Número.

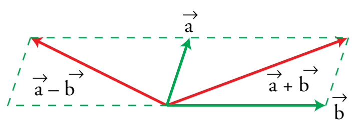
60 **Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ es una base de los vectores del plano, señala cuáles de los siguientes pares de vectores pueden ser otra base:**

a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$ **b)** $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ **c)** $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ **d)** $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que $3\vec{a}$ tiene la dirección de $\vec{a}$ y $-2\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{b}$ (que, por ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no es la misma).

b) No, pues $-\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{a} + \vec{b})$, luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).

c) Sí, pues tienen distinta dirección.



d) No, pues tienen la misma dirección al ser $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$.

61 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **c)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ **d)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\,|\vec{a}||\vec{b}|$

a) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 1 \;\to\; (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0°$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \;\to\; (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 90°$

c) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -1 \;\to\; (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 180°$

d) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0{,}5 \;\to\; (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60°$

62 **Busca algunos ejemplos con los que se vea que:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ no implica que } \vec{b} = \vec{c}$$

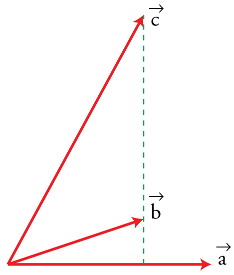
Considera los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del dibujo de la derecha:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot proy_{\vec{a}}(\vec{b})$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot proy_{\vec{a}}(\vec{c})$

Como ambas proyecciones coinciden: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

Y, sin embargo: $\vec{b} \neq \vec{c}$



63 **Prueba, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces:**

$$\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c}), \quad m, n \in \mathbb{R}$$

Hay que probar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \to \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \qquad\quad \vec{a} \perp \vec{c} \to \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \to \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

64 **Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, entonces se verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \to \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \to \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \to \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \to \vec{a} \perp \vec{c}$$

65 **Justifica por qué $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.**

$|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})| = \left|\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \le 1$ porque el coseno de un ángulo, en valor absoluto, siempre es menor o igual que 1.

Luego, pasando el denominador (que siempre es positivo) al segundo miembro:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$$

Para profundizar

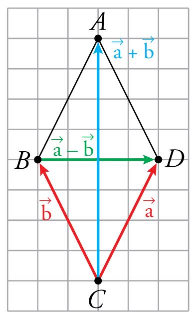
66 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector determina un par de lados paralelos).**

a) Expresa las diagonales del rombo en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

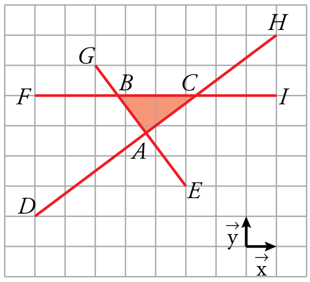
b) Demuestra vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.

a) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ porque los lados de un rombo tienen la misma longitud.



67 **Halla los ángulos interiores del triángulo *ABC*.**



Observa que puedes expresar estos ángulos como ángulos entre vectores. Las coordenadas de estos vectores las obtendrás expresándolos como combinación lineal de la base $B = (x, y)$.

$\overrightarrow{DH} = (8, 6)$; $\overrightarrow{EG} = (-3, 4)$

$\hat{A} = \left(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}\right)$

$$\cos \hat{A} = \cos \left(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}\right) = \frac{(8,6) \cdot (-3,4)}{|(8,6)||(-3,4)|} = 0 \to \hat{A} = 90°$$

$\overrightarrow{HD} = (-8, -6)$; $\overrightarrow{IF} = (-8, 0)$

$\hat{C} = \left(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}\right)$

$$\cos \hat{C} = \cos \left(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}\right) = \frac{(-8,-6) \cdot (-8\,0)}{|(-8,-6)||(-8,0)|} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$\hat{C} = 35°\ 52'\ 11''$

$\hat{B} = 90° - 35°\ 52'\ 11'' = 54°\ 7'\ 49''$

68 **Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, definimos el vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ como el vector $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Calcula analítica y gráficamente este vector si:**

a) $\vec{u}(3, 4)$ y $\vec{v}(3, -4)$ b) $\vec{u}(8, 6)$ y $\vec{v}(2, -1)$

¿Existe alguna relación entre el sentido de este vector y el ángulo $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$?

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0, 0)$

b) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{5}\, \frac{(8,6) \cdot (2,-1)}{10\sqrt{5}} = 1$

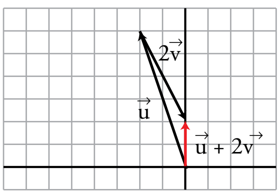
Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

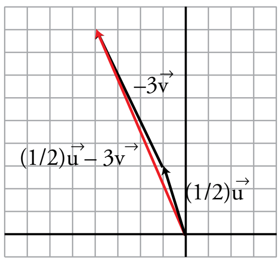
Si el ángulo es agudo, $proy_{\vec{u}}(\vec{v})$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, si el triángulo es obtuso, tiene sentido contrario a $\vec{u}$.

Autoevaluación

1 **Se consideran los vectores $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$.**

Calcula gráficamente y utilizando coordenadas, $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$.





$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) = (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$

$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)$

2 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60°. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$ **c)** $proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c) $proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de los vectores de la base $B = ((-2, 3), (-1, 5))$.**

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \to -9 = -7k + 5 \to k = 2 \end{array}$$

$s = 1 - 4 = -3$

Por tanto: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$

$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4 **Consideramos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyas coordenadas respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:**

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

5 **Considera el vector $\vec{u}(3, -4)$. Calcula:**

a) Un vector paralelo a $\vec{u}$ de módulo 1. **b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ de módulo 2.**

a) $|\vec{u}| = 5$

$\vec{v} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} = 2 \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

6 **Sea $\vec{u}(-3, k)$. Calcula k de forma que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$. **b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a 5.**

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \to k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \to 9 + k^2 = 25 \to k = \pm 4$

7 **Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.**

$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = cos\,60° = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \to x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \to 1 + y^2 = 4 \to y^2 = 3 \to y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

8 **Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de $\vec{v}$.**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$(x, y) \bullet (8, 6) = 8x + 6y = 0$$

$$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \to x^2 + y^2 = 25$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{4}y \\ \dfrac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \to \dfrac{25}{16}y^2 = 25 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4 \end{array}$$

$$y = 4 \to x = -3$$

$$y = -4 \to x = 3$$

Hay dos soluciones: $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

9 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1 \to |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3 \to |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$