

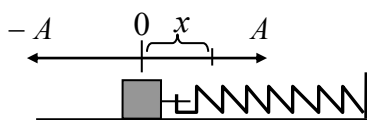
TEMA 4: OSCILACIONES.

1- MOVIMIENTO VIBRATORIO HARMÓNICO SIMPLE: ELONGACIÓN, VELOCIDADE E ACELERACIÓN.

Existen certos tipos de movementos chamados de *vaivén* que se orixinan ó separar certos corpos da súa posición de equilibrio. Caracterízanse por estar sometidos a unha **aceleración variable proporcional ao desprazamento respecto da posición de equilibrio e dirixida cara esta** ($a = -Kx$). Este movemento é ademais *periódico*, polo que se coñece como *vibratorio*.

Un movemento destas características constitúe un oscilador harmónico. Exemplos deste movemento son un péndulo cando realiza pequenas oscilacións ou unha masa suxeita a un muelle cando a separamos da súa posición de equilibrio e logo a soltamos (se a masa está apoiada nunha superficie horizontal, considérase que non hai rozamento).

CONCEPTOS RELACIONADOS CO M.H.S:



-Elongación: Distancia á que se atopa a partícula respecto da posición de equilibrio nun instante determinado. Representase por x se o movemento é horizontal, ou por y cando o movemento é vertical.

-Amplitude: É a elongación máxima. Representase por A .

-Periodo(T): Tempo que tarda a partícula en realizar unha oscilación completa.

-Frecuencia: número de oscilacións por segundo: $f = \frac{1}{T}$

Imos agora a deducir a ecuación da posición para o M.H.S a partir da súa condición, que é:

$$a = -Kx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -Kx \Rightarrow dv = -Kxdt; \text{ multiplica mos por } dx \text{ a ambos lados : } dvdx = -Kx dxdt;$$

pasamos dt para o outro lado e nos queda :

$$dv \frac{dx}{dt} = -Kx dx \Rightarrow v dv = -Kx dx; \int v dv = -K \int x dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} + cte = -K \frac{x^2}{2} + cte';$$

multiplica ndo todo por 2 e pasando tódalas constantes para a dereita queda : $v^2 = -Kx^2 + cte$.

Sabemos que cando $v = 0$ $x = \pm A$, entón : $0 = -KA^2 + cte \Rightarrow$

$$cte = KA^2; v^2 = -Kx^2 + KA^2 \Rightarrow v^2 = KA^2 - Kx^2; v^2 = K(A^2 - x^2) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{K} \sqrt{A^2 - x^2}; \frac{dx}{dt} = \sqrt{K} \sqrt{A^2 - x^2}; \text{ reordenand o : } \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{K} dt; \text{ integrando :}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{K} \int dt. \text{ Dividindo numerador e denominador por } A \text{ na 1ª integral e reordenand o :}$$

$$\int \frac{dx/A}{\sqrt{1 - (x/A)^2}} = \sqrt{K} \int dt \Rightarrow \arcsen \frac{x}{A} \left(\text{ou } \arccos \frac{x}{A} \right) + cte = \sqrt{K} t + cte';$$

$$\text{pasando a cte para a dereita : } \arcsen \frac{x}{A} = \sqrt{K} t + cte_1 \left(\text{ou } \arccos \frac{x}{A} = \sqrt{K} t + cte_2 \right) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{A} = \sen(\sqrt{K} t + cte_1) \left(\text{ou } \frac{x}{A} = \cos(\sqrt{K} t + cte_2) \right) \Rightarrow x = A \sen(\sqrt{K} t + cte_1) \text{ ou } x = A \cos(\sqrt{K} t + cte_2)$$

As dúas expresións anteriores son solución da ecuación diferencial $a = -K x$ pero diferéncianse no valor da cte que non ten o mesmo valor para as dúas expresións:

$cte_1 = cte_2 + \pi/2$ ou $cte_2 = cte_1 - \pi/2$ polo que, as solucións son:

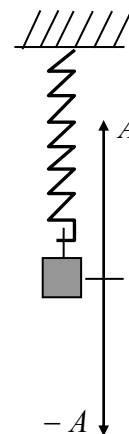
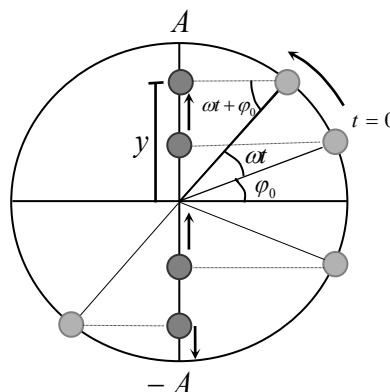
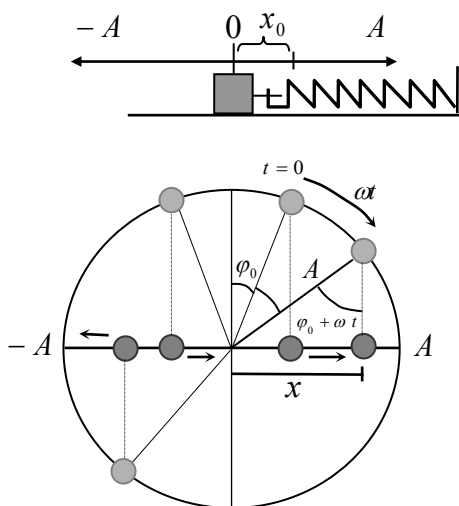
$x = A \sin(\sqrt{K} t + cte)$ ou $x = A \cos(\sqrt{K} t + cte - \pi/2)$. Ao longo deste tema imos empregar a primeira expresión, aínda que poderíamos empregar tamén a do coseno.

Cando o movemento sexa vertical empregaremos: $y = A \sin(\sqrt{K} t + cte)$

RELACIÓN DO M.H.S CO MOVEMENTO CIRCULAR UNIFORME.

Se facemos $\sqrt{K} = \omega$ podemos supoñer unha partícula auxiliar imaxinaria que describe un movemento circular uniforme con velocidade ω . A súa proxección sobre o eixe horizontal (ou vertical) indícanos en cada instante a posición da partícula que oscila.

$x = A \sin(\omega t + cte)$ A cte denomínase fase inicial e represéntase por φ_0 . Indica a posición da partícula cando $t=0$. $x_0 = A \sin \varphi_0$. Pode ser que $\varphi_0 = 0$. Quédanos entón:



Elongación:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Velocidade:

$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Imos ver cal é a relación entre x e v:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ x^2 &= A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \frac{v^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \Rightarrow$$

$\frac{v^2}{\omega^2} + x^2 = A^2 \Rightarrow v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$; $v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$; tomando a

raiz positiva, nos queda: $v = \omega \sqrt{(A^2 - x^2)}$ como xa vimos máis enriba.

Aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{a = -\omega^2 x} \text{ como xa temos visto anteriormente.}$$

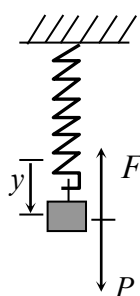
Nota: Empregando a función coseno na Ec da elongación chegaríamos as mesmas conclusións.

2- DINÁMICA DO M.H.S

Unha partícula que describe un movemento harmónico simple sabemos que está sometida a unha forza que ven dada pola lei de Hooke:

$\boxed{F = -Kx}$. K denomínase *cte elástica* e a súa unidade no S.I é $\frac{N}{m}$. Esta cte é distinta (aínda que deriva dela) da que vimos na pregunta anterior relacionada coa aceleración: $a = -Kx$. As unidades de K serían s^{-2} ou $\frac{N}{Kg \cdot m}$

Se penduramos unha masa dun muelle, este sofre un alongamento ata que a forza elástica compensa o peso do corpo:

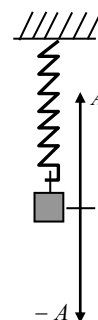


A masa está en equilibrio, logo:

$$\sum F = 0 \Rightarrow Fe - P = 0 \Rightarrow Fe = P \quad Ky = mg \Rightarrow \boxed{K = \frac{mg}{y}}$$

Así determinamos a cte elástica polo **método estático**.

Se agora separamos un pouco a masa da súa posición de equilibrio e a soltamos, comezará a oscilar describindo un movemento harmónico simple tal como se mostra na figura da dereita.



Neste caso unicamente se ten en conta para a oscilación a forza recuperadora (elástica). Aplicando o 2º principio de Newton de novo, teremos agora:

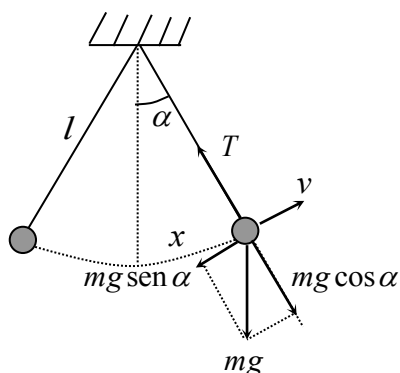
$$\sum F = ma \Rightarrow Ky = m\omega^2 y; \text{ eliminando } y \Rightarrow \boxed{K = m\omega^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{K} \Rightarrow \frac{K}{m} = K.$$

$$\boxed{K = \frac{4\pi^2 m}{T^2}}$$

Medindo o período dunha oscilación podemos determinar a cte elástica polo **método dinámico**.

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

3- PÉNDULO SIMPLE



O péndulo simple consiste nunha esfera de masa “m” colgada dun fío inextensible e de masa desprezable. Para pequenas oscilacións compórtase como un M.H.S.

Descompoñemos o peso en dúas compoñentes: Unha paralela a Tensión e outra perpendicular.

Deste xeito: $T = mg \cos \alpha$ quedando como única forza que actúa sobre o péndulo $F = -mg \sin \alpha$ que, como vemos cumpre as funcións da forza elástica no muelle pois trátase dunha forza restauradora que acada os valores máximos nos extremos e é nula na posición de equilibrio.

Para oscilacións pequenas e se traballamos co ángulo en radiáns temos que: $mg \sin \alpha \cong mg \alpha$ (comprobar).

Tendo en conta a relación entre a lonxitude dun arco e o ángulo:

$$\alpha = \frac{x}{l} \Rightarrow F = -mg \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l} x = -cte x.$$

Comparándoo co oscilador armónico: $F = -Kx$, temos:

$$\frac{mg}{l} = K \Rightarrow \frac{mg}{l} = m\omega^2 \Rightarrow \frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

3.1 ESTUDO ENERXÉTICO DO PÉNDULO

O péndulo, cando se atopa no punto máis elevado só ten enerxía potencial gravitatoria. Empregamos a expresión: $E_p = m \cdot g \cdot h$

Toda a enerxía mecánica é potencial.

Cando pasa pola posición máis baixa só ten enerxía

cinética: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Toda a enerxía mecánica é Cinética.

En calquera outro punto vai ter as dúas enerxías:

$$E_m = E_c + E_p$$

4- ENERXÍA DO OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLE.

4.1- ENERXÍA CINÉTICA.

A enerxía cinética dunha partícula de masa m que describe un M.H.S será:

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Como deducimos máis arriba, $v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$ polo que:

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2); \quad E_c = \frac{1}{2} K (A^2 - x^2) \Rightarrow \text{Anúlase cando } x = \pm A$$

4.2- ENERXÍA POTENCIAL ELÁSTICA.

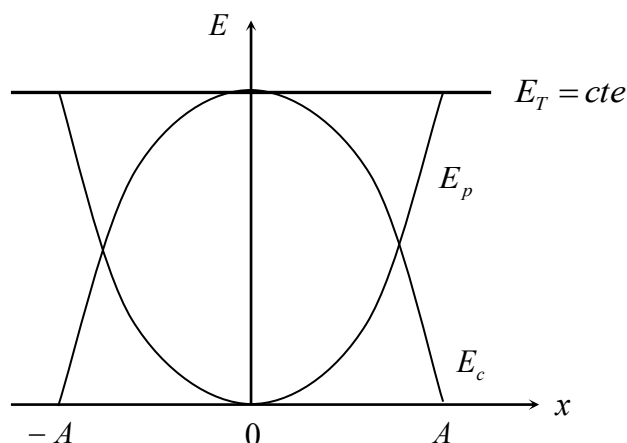
Como o oscilador harmónico está sometido a unha forza conservativa de carácter central, vai existir unha enerxía potencial elástica.

Definimos a enerxía potencial elástica como o traballo que hai que facer sobre a masa situada na posición de equilibrio ($x = 0$) para separala unha distancia x :

$$E_{p_e} = W_{0 \rightarrow x} = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^x Kx dx = K \int_0^x x dx = K \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x = K \left(\frac{x^2}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} Kx^2$$

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} Kx^2 \quad \text{ou} \quad E_{p_e} = \frac{1}{2} Ky^2 \Rightarrow \text{Anúlase cando } x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Se representamos gráficamente as dúas Enerxías, temos o seguinte:



A Enerxía Mecánica total será:

$$E_T = E_c + E_p$$

$$E_T = \frac{1}{2} K (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} Kx^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} KA^2 - \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Kx^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} KA^2 = cte$$

PROBLEMAS

- 1- Un corpo de 2 kg. de masa está suspendido dun resorte de masa desprezable, e prodúcese un alongamento de 20 cm
 - a) ¿Cal é a cte de recuperación do resorte?.
 - b) ¿Cal é o período de oscilación do corpo se se tira cara abaixo e se abandona a si mesmo?.
 - c) ¿Cal sería o período de oscilación dun corpo de 4 kg de masa colgado do mesmo resorte?.
- 2- Un resorte de masa desprezable estírase 10 cm cando se lle colga unha masa de 200 g. A continuación, o sistema formado polo resorte e a masa estírase coa man outros 5 cm e sóltase (no instante $t=0$ s). Calcula: a) a ecuación do movemento que describe o sistema b) a enerxía cinética e potencial cando a elongación é $y = 3$ cm. Dato $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ **Sol:** a) $y = 0,05\text{sen}(9,9t + 3\pi/2)$ b) $8,82 \cdot 10^{-3} \text{ J}$; $1,6 \cdot 10^{-2} \text{ J}$
- 3- A forza máxima que actúa sobre unha partícula que realiza un movemento harmónico simple é $2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ e a enerxía total é de $5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$. a) Escribe a ecuación do movemento desa partícula se o período é de 4 s e a fase inicial é de 30° ; b) ¿canto vale a velocidade ao cabo de 1 s de comenza o movemento?
- 4- Unha masa de 0,05 kg realiza un M.H.S. segundo a ecuación $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$. As súas velocidades son 1 m/s e 2 m/s cando as súas elongacións son, respectivamente, 0,04 m e 0,02 m. Calcula: a) o período e a amplitude do movemento; b) a enerxía do movemento oscilatorio e a enerxía cinética e potencial cando $x = 0,03 \text{ m}$.
- 5- Dun resorte elástico de constante $k = 500 \text{ N/m}$ colga unha masa puntual de 5 kg. Estando o conxunto en equilibrio, desprázase a masa 10 cm, deixándoa oscilar a continuación libremente. Calcula: a) a ecuación do movemento harmónico que describe a masa puntual; b) os puntos nos que a aceleración é nula.
- 6- Unha partícula de 5 g está sometida a unha forza do tipo $F = -kx$. No momento inicial pasa por $x=0$ cunha velocidade de 1 m/s. A frecuencia do movemento resultante é de $2/\pi \text{ Hz}$. Acha:
 - a) aceleración no punto de máxima elongación positiva;
 - b) enerxía cinética en función do tempo.**Solución:** a) $a = -4 \text{ m/s}^2$; b) $E_c = 2,5 \cdot 10^{-3} \cos^2 4t \text{ J}$
- 7- Unha partícula describe un movemento oscilatorio harmónico simple, de xeito que a súa aceleración máxima é de 18 m/s^2 e a súa velocidade máxima é de 3 m/s. Atopa:
 - a) A frecuencia de oscilación da partícula
 - b) A amplitude do movemento.**Solución:** a) $f = 3/\pi \text{ s}^{-1}$ b) $A = 0,5 \text{ m}$
- 8- Se un oscilador harmónico se atopa nun instante dado nunha posición x que é igual á metade da súa amplitude ($x = A/2$), a relación entre a enerxía cinética e potencial é:
 - a) $E_c = E_p$; b) $E_c = 2E_p$; c) $E_c = 3E_p$.
- 9- Un péndulo simple oscila cunha elongación de 18° , desenvolvendo 10 oscilacións por segundo. Tomando como instante inicial a posición de equilibrio: a) escribe a súa elongación en función do tempo; b) determina o seu período de oscilación na Lúa, onde a gravidade é aproximadamente $1/6$ da terrestre.
- 10- Unha butaca está montada sobre un resorte. Cando se senta unha persoa de 75 kg, oscila cunha frecuencia de 1 Hz. Se sobre ela se senta agora outra persoa de 50 kg, a) cal será a nova frecuencia de vibración?; b) canto descenderá a butaca cando alcance o equilibrio? $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- 11- Unha partícula de 1 mg de masa executa un movemento oscilatorio harmónico expresado pola ecuación: $x = A \cdot \text{sen}(\omega t)$ e con un período de 0,01 s. Cando $t = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, a velocidade vale $v = 31,4 \text{ cm/s}$. Calcula: a) A amplitude do movemento; b) A enerxía total.
 Solución: $5,58 \cdot 10^{-4} \text{ m}$; $6,63 \cdot 10^{-8} \text{ J}$
- 12- Un obxecto realiza un movemento harmónico simple. Cando se atopa a 3 cm da posición de equilibrio a súa velocidade é de 6 m/s, mentres que se a distancia a posición de equilibrio é de 5 cm a súa velocidade é de 2 m/s. Calcula: a) a amplitude do movemento e b) a frecuencia do mesmo.
 Solución: a) $A = 5,19 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $f = 23 \text{ Hz}$.