

1

Números naturales y enteros



CONTENIDOS

- Los números naturales
- Los números enteros
- Operaciones con números enteros
 - Suma y resta de números enteros
 - Producto y división de números enteros
 - Potencia de números enteros
- Jerarquía de las operaciones
- Divisibilidad
 - Múltiplo y divisor de un número
 - Números primos y compuestos
- Descomposición de un número en factores primos
- Máximo común divisor (M.C.D.)
- Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

COMPETENCIAS BÁSICAS

- Ordenar y representar números naturales y enteros.
- Interpretar y utilizar información expresada en números naturales y enteros.
- Utilizar la simbología de las operaciones y escrituras convencionales (suma, resta, multiplicación y división).
- Realizar operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números naturales y enteros.
- Efectuar mentalmente operaciones sencillas (suma, resta, multiplicación y división) con números naturales y enteros.
- Comprender el enunciado de problemas y ejercicios distinguiendo lo que se conoce de lo que no se conoce.
- Desarrollar habilidades de relación y confianza en uno mismo para tomar decisiones en los trabajos en grupo.
- Dotar los escritos personales y escolares de un estilo sencillo y que respete la gramática (en trabajos, memorias, informes, fichas...).
- Buscar información manejando distintas vías (Internet, correo electrónico, textos, catálogos, revistas...).
- Comprender textos de tipo científico y usar la información correctamente al resolver problemas y ejercicios prácticos.

COMENZAMOS...

Los números naturales nos permiten contar, identificar y ordenar cosas. Son un conjunto de números ilimitado, pues obtenemos cualquiera de ellos sumando una unidad a su anterior. Cada uno de ellos representa una unidad en la recta numérica.

Los números naturales, sin embargo, no nos permiten dar respuesta a todas las situaciones matemáticas que nos presenta la vida diaria.

Hay situaciones en la vida que pueden ser positivas (+) o negativas (-) y dependiendo de ello los números naturales dan o no respuesta matemática. Para dar solución a estos casos aparecen los números enteros, que pueden ser positivos (+) o negativos (-), separados por el valor 0. Así, por ejemplo:

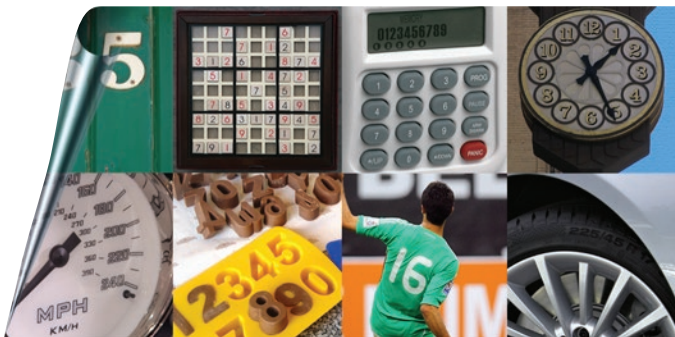
- Si yo tengo 5 € será positivo (+5 €), pero si debo 5 € será negativo (-5 €).
- Si el termómetro marca 10° sobre cero serán +10°, pero si marca 10° bajo cero serán -10°.

Los números enteros, lógicamente, incluyen a los números naturales.

Con ambos tipos de números, combinados de diferentes maneras, podemos resolver multitud de problemas y situaciones de la vida diaria. Ayudarte a recordar cómo manejarlos con agilidad y seguridad es el objetivo de esta unidad de trabajo.

LO QUE SABEMOS...

Con lo que tú ya sabes y la información que puedes recoger en tu entorno más próximo podéis realizar un debate en clase sobre las siguientes cuestiones:



- Observa tu entorno más próximo (casa, barrio, centro...) y pon dos ejemplos de números enteros positivos (+) y otros dos negativos (-).
- Recuerda casos de números singulares (opuestos, inversos, múltiplos, divisores, primos, compuestos...) y comenta en grupo sus características.
- Recuerda la regla de los signos que usamos al encontrar dos signos seguidos al operar en multiplicaciones y divisiones, y analízala con el grupo.
- Piensa en los pasos que debes seguir para operar cuando se combinan diferentes operaciones.

Al terminar esta unidad de trabajo **SERÁS CAPAZ DE...**

- Realizar operaciones con números naturales y enteros (suma, resta, multiplicación, división y potencias).
- Realizar las operaciones respetando el orden o jerarquía cuando existan operaciones combinadas.
- Distinguir si un número es primo o compuesto.
- Reconocer si un número es múltiplo o divisor.
- Obtener el M.C.D. y el m.c.m. de varios números descomponiéndolos en factores primos.
- Controlar todas las situaciones de operatoria básica para adquirir seguridad y agilidad en el cálculo.



¿Sabías que...?

Casi todos los artículos llevan en el envase un código de barras que los identifica.

Significado de las cifras del código de barras de un producto español:

84	10188	12209	8
país: España	identifican la empresa	identifican el producto	cifra de control

El código de barras de los productos españoles comienza por 84. A continuación puedes ver un ejemplo del código de barras de un producto español:



En el caso de los libros llevan el prefijo 978. A continuación puedes observar el código de barras de este libro:

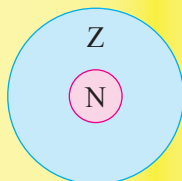


- 978: Indica que el producto es un libro.
- 84: Publicado en España.
- 7063: Editado por Editorial Donostiarra, S.A.
- 485: Número del libro para esta editorial.
- 7: Cifra de control.



Recuerda

Los números naturales están incluidos en los enteros.



¿Sabías que...?

Los **números opuestos** son aquellos que se diferencian en el signo.

Por ejemplo, 5 y -5 son opuestos.

LOS NÚMEROS NATURALES

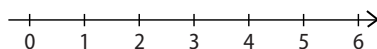
Los números naturales los utilizamos en muchos aspectos diferentes de nuestra vida cotidiana: para contar, para identificar, para ordenar, para medir, para codificar...

Se representan así:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

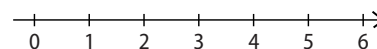
¿Cómo se ordenan?

Los números naturales se pueden representar en la recta numérica:



3 es menor que 6

$$3 < 6$$



2 es menor que 5

$$2 < 5$$

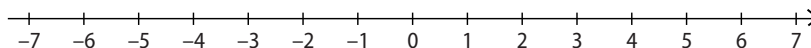
LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros son los números naturales precedidos por el signo más (+) y los naturales precedidos por el signo menos (-), además del 0, que no tiene signo. Se representan así:

$$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

¿Cómo se ordenan?

También en la recta numérica:



-2 es mayor que -5

$$-2 > -5$$

2 es menor que 5

$$2 < 5$$

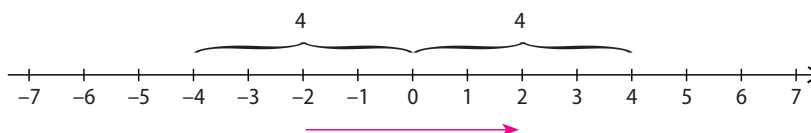
¿Qué es el valor absoluto de un número?

Es el valor numérico que resulta de suprimir a un número el signo + o - que le precede. Se escribe entre dos rayas verticales. Así, decimos, por ejemplo, que el valor absoluto de -5 es 5 y que el de $+8$ es 8:

$$|-5| = 5$$

$$|+8| = 8$$

El valor absoluto de un número nos indica la distancia de éste hasta el 0 en la recta; por eso los números que estarían en la misma distancia tienen el mismo valor absoluto.



$$|-4| = 4$$

$$|+4| = 4$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. En el aula 14 hay 6 sillas en la fila 2. ¿Qué nos indica cada número?

Solución:

El 14 nos **identifica** un grupo de alumnos, el 6 **cuenta** el número de sillas y el 2 nos expresa el **orden** que ocupa esa fila.

2º. La temperatura de un congelador desciende 3 grados cada 6 minutos hasta llegar a $-22\text{ }^{\circ}\text{C}$. ¿Cuánto tardará en llegar a $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ si, cuando lo enchufas, la temperatura es de $17\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Solución:

De $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ tenemos que ir restando $3\text{ }^{\circ}\text{C}$:

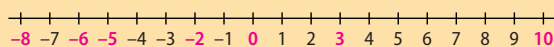
$17^{\circ} - 3^{\circ} = 14^{\circ}$	} En 9 veces conseguimos los $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$. El tiempo será de $9 \cdot 6 = 54$ minutos.
$14^{\circ} - 3^{\circ} = 11^{\circ}$	
$11^{\circ} - 3^{\circ} = 8^{\circ}$	
$8^{\circ} - 3^{\circ} = 5^{\circ}$	
$5^{\circ} - 3^{\circ} = 2^{\circ}$	
$2^{\circ} - 3^{\circ} = -1^{\circ}$	
$-1^{\circ} - 3^{\circ} = -4^{\circ}$	
$-4^{\circ} - 3^{\circ} = -7^{\circ}$	
$-7^{\circ} - 3^{\circ} = -10^{\circ}$	

3º. Ordena los siguientes números de menor a mayor y represéntalos en la recta numérica.

$-6, -8, -5, 0, 3, -2, 10$

Solución:

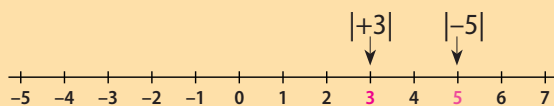
$-8 < -6 < -5 < -2 < 0 < 3 < 10$



4º. Representa en la recta numérica los números:

$|-5|$ y $|+3|$

Solución:



EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Un atleta quedó en 6ª posición en el salto de longitud. ¿Qué función realiza el número 6?

2º. ¿Cuál es la fecha (con números) de tu nacimiento? ¿Qué indica cada uno de los números?

3º. El sistema de matrículas actual en España es una combinación de cuatro números (del 0000 al 9999) y tres letras (comenzando por BBB y terminando por ZZZ), excluidas las vocales, la Ñ y la Q.

¿Cuáles de las siguientes matrículas son falsas y por qué?

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)
- f)

4º. Pedro ingresa en su libreta 18 €, pero tres días más tarde saca 15 € para una excursión y 5 € para la comida. ¿Cuál es su saldo?

5º. Escribe en tu cuaderno de trabajo las siguientes parejas de números y pon el signo menor que (<) o el signo mayor que (>) según corresponda.

- a) $8 \dots -3$
- b) $-5 \dots -9$
- c) $2 \dots -3$
- d) $-6 \dots 0$

6º. Representa en la recta numérica los números enteros:

- a) $|-2|$
- b) Mayor que 2 y menor que 4
- c) Menor que -3 y mayor que -5

7º. El montacargas de una plataforma petrolífera se encuentra a -150 metros por debajo del agua y debe subir a 25 metros sobre la superficie del agua.

¿Cuántos metros recorrerá el montacargas?





Analiza

En la vida cotidiana utilizamos el signo negativo para cuando debemos y el signo positivo para cuando tenemos.

Ejemplo:

Tengo 5 € y debo 8 €. ¿Cómo expresamos esto matemáticamente? $+5 - 8$

Si efectuamos la operación vemos que debo 3 €, lo cual se expresa así: -3 .



OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Suma y resta de números enteros

Con el mismo signo: Se suman y se deja el mismo signo.

$$+5 + 3 + 2 = +10$$

$$-7 - 4 - 1 = -12$$

Con distinto signo: Se suman por un lado los positivos y por otro lado los negativos, luego se restan ambos resultados y se pone el signo del valor que tenga mayor valor absoluto.

$$\begin{array}{r} +7 - 6 + 8 + 3 - 1 \\ \hline -7 + 18 = 11 \end{array}$$

Producto y división de números enteros

Se multiplican o dividen los números enteros y luego se añade al resultado el signo + o - según la regla de los signos.

$$(+3) \cdot (+2) = +6$$

$$(+8) : (+2) = +4$$

$$(+3) \cdot (-2) = -6$$

$$(+8) : (-2) = -4$$

$$(-3) \cdot (+2) = -6$$

$$(-8) : (+2) = -4$$

$$(-3) \cdot (-2) = +6$$

$$(-8) : (-2) = +4$$



Recuerda

Al operar debes considerar siempre la regla de los signos.

Para la multiplicación es:

$$\begin{array}{l} + \cdot + = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \\ - \cdot - = + \end{array}$$

Para la división es:

$$\begin{array}{l} + : + = + \\ + : - = - \\ - : + = - \\ - : - = + \end{array}$$

Potencia de números enteros

La potencia de base a y exponente n se escribe a^n y el resultado se obtiene al multiplicar la base por sí misma tantas veces como indica el exponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = 14275$$

Si la base es un número entero positivo, el resultado de la potencia es siempre positivo:

$$(5)^4 = 625 \quad \text{En este caso no es necesario paréntesis: } 5^4 = 625$$

Si la base es un número entero negativo, el resultado dependerá del exponente.

Exponente par, resultado positivo:

$$(-3)^4 = 81$$

Si el exponente es un número entero negativo la potencia se escribe:

Exponente impar, resultado negativo:

$$(-3)^3 = -27$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



Recuerda

$$\begin{array}{c} \text{exponente} \\ \nearrow \\ 2^n \\ \nwarrow \\ \text{base} \end{array}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Calcula:

$$5 - 8 + 7 - 2 + 3$$

Solución:

1º. Sumamos los números positivos por un lado y los números negativos por otro.

$$5 + 7 + 3 = 15; \quad -8 - 2 = -10$$

2º. Como un número es positivo y el otro negativo, se restan y se pone el signo del número cuyo valor absoluto sea el mayor.

$$15 - 10 = 5$$

2º. Si tengo 57 € y debo 15 € a mi tía y 48 € a mi padre, ¿cuánto tengo?

Solución:

$$57 - 15 - 48 = 57 - 63 = -6$$

¿Qué significa el -6?

No tengo dinero, sigo debiendo.

3º. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4)$

b) $(-30) : (+5)$

c) $(-40) : (+10)$

Solución:

a) $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4) = (+6) \cdot (+4) = +24$

b) $(-30) : (+5) = -6$

c) $(-40) : (+10) = -4$

4º. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3 - 2 + 4 - 8 + 5 - 3$ c) $(-3)^2$

b) $(-2)^5$ d) $(-5)^3$

Solución:

a) $3 - 2 + 4 - 8 + 5 - 3 = 12 - 13 = -1$

b) Nos fijamos en si el exponente es par o impar:

$$(-2)^5 = -32$$

c) $(-3)^2 = 9$

d) $(-5)^3 = -125$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $10 - 45 + 3 + 16$

b) $1 + 36 - 9 + 18 - 5$

c) $3 - 5 + 4 - 81 + 15$

2º. Calcula el valor de x para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $30 + x - 5 = 10$

b) $13 - 2 - x + 3 = -4$

3º. Copia en tu cuaderno de trabajo el siguiente cuadro mágico y complétalo. Los cuadros mágicos tienen la característica de que la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal da como resultado el mismo número.

3		
	4	
		5

4º. Lola está haciendo un régimen de adelgazamiento y pierde 3 kg al mes. ¿Cuánto pesaba hace dos meses si su peso actual es de 72 kg? Y dentro de 4 meses, ¿cuánto pesará?



5º. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno de trabajo y rellena los huecos sombreados del recibo:

BANCO BBB		EXTRACTO DE CUENTA	
Concepto	Cargo	Ingresos	Saldo
Saldo anterior			80 €
Recibo de teléfono	-6 €		
Recibo de agua	-32 €		
Nómina			1.216 €
Recibo de comunidad			1.158 €

- a) ¿En algún momento ha habido un saldo negativo?
- b) ¿Sabes cómo se llaman los números negativos en el banco?

6º. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-3) \cdot (-5)$

c) $(-3)^3$

e) $(-5) \cdot (-2) \cdot (-1)$

b) $(-8) : (-4)$

d) $(-4)^2$

f) $(-10) : (-2)$



¿Sabías que...?

En latín, *calculus* significa 'piedra pequeña'. Los romanos utilizaban piedras pequeñas para efectuar sus cuentas y de ahí procede la palabra *cálculo*.



Recuerda

El orden al operar es:

1. Paréntesis, corchetes y llaves
2. Potencias
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas



La numeración permite identificar multitud de cosas.

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

Cuando mezclamos las operaciones, éstas se deben resolver en un orden. ¿Cuál?

- 1º. Paréntesis, corchetes y llaves (se resuelven las operaciones que están dentro)
- 2º. Potencias
- 3º. Multiplicaciones y divisiones
- 4º. Sumas y restas

Las operaciones del mismo nivel se efectúan de izquierda a derecha.

Ejemplo sin paréntesis:

$$-15 + 10 : 5 - 32 : 4^2 + 3 - 5 \cdot 2$$

1º. La potencia:

$$-15 + 10 : 5 - 32 : 16 + 3 - 5 \cdot 2$$

2º. Las divisiones y la multiplicación:

$$-15 + 2 - 2 + 3 - 10$$

3º. Sumamos los números teniendo en cuenta sus signos:

$$-27 + 5 = -22$$

Ejemplo con paréntesis:

$$6 - (12 - 3) + (15 : 3) + 3(2 - 8 + 4 : 2)$$

1º. Las operaciones que hay dentro de los paréntesis, según el orden:

$$6 - 9 + 5 + 3 \cdot (2 - 8 + 2)$$

$$6 - 9 + 5 + 3 \cdot (4 - 8)$$

$$6 - 9 + 5 + 3 \cdot (-4)$$

2º. La multiplicación:

$$6 - 9 + 5 - 12$$

3º. Sumas y restas:

$$11 - 21 = -10$$

Debes recordar que, si el paréntesis va precedido de un signo +, no cambia el signo de los números que van en el interior.

$$+ \cdot (+) = +$$

$$+ \cdot (-) = -$$

Y si el paréntesis va precedido del signo -, sí cambia el signo de los números que van en el interior:

$$-(-) = +$$

$$-(+) = -$$

Ejemplo:

$$-(2 + 5 \cdot (-3) - 8 : 4) = -2 - 5 \cdot (-3) + 8 : 4$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Resuelve:

$$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 5^2 - 3 + 8$$

Solución:

Efectuamos en primer lugar la potencia:

$$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 5^2 - 3 + 8$$

$$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 25 - 3 + 8$$

Posteriormente multiplicamos y dividimos:

$$15 - 2 + 25 - 3 + 8$$

Y por último hacemos las sumas y las restas:

$$15 - 2 + 25 - 3 + 8 = 48 - 5 = 43$$

2º. Resuelve la operación:

$$3 \cdot (5 + 8 - 3) + 5 + 4 : (-2 + 3 - 5)$$

Solución:

Primero efectuamos las operaciones de dentro de los paréntesis:

$$3 \cdot (13 - 3) + 5 + 4 : (3 - 7)$$

$$3 \cdot (10) + 5 + 4 : (-4)$$

A continuación multiplicamos y dividimos:

$$30 + 5 - 1$$

Y para finalizar hacemos las sumas y restas:

$$30 + 5 - 1 = 35 - 1 = 34$$

3º. Opera:

$$4 \cdot (4 + 3) + 6 - [5 : (-1)] + 4 \cdot (2 - 7)$$

Solución:

Procedemos de la misma manera que en el ejercicio anterior. Primero efectuamos las operaciones de dentro de los paréntesis:

$$4 \cdot (7) + 6 - (-5) + 4 \cdot (-5)$$

A continuación efectuamos las multiplicaciones y divisiones:

$$28 + 6 + 5 - 20$$

Y para finalizar, las sumas y restas:

$$39 - 20 = 19$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Resuelve las operaciones que se indican:

a) $3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 6 : 5 - 4 \cdot 7$

b) $(35 - 17) : 6 + (12 + 5) \cdot 6$

2º. Opera estas expresiones:

a) $(-3) \cdot (8 - 13)$

b) $(2 + 5 - 6) \cdot (-2)$

c) $(-12 - 10) : (-1 - 6 - 4)$

d) $(-13 - 8) \cdot (-3 - 4)$

3º. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $13 - 40 \cdot (5 + 3 - 3) - 36 : 12$

b) $2 - 3 \cdot (-5 + 4) - 3 : 1 - 5 \cdot (4 + 48 : 2)$

c) $4 + 28 : 7 - 50 : (12 + 17 - 4)$

4º. Calcula las siguientes expresiones teniendo en cuenta las potencias:

a) $(-2)^3 \cdot (-3)^2 + (-4)^3$

b) $(-5)^2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot (2 + 3 - 7)$

c) $(-6)^3 : (-3)^3 + 8 \cdot (2 \cdot 5 - 3 : 1)$



5º. Comprueba si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:

a) $-45 : 5 \cdot (-3) = 3$

b) $12 - (-4 + 6) \cdot 3 = 30$

c) $5 + 2 \cdot (-7 + 3) = -3$

d) $(6 - 4 \cdot 3) + 18 - 6 + (-1)^5 = 9$

**Recuerda**

$$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ \underline{0 \quad C} \end{array}$$

División exacta

Resto = 0

A es MÚLTIPLO de B**(= A es DIVISIBLE por B)****B es DIVISOR de A****¿Sabías que...?**

Un **número perfecto** es aquel que es igual a la suma de sus divisores sin contar con él mismo.

$$6 = 1 + 2 + 3$$

¿Sabrías decir más números perfectos?

**Recuerda****REGLA DE LA DIVISIBILIDAD**

2	Cuando la última cifra es par o 0.
3	Cuando la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.
5	Cuando la última cifra es 0 o 5.

DIVISIBILIDAD**Múltiplo y divisor de un número**

Fíjate en el siguiente ejemplo:

Si dividimos 18 entre 2 obtenemos como cociente 9 y la división es exacta. Decimos que:

- 18 es **múltiplo** de 2 porque 2 se puede multiplicar por un número natural que nos dé 18.
- 2 es **divisor** de 18 porque 18 se puede dividir por 2 y la división es exacta.

En cambio, si dividimos 30 entre 9, la división no es exacta y, por lo tanto, 30 no es múltiplo de 9, ni 9 es divisor de 30.

Un número puede ser múltiplo y divisor de otro número; por ejemplo, 25 es múltiplo de 5 y al mismo tiempo es divisor de 25.

Números primos y compuestos

Número primo es aquel cuyos divisores son él mismo y la unidad.

Número compuesto es aquel que tiene más divisores que él mismo y la unidad.

17 es un número primo porque sólo lo podemos dividir por 17 y por 1.

12 es un número compuesto porque podemos dividirlo por 12 y por 1, y también por 2, 3, 4 y 6.

En la siguiente tabla están enumerados los números primos del 1 al 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Los números resaltados en negrita son primos, mientras que los números sombreados son compuestos.

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Factorizar un número es dividirlo entre los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13... de tal manera que las divisiones sean exactas. Este procedimiento se repite hasta que en la última división el cociente sea 1.

Ejemplo: Descomponer 120 en factores primos.

$$\begin{array}{r} 120 \overline{) 2} \\ 60 \overline{) 2} \\ 30 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 3} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Subraya los números divisibles por 5.

15, 34, 50, 85, 112, 210, 467, 500

Solución:

Son los que terminan en 0 o en 5.

15, 34, 50, 85, 112, 210, 467, 500

2º. ¿1.203 es múltiplo de 3? Razona la respuesta.

Solución:

Sí, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3:

$$1 + 2 + 0 + 3 = 6$$

3º. Busca todos los divisores de:

a) 20 b) 12

Solución:

a) $20 : 1 = 20$; $20 : 2 = 10$; $20 : 4 = 5$;
 $20 : 5 = 4$; $20 : 10 = 2$; $20 : 20 = 1$
 Los números 1, 2, 4, 5, 10 y 20 son divisores de 20.
 b) $12 : 1 = 12$; $12 : 2 = 6$; $12 : 3 = 4$
 $12 : 4 = 3$; $12 : 6 = 2$; $12 : 12 = 1$
 Los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores de 12.

4º. Factoriza los números 36 y 150.

Solución:

36		2	150		2
18		2	75		3
9		3	25		5
3		3	5		5
1		$36 = 2^2 \cdot 3^2$	1		$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

5º. Escribe los números que comprenden los factores:

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ c) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Solución:

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
 b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 7 = 504$
 c) $2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 3 \cdot 25 = 150$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Comprueba si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5, 9 o 10:

a) 204 b) 330 c) 3.960 d) 4.199 e) 2.133 f) 5.334

2º. Busca:

a) Cuatro múltiplos de 15
 b) Tres divisores de 40

3º. ¿Se pueden envasar 125 litros de aceite en bidones de 5 litros? ¿Y en bidones de 2 litros?

4º. Busca el primer múltiplo de 38 mayor que 200.

5º. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si un número es múltiplo de 15, también es múltiplo de 3 y 5.
 b) Si un número es múltiplo de 3 y 5, también es múltiplo de 16.

6º. Busca todos los números comprendidos entre 60 y 90 que sean primos.

7º. Di cuáles son primos y cuáles son compuestos:

85, -101, 111 y 215

Razona en cada caso la respuesta.

8º. Factoriza los siguientes números:

30, 12, 31, 80, 32 y 174

9º. Escribe los números que comprenden los factores:

a) $3^2 \cdot 5$
 b) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 4$

10º. Asocia en tu cuaderno de trabajo cada número con su descomposición en factores primos.

60	$3^2 \cdot 5$
45	$2 \cdot 3 \cdot 5$
8	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$
24	2^3
30	$2^3 \cdot 3$

11º. Indica cuáles de los siguientes números son primos y cuáles son compuestos. Razona la respuesta.

39, 23, 27, 121, 147, 61, 18, 53, 47, 87, 123, 144, 6

12º. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 72 c) 1.100 e) 693 g) 924
 b) 2.548 d) 1.000 f) 1.575 h) 760



Combinación de números.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

El máximo común divisor (M.C.D.) de varios números es el mayor de los divisores que tengan comunes.

Ejemplo: Calcula el M.C.D. de 12 y 16.

Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Divisores de 16: 1, 2, 4, 8, 16.

Seleccionamos los divisores comunes (1, 2 y 4) y elegimos el mayor:

4 → M.C.D.

Otro procedimiento más cómodo consiste en descomponer los números en factores primos y elegir los **factores comunes elevados a su menor exponente**.

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 & 6 & 2 \\
 & 3 & 3 \\
 & 1 & \\
 \hline
 & & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 16 & 2 \\
 & 8 & 2 \\
 & 4 & 2 \\
 & 2 & 2 \\
 & 1 & \\
 \hline
 & & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 12 = 2^2 \cdot 3 \\
 16 = 2^4
 \end{array}$$

$$\text{M.C.D. (12 y 16)} = 2^2 = 4$$



Ordenamos.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de varios números es el menor de los múltiplos comunes.

Ejemplo: Calcula el m.c.m. de 8 y 12.

Múltiplos de 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48...

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48...

Seleccionamos los múltiplos comunes de 8 y 12 (24, 48...) y elegimos el más pequeño:

24 → m.c.m. Este no es un buen método cuando los números son grandes. Como es el procedimiento general?

Otro procedimiento más cómodo consiste en descomponer los números en factores primos y elegir los **factores comunes y no comunes elevados a su mayor exponente**.

$$\begin{array}{r|l}
 8 & 2 \\
 & 4 & 2 \\
 & 2 & 2 \\
 & 1 & \\
 \hline
 & & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 & 6 & 2 \\
 & 3 & 3 \\
 & 1 & \\
 \hline
 & & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 8 = 2^3 \\
 12 = 2^2 \cdot 3
 \end{array}$$

El factor común es el 2, y elegimos el que tiene mayor exponente: 2^3 .

El factor no común es el 3, y se eleva con el mayor exponente que tiene: 3.

$$\text{m.c.m. (8 y 12)} = 2^3 \cdot 3 = 24$$



Podemos contar piezas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Calcula los divisores de 18 y 36 e indica los comunes.

Solución:

$$18 = 1, 2, 3, 6, 9, 18$$

$$36 = 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36$$

Divisores comunes de 18 y 36 son:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18$$

2º. Calcula el M.C.D. de 124 y 48.

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$124 = 2^2 \cdot 31 \quad 48 = 2^3 \cdot 3$$

Elijo los factores comunes con el menor exponente:

$$\text{M.C.D. (12, 48)} = 2^2 = 4$$

3º. Calcula el m.c.m. de 9, 24 y 18.

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$9 = 3^2 \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$

Escojo todos los factores con el mayor exponente:

$$\text{m.c.m. (9, 18, 24)} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

4º. Luis y Julio han decidido ayudar a su madre: Luis ordenará la cocina cada 8 días y Julio limpiará las ventanas cada 12 días. Si hoy han coincidido ambos en la casa, ¿cuántos días pasarán hasta que vuelvan a coincidir?

Solución:

Luis 8 = 8, 16, 24, 32, 40...

Julio 12 = 12, 24, 36, 48, 60...

$$\text{m.c.m. (8 y 12)} = 24$$

Utilizando el otro método:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2^3 \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{m.c.m. (8 y 12)} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Calcula los divisores de 48 y 60 y luego escribe los divisores comunes de los dos números.

2º. Calcula el M.C.D. de 80 y 100.

3º. Calcula el m.c.m. de:

a) 85 y 120

b) 360 y 500

4º. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 6, 9 y 12

c) 75, 90 y 105

b) 32, 40 y 48

d) 40, 180 y 760

5º. Lucía recibe cada 8 días una llamada telefónica de su amiga Pilar y cada 10 días una carta de sus amigos de Canarias, y además cada 4 días llama a sus abuelos. Hoy han coincidido las llamadas y la carta. ¿Cuántos días han de transcurrir para que vuelvan a coincidir?



6º. En dos clases de 3º hay 24 y 30 alumnos, respectivamente. Queremos formar equipos para realizar un trabajo de matemáticas del mismo número de alumnos, sin que falte ni sobre ninguno. ¿Cuántos alumnos hay en cada equipo?



7º. María visita Madrid cada 20 días y Pedro lo hace cada 30 días. ¿Cuántos días coincidirán en un año, sabiendo que coincidieron el 1 de enero?

- ¿Qué número entero está a igual distancia de -8 que de $+4$?
- Si uno de cada tres días voy a ver a mi padre y una vez a la semana voy a ver a mi abuela, sabiendo que hoy es 2 de marzo y he visitado a los dos, ¿qué día de marzo volverán a coincidir las visitas?
- Efectúa los siguientes cálculos:
 - $8 + (-3) + 5 - 3(-7) + (-2)$
 - $(3 - 7 \cdot 2) - 11 + 4 : 22$
 - $2 - 5 \cdot (-5) + 4 - 3 - 2 \cdot (-2) + 14 : 2$
 - $4 : 2 - 8(23 - 4 - 6 \cdot 3)$
- Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de 270 y 504.
- Las luces de Navidad se encienden en una calle cada 6 segundos y en otra cada 10. Si coinciden a las 10 de la noche, ¿cuántas veces coincidirán en el período de 10 a 12 de la noche?



- Queremos envasar 120 botes de mermelada de fresa y 175 botes de mermelada de mora en cajas del mismo número de botes, pero sin mezclar ambos productos en una misma caja. ¿Cuál es el mínimo número de cajas necesarias? ¿Cuántos botes irán en cada caja?
- La compañía telefónica A tiene la siguiente tarifa de llamadas:
 - El establecimiento de la llamada cuesta 60 céntimos.
 - Por cada minuto se cobran 80 céntimos.



La compañía telefónica B no cobra el establecimiento de la llamada y por cada minuto cobra 1 euro.

Ambas compañías facturan el tiempo real hablado, es decir, los minutos y los segundos.

- Si he hablado 2 minutos, ¿cuál será el coste en cada compañía?
 - Calcula el coste, en cada compañía, de una llamada que ha durado 3 minutos y 30 segundos.
 - ¿A partir de cuántos minutos es más barata la compañía A?
- Dos cuerdas miden 2.562 y 4.200 cm, respectivamente. Se desea cortar ambas cuerdas en trozos de igual longitud sin que sobre cuerda. ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener cada trozo? ¿Cuántos trozos hay de cada cuerda?
 - Escribe el número 45 como producto de 5 por la suma de dos números.



Ejercicios y problemas para ampliar

1. Realiza las siguientes sumas y restas:

a) $(-3) + (-5) - 7 + (-4) - (-3)$

b) $-1 - 1(-3 + 5 - 3) - 7$

c) $-6 + 8 - (-3 - 4 + 5) - 11$

d) $-5 - [-1 - (-7 + 2) - 5]$

e) $-9 + 13 \cdot (-2) - 9 \cdot (-3) - 3 \cdot (2 - 8)$

f) $(-3) - [5 - (3 - 2) + (-3 - 2)]$

g) $10 - 3 \cdot [-5 + 2 \cdot (8 - 4) - 3]$

h) $-3 \cdot 3 - 5 \cdot (-5 + 2) - 4 : (5 - 7)$

2. La temperatura en una ciudad a las 7 de la mañana es de 5°C bajo cero y a las 12 del mediodía es de 4°C sobre cero. ¿Cuál es la variación de temperatura en ese período de tiempo?

3. Opera:

a) $\frac{(-3) \cdot (-4)}{2}$

c) $\frac{(+15) \cdot (-3)}{(-5)}$

e) $\frac{2 - 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-5)}{-(-8) + 30 : (-6) - 3}$

b) $\frac{(-8) \cdot (-8)}{(-4)}$

d) $\frac{(-21) \cdot (+7)}{(-3)}$

f) $\frac{2 \cdot (-3 + 4 \cdot 2) - (-2 + 5)}{-7 + 3 \cdot (4 - 6 : 2 + 1)}$

4. Teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, calcula:

a) $2 - [(7 \cdot 3) - 2]$

b) $3 \cdot (6 - 2^2) + 3^2 \cdot (6 - 2)$

c) $\frac{5 + 2 \cdot 5}{2^2 + 1} + 5^2 - 5$

d) $5 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 1$

e) $\frac{3^2 \cdot 6 : 3}{2 \cdot 1 + (3 + 1)^2}$

5. Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de 180, 250 y 320.

6. Tres amigos salen del mismo punto en una pista de atletismo. Sabiendo que uno tarda 3 minutos, otro 120 segundos y el tercero un minuto y medio, ¿cuánto tiempo tardan en coincidir los tres? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno al circuito?



La actividad que inicias en este primer tema tendrá continuidad en todas las unidades de trabajo del libro. Se pretende que elabores un diccionario personal de vocabulario en un cuaderno, ordenando las palabras alfabéticamente y explicando su significado. Lo puedes decorar como desees o emplear diversos colores, tipos de letra... Te ayudará a afianzar los conceptos más importantes de la unidad.

VOCABULARIO

- Valor absoluto
- Jerarquía
- Divisibilidad

- Número primo
- Número compuesto
- Múltiplo

- Divisor
- Máximo común divisor
- Mínimo común múltiplo

REPASAMOS

Después de estudiar el tema, realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios:

1. Efectúa las operaciones siguientes:

a) $2 \cdot (6 - 7) - (-2 + 1) - 1$

d) $3 \cdot (-3) - 1 + (-2) \cdot (-5)$

g) $(-12) : (-2) + 30 : (-6) - 4 \cdot 2$

b) $[5 + (-3) \cdot 2 : (-6) - (-4)] \cdot (2 - 5 \cdot 2)$

e) $5 - 2 \cdot (3 - 2^3) + 8 - 3 \cdot 2^2 : 6$

h) $8 - 6 \cdot [-5 + 4 \cdot (6 - 4) - 7] + 8$

c) $8 - 3 \cdot [4 + (-3) \cdot 2 - (-3 - 5) \cdot 3 : (-6)]$

f) $-3 \cdot [2 - 5 \cdot (-5 + 3 - 6) - 2 : (5 - 7)] - 3$

i) $(-3) \cdot 2 + 4 - (-3 - 7) : 5$

2. Sustituye el valor de a por un número, de modo que la cifra $138a$ sea:

a) Divisible por 5 pero no por 3

b) Divisible por 3 pero no por 5

3. La descomposición en factores primos de un número N es: $N = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^4 \cdot 11$. Contesta razonadamente:

a) ¿Es N múltiplo de 6?b) ¿Es 8 divisor de N ?c) ¿Es 20 divisor de N ?

4. Calcula todos los divisores de los números siguientes, haciendo previamente su descomposición en factores primos:

a) 54

b) 60

c) 150

d) 196

e) 20

5. Sustituye el valor de a por un número, de modo que la cifra $232a$ sea:

a) Divisible por 5 pero no por 10

b) Divisible por 3 pero no por 5

c) Divisible por 2 pero no por 3

6. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 294

b) 455

c) 594

d) 2.000

e) 1.666

7. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Es 294 múltiplo de 6?

b) ¿Es 49 divisor de 294?

c) ¿Es 17 divisor de 455?

d) ¿Es 594 múltiplo de 99?

8. Calcula, escribiendo la descomposición de los números en factores primos, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números:

a) 8 y 12

b) 36 y 72

c) 350, 90 y 60

d) 294 y 594

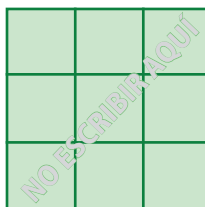
9. Tengo 204 chicles y 288 caramelos. Quiero hacer bolsas que tengan chicles y caramelos a la vez, pero es importante que todas las bolsas sean iguales. Quiero hacer el mayor número posible de bolsas. ¿Cómo lo conseguiré?

10. Tres deportistas recorren un circuito circular. El primero tarda 24 minutos en dar una vuelta completa, el segundo tarda 18 minutos y el tercero tarda 36 minutos. Si han salido a la vez, ¿cuánto tiempo tardarán en coincidir de nuevo en la salida? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno de los deportistas?

11. La rana Cloti se cayó en un pozo de 30 m de hondo. Cloti intentó salir, pero no hacía grandes progresos, ya que cada día conseguía subir 3 m pero por la noche resbalaba y bajaba 2 m. ¿Cuántos días tardó la rana en salir del pozo?



12. Dibuja en tu cuaderno un cuadrado de nueve casillas. Debes colocar en él nueve números distintos: los comprendidos entre el 1 y el 9, ambos inclusive (por lo tanto, se trata de no repetir ninguno). Una vez dispuestos, las sumas de las columnas horizontales, verticales y diagonales deben dar todas el mismo resultado.



Aplica tus conocimientos

13. Un autobús sale vacío. Observa el cuadro:

Parada	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Pasajeros que suben	35	23	18	24	37
Pasajeros que bajan	0	13	31	13	27



Utilizando números positivos y números negativos, calcula cuántos pasajeros habrá en el autobús después de la quinta parada (debes calcularlo todo de una vez, no en operaciones separadas).

14. Opera:

- a) $5 + (-3) \cdot 2 : (-6) - 2 - 5 \cdot 2$
- b) $-3 \cdot 2 - 5 \cdot (-5 + 3) - 2 : (5 - 7)$
- c) $[\sqrt{4} - 5 \cdot (-2 + 3 - 4) - 2] - 3$
- d) $5 - 2 \cdot (13 - 2) + 8 - 3 \cdot 2$
- e) $[30 - 5 \cdot (2) - (5 - 3)^2] - (4 - 6 : 3)^3$
- f) $[(2 - 3) \cdot 6 + 1] - 4 : 2 + 8$
- g) $8 - 6 \cdot [-5 + 4 \cdot (6 - 4) - 7]$
- h) $5 - 2 \cdot (3 - 2^3) + 8 - 3 \cdot 2^2 : 6$
- i) $87 - (3 \cdot (-17) + 24) - 8 : 9$

15. Efectúa las siguientes operaciones con números enteros:

- a) $[(2^0 + 3) \cdot 6 + 1] - 4 : 2 + 8$
- b) $8 - 3 \cdot [4 + (-3) \cdot 2 - (-3 - 5) \cdot 3 : (-6)]$
- c) $[-3 - 5 \cdot (-2) - (3 - 5)^2] - (4 - 6 : 3)^3$



16. Saca factor común y luego resuelve:

- a) $3 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 8$
- b) $2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5$
- c) $-3 \cdot 2 - 3 \cdot 5$

17. Calcula todos los posibles valores de a para que el número $148a$ sea:

- a) Divisible por 5 pero no por 3
- b) Divisible por 3 pero no por 5
- c) Divisible por 2 pero no por 3

18. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

- a) 180, 144 y 900
- b) 150, 42 y 132
- c) 36, 42 y 12
- d) 49, 70 y 10
- e) 12, 4 y 9

19. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán dos personas en Madrid sabiendo que el primero va allí un día de cada seis y el segundo uno de cada nueve?

20. En un árbol de Navidad hay luces rojas, verdes y azules. Las rojas se encienden cada 8 segundos, las verdes cada 20 segundos y las azules cada 10 segundos. A partir del momento en que se conectan, se encienden juntas. ¿Cuánto tiempo tardarán en volver a encenderse a la vez? Cuando haya pasado una hora, ¿cuántas veces habrán coincidido?

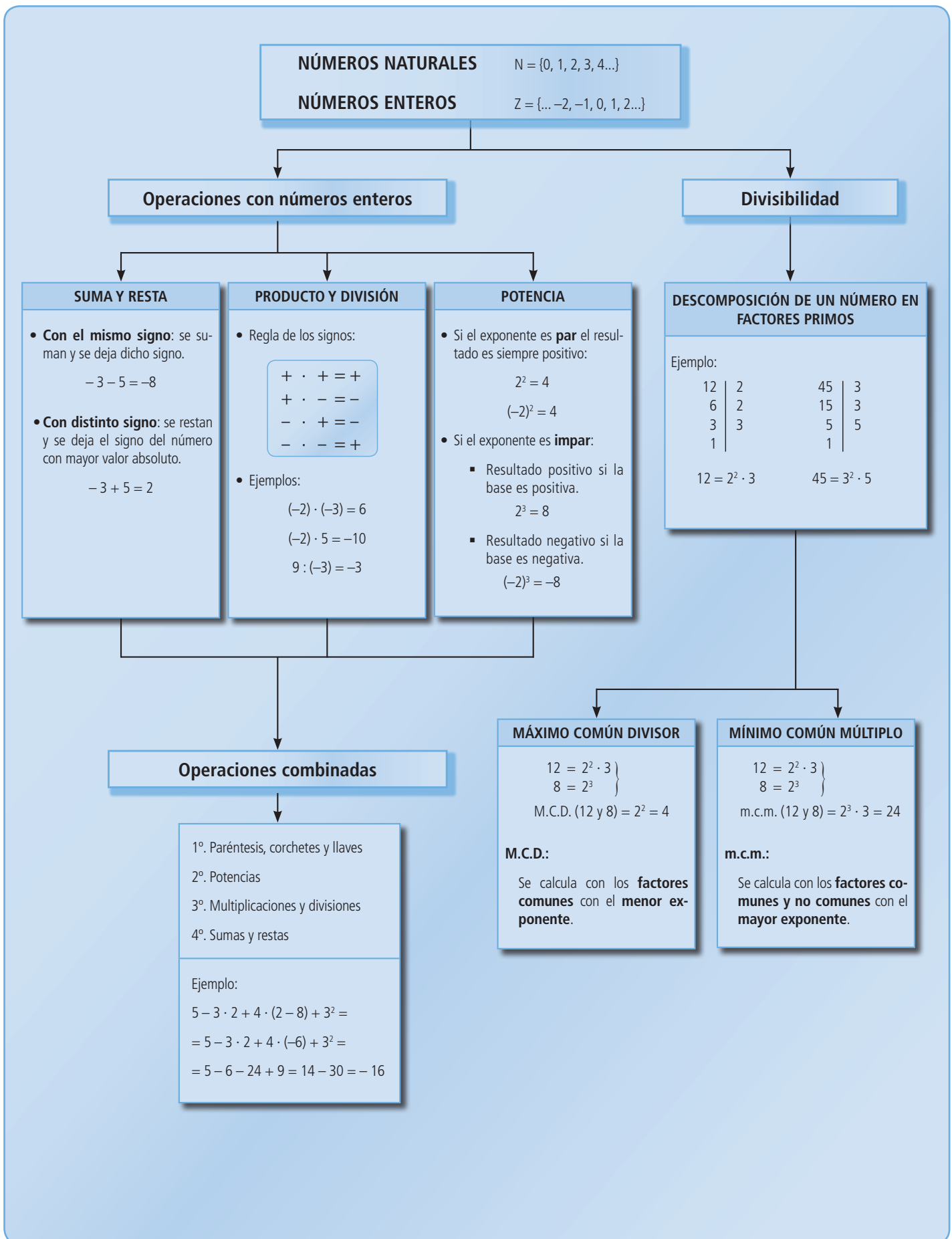
21. En la entrada de una cueva hay cuatro gusanos: A, B, C y D. El gusano A tarda 5 minutos en pasar la cueva, B tarda 10 minutos, C tarda 20 minutos y D tarda 25 minutos. Sólo disponen de una linterna, la cual tiene que ir iluminando el trayecto cada vez que pasen la cueva. La cueva es muy estrecha y como máximo pueden pasar de dos en dos, sabiendo que, si pasan dos gusanos juntos, el más rápido irá al paso del lento. ¿Cómo conseguirán pasar la cueva los cuatro gusanos en una hora?



22. Escribe el número 120 como producto de 3 por la suma de tres sumandos.

23. En un móvil has grabado cinco canciones de tres minutos y ocho canciones de cuatro minutos y medio; luego has borrado dos canciones de cinco minutos. ¿Cuántos minutos hay grabados en el móvil después de hacer todo este proceso?

24. Escribe el número (-56) como producto de un número positivo por la suma de tres sumandos.



Autoevaluación

DE CONCEPTOS

1. Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros:

$$-10, +25, -510, +120, -34, +28, -71, 0, 35$$

2. Efectúa las siguientes operaciones, teniendo en cuenta la prioridad de las operaciones:

a) $5 + (-2) + 3 - 4(-2) + 8(-8)$

b) $2 + (-3) \cdot (-7) - 5 + 4 \cdot (-8 : 2)$

c) $(5 + 3 - 2) \cdot (4 - 7 + 3) - (3 + 6 \cdot 2 - 5) \cdot 2$

d) $5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 6(-3 - 5 + 8) + 4 \cdot 5 - 23 : 2$

3. ¿Qué números están comprendidos entre 30 y 100 y son múltiplos de 7?
4. Encuentra los valores de las letras X e Y en los números siguientes para que sean divisibles por los números que se indican:

a) 257XY divisible por 2 y por 5

b) 46X3Y divisible por 3 y por 9

5. Escribe como producto de factores primos los siguientes números:

a) 105

b) 135

c) 258

6. Calcula el máximo común divisor de 550 y 700.
7. Calcula el mínimo común múltiplo de 55, 100 y 150.
8. ¿Cómo podremos partir dos cables de 30 y 50 metros en trozos iguales lo más grandes posibles sin que sobre nada?



9. En una guardería, el pediatra va a realizar chequeos cada 15 días y la psicóloga hace unas pruebas a los niños cada 20 días. Si hoy han coincidido ambos, ¿cuándo volverán a coincidir?

10. El número de participantes en la fiesta de fin de curso en un colegio es tal que se pueden agrupar de 2 en 2, de 3 en 3 y de 5 en 5. ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que es mayor que 70 y menor que 100?

DE COMPETENCIAS

Por parejas, recordad:

- La regla de los signos para multiplicación y división.
- Qué son números opuestos y cuál es el valor absoluto de un número.
- La prioridad al operar con varias operaciones a la vez.
- Las reglas de divisibilidad de 2, 3, 5 y 9.
- Qué son números primos y compuestos.
- Qué son un múltiplo y un divisor.
- Cómo se hallan el M.C.D. y el m.c.m. de varios números.

De cada una de las propuestas, planteaos entre vosotros algún ejemplo que ayude a recordar y reforzar lo aprendido. Apoyaos en los planteamientos y, si tenéis dudas, buscad ayuda en otras parejas.



1. En una estantería, los libros se pueden colocar de 4 en 4 sin que sobre ninguno, de 6 en 6 sin que sobre ninguno y de 9 en 9 sin que sobre ninguno. ¿Cuál es la mayor cantidad de libros que puede haber?
2. Tres cuerdas de 12, 30 y 42 metros, respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales, sin que sobre cuerda. ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener cada trozo? ¿Cuántos trozos haríamos?
3. Escribe el número 63 como suma de dos productos de modo que uno de los factores en cada producto sea el 7.

