

Expresións alxebraicas e polinomios

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIÓN ALXEBRAICAS

Chamamos **expresión alxebraica** a calquera expresión matemática que se constrúe con números reais, letras e as operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división xunto coas potencias.

Nunha expresión alxebraica pode haber datos non concretados; unhas veces deberemos obter os valores que “resolven” a expresión, e noutras, como na fórmula da área dun triángulo, verifícanse para calquera valor. Según o contexto, recibirán o nome de **variable**, **indeterminada**, **parámetro**, **incógnita**, entre outros.

Se nunha expresión alxebraica non hai *variables*, dita expresión non é máis que un número real. Ao fixar un valor concreto para cada *variable* dunha expresión alxebraica aparece un número real: é o **valor numérico** de esa expresión alxebraica para tales valores das indeterminadas. O **valor numérico** dunha expresión alxebraica é o que se obtén ao substituír as letras de esa expresión por determinados valores.

Exemplo: O volumen dun cilindro vén dado pola expresión alxebraica:

$$\pi r^2 \cdot h$$

na que r é o radio do círculo base e h é a súa altura. De este modo, o volumen dun cilindro cuxa base ten un radio de 10 cm e de altura ten 15 cm é igual a:

$$V = \pi 10^2 \cdot 15 = 1500\pi \text{ cm}^3$$

O valor da expresión $2a + 5$ para o caso concreto de a igual a 3 calculámolo substituíndo a por 3. Así resulta $2 \cdot 3 + 5 = 11$, e dise que o valor numérico de $2a + 5$ para $a = 3$ é 11.

Se na expresión: $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$ particularizamos as tres variables cos valores $x = 4$, $y = -1$ e

$$z = 1/2 \text{ surde o número real: } 7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{\frac{1}{2}} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$$

Nunha expresión alxebraica pode non ter sentido otorgar algún valor a certa indeterminada. En efecto, no último exemplo non é posible facer $z = 0$ (pois non se pode dividir por 0!!).

Actividades propostas

1. Escribe a expresión alxebrica que nos proporciona a área de un círculo.
2. Escribe en linguaxe alxebrica os seguintes enunciados, referidos a dous números calesqueira x e y :
 - a) A metade do oposto da súa suma.
 - b) A suma dos seus cubos.
 - c) O cubo da súa suma.
 - d) O inverso da súa suma.
 - e) A suma dos seus inversos.

3. Traduce a un enunciado en linguaxe natural as seguintes expresións alxebricas:

a) $3x + 4$ b) $\frac{x}{3} - x^3$ c) $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$ d) $\frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2}$

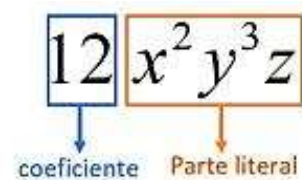
4. Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus produtos están rebaixados nun 15 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha prenda en función do que aparece na súa etiqueta.
5. O anterior comercio, nos últimos días do periodo de rebaixas, desexa desfacerse das súas existencias e para elo decidiu aumentar o desconto. Mantén o 15 % para a compra dunha única prenda e, a partir da segunda, o desconto total aumenta nun 5 % por cada nova peza de roupa, ata un máximo de 10 artigos. Analiza canto pagaremos ao realizar unha compra en función da suma total das cantidades que figuran nas etiquetas e do número de artigos que se compren.
6. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxebricas para o valor ou os valores que se indican:
 - a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.
 - b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ e $b = 4$.
 - c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.
7. Indica en cada caso o valor numérico da seguinte expresión: $10x + 20y + 30z$
 - a) $x = 1, y = 2, z = 1$
 - b) $x = 2, y = 0, z = 5$
 - c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unhas expresións alxebraicas de gran utilidade son os **polinomios**, cuxa versión máis simple e, a súa vez, xeradora deles son os **monomios**.

Un **monomio** ven dado polo produto de números reais e variables (ou indeterminadas) que poden estar elevadas a expoñentes. Chamaremos **coeficiente** dun monomio ao número (ou números) real que multiplica á **parte literal**, indeterminada ou indeterminadas.



Exemplos:

- A expresión que nos proporciona o dobre dunha cantidade: $2x$, é un monomio con unha única variable, x , e coeficiente 2.
- O volumen dun cilindro, $\pi r^2 \cdot h$, é un monomio con dúas indeterminadas, r e h , e coeficiente π . A súa parte literal é $r^2 \cdot h$.
- Outros monomios: $\frac{4}{7}x^2 \cdot y^3 \Rightarrow$ Coeficiente: $\frac{4}{7}$ e parte literal: $x^2 \cdot y^3$
 $5\sqrt{2} x y^2 z \Rightarrow$ Coeficiente: $5 \cdot \sqrt{2}$ e parte literal: $x y^2 z$
- A expresión $7xy^2 + 3xy + 2x$ está formada por tres termos, tres monomios, cada un ten un coeficiente e unha parte literal:
No primeiro, $7xy^2$, o coeficiente é 7 e a parte literal é xy^2 . O segundo, $3xy$, ten por coeficiente 3 e parte literal xy . E no terceiro, $2x$, o coeficiente é 2 e a parte literal x .

Dous monomios son **semellantes** se teñen a mesma parte literal.

Por exemplo:

Son monomios semellantes: $7xy^3$ e $3xy^3$.

Atendendo ao expoñente da variable, ou variables, adxudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo ao seguinte criterio:

- Cando haxa unha única indeterminada, o grado do monomio será o expoñente da súa indeterminada.
- Se aparecen varias indeterminadas, o grado do monomio será a suma dos expoñentes de esas indeterminadas.

Exemplos:

$3x$ é un monomio de grado 1 na variable x

$\pi r^2 \cdot h$ é un monomio de grado 3 (de grado 2 en r e de grado 1 en h)

$\frac{4}{7}x^2 y^3$ é un monomio de grado 5 en x e y (de grado 2 en x e de grado 3 en y)

$5\sqrt{2} x y^2 z$ é un monomio de grado 4 en x, y e z .

Un número real pode ser considerado como un monomio de grado 0.

Actividade proposta

8. Indica o coeficiente e a parte literal dos seguintes monomios:

a) $\frac{3}{2}x^2y^3$

b) $\frac{1}{2}a^27b4c$

Un **polinomio** é unha expresión construída a partir da suma de monomios. **O grado de un polinomio virá dado por o maior grado dos seus monomios.**

Exemplos:

$\frac{1}{5}x^2 - 7x^3 + 2$ é un polinomio (non está ordenado!) de grado 3 na variable x .

$-3y^4 + 8x^2 + 2x$ é un polinomio de grado 4 nas indeterminadas x e y .

$4x^2y^3 - 7 + 3y^2$ é un polinomio de grado 5 en x e y .

$x - 2y + 6z$ é un polinomio de grado 1 en x , y e z .

Un polinomio está **ordenado** cando os seus monomios están escritos de menor a maior grado ou viceversa. Un polinomio é **completo** se están os monomios de todos os grados, sen coeficientes nulos.

Exemplos:

$-8x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 23$ é un polinomio de grado 4 na variable x . Está ordeado e non é completo.

$7y^3 + 4y - 9$ é un polinomio de grado 3 na indeterminada y . Está ordeado e non é completo.

$z^2 - 6z + 8$ é un polinomio de grado 2 en z . Ademais, é un polinomio ordeado e completo.

$5x + 2$ é un polinomio de grado 1 en x . Ademais, é un polinomio ordeado e completo.

Valor numérico de un polinomio

Como ocorre con calquera expresión alxebraica, se fixamos ou escollemos un valor concreto para a variable dun polinomio, aparece un número real: o valor numérico do polinomio para ese valor determinado da variable. Se lle chamamos P a un polinomio, á avaliación de P en, por exemplo, o número -3 denotámola por $P(-3)$, e lemos "*p de menos tres*" ou "*p en menos tres*".

Con este criterio, se P é un polinomio cuxa indeterminada é a variable x , podemos referirnos a él como $P(x)$ ou P indistintamente. De esta maneira ponse de manifesto que un polinomio pode ser entendido como unha maneira concreta de asignar a cada número real outro número real. Neste caso $y = P(x)$ decimos que é unha función polinómica.

Exemplos:

Se avaliamos o polinomio $P(x) = -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ obteremos o número:

$$P(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

O valor do polinomio $Q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ é:

$$Q(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

Ao particularizar o polinomio $R(z) = z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta o número $R(0) = 12$.

2.2. Suma e resta de polinomios

Como un polinomio é unha suma de monomios, a suma de dous polinomios dá como resultado outro polinomio. Á hora de sumar dous polinomios, teremos en conta que só se poden sumar os monomios que teñen a mesma parte literal. As outras sumas deixáanse indicadas

Para sumar monomios: súmanse os coeficientes e deixase a mesma parte literal.

Exemplos:

- A suma dos polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ e $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ é o polinomio:

$$\begin{aligned} \left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + \left(-x^4 + 4x^2 - 5x - 6\right) &= \left(-3x^4 - x^4\right) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) = \\ (-3-1)x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right)x^2 - 5x + (2-6) &= -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4 \end{aligned}$$

- Sexa $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$ e $Q(x) = x^2 + 4x - 7$; entón:

$$P(x) - Q(x) = (5x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 - x^2) + (-3x - 4x) + (1 + 7) = 4x^2 - 7x + 8$$

- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = \underline{6abx^2 - abx}$

No seguinte exemplo sumaremos dous polinomios dispoñéndoo, axeitadamente, un sobre o outro:

$$\begin{array}{r} 4x^5 + 2x^4 + x^3 - 5x^2 + x + 4 \\ + \quad -7x^5 \quad \quad + 4x^3 + 5x^2 - 3x - 6 \\ \hline -3x^5 + 2x^4 + 5x^3 \quad \quad - 2x - 2 \end{array}$$

Actividades propostas

9. Realiza a seguinte suma de polinomios: $(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3) =$

Simplifica as seguintes expresións alxebraicas:

a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$ b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$ c)

a) $(-5x^3 + 3x) \cdot (-4x^2)$ **b)** $(3x^4 + 2x) \cdot (-4x - 5)$ **c)** $(3x^3 + 2x^2 - 2x) \cdot (4x^2 - x)$

11. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios (*para facelo sumando o oposto!*):

a) $(3x^4 + 2x) - (4x - 5) =$

b) $(4x^2 + 2x) - (x^3 + 2x^2 - 2x) =$

12. Calcula e simplifica os seguintes produtos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6) =$

b) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3) =$

c) $(3x - 4) \cdot (4x + 6) =$

Propiedade distributiva da multiplicación respecto da suma.

Cando nunha multiplicación de polinomios un dos factores ven dado como a suma de dous polinomios como, por exemplo:

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x))$$

temos dúas opcións para coñecer o resultado:

a) realizar a suma (dos dous polinomios que hai dentro) e, despois, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 6x + 7) =$$

$$3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) ou **distribuir** (aplicar a multiplicación a cada un dos sumandos) e, despois, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 6x + 7) =$$

$$3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtemos o mesmo resultado con ambos métodos.

En xeral, a **propiedade distributiva** da multiplicación respecto da suma dinos que:

$$p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Sacar factor común

Convén comentar respecto da anterior propiedade distributiva que se a lemos en sentido contrario, de dereita a esquerda, é o que comúnmente coñecemos como **sacar factor común** algo que faremos moitas veces. Esta operación consiste en extraer como factor común o monomio que se repite en todos os termos.

Exemplos: $6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$

$$5x - 5y = (x - y) \cdot 5 = 5 \cdot (x - y)$$

Actividades propostas

13. De cada un dos seguintes polinomios extrae os factores que sexan comúns a os seus monomios:

a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x^3 =$

b) $60x^4 - 30x^2 =$

c) $-12x^4 - 8x^2 + 10 =$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción ás fraccións polinómicas

Ata este momento levamos estudado a suma (e resta) e o produto de polinomios. En calquera destes dous casos o resultado sempre é outro polinomio. Cando establecemos unha **fracción polinómica** como, por exemplo:

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

o que temos é unha **fracción alxebrica**, que en xeral, non é un polinomio. (Para $x = 1$ non sería un polinomio pois o denominador vale 0 e non se pode dividir por 0)

3.2. División de polinomios

Antes de dividir polinomios, vamos a definir cómo dividir dous monomios.

Para dividir dous monomios: divídense os coeficientes e réstanse os expoñentes da parte literal.

$$\frac{ax^n}{bx^m} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot x^{n-m}$$

$$\text{Exemplo: } 12x^5 : 4x^3 = \frac{12x^5}{4x^3} = \left(\frac{12}{4}\right) \cdot x^{5-3} = 3x^2$$

Neste curso só realizaremos divisións nas cales no denominador temos un monomio que é factor común de tódolos monomios do polinomio do numerador.

Dividir polinomio entre monomio. Exemplo práctico:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

Actividade proposta

16. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

3.3. Operacións con fraccións alxebricas

Posto que tanto os polinomios como as fraccións alxebricas obtidas a partir dos polinomios son, en potencia, números reais, operaremos con tales expresións seguindo as propiedades dos números reais.

Suma ou resta. Para sumar ou restar dúas fraccións alxebricas debemos conseguir que teñan igual denominador. Unha maneira segura de logralo é ésta:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

Produto. Basta multiplicar os numeradores e denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

División. Opérase multiplicando en cruz:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Exemplo: $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{(x+2) - x \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x+2)} = \frac{x+2-x^2-3x}{x^2-3x+2x-6} = \frac{-x^2-2x+2}{x^2-x-6}$

Actividades propostas

17. Realiza os seguintes cálculos con fraccións alxebraicas:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1} + \frac{5}{2x} =$

b) $\frac{-2x}{5x^2+4x} \cdot \frac{5}{3x-2} =$

c) $\frac{x-4}{x^2+5x} \cdot \frac{x-4}{x+5} =$

18. Simplifica as seguintes expresións alxebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15} =$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2} =$

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy} =$

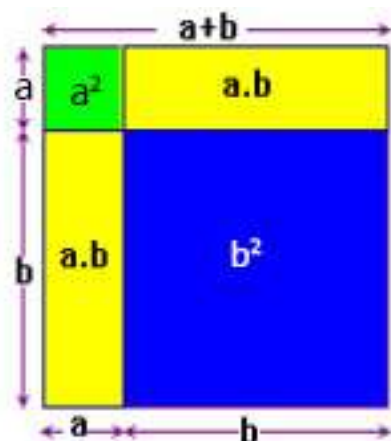
4. PRODUTOS NOTABLES DE POLINOMIOS

Neste apartado vamos a destacar unha serie de produtos concretos de polinomios que aparecen moi frecuentemente. Os Produtos notables (ou igualdades notables) son certas igualdades cuxa aplicación resulta moi útil para abreviar ou simplificar cálculos con expresións alxebraicas. As principais igualdades notables son:

Cadrado dunha suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Podémolo obter facendo a multiplicación dos dous monomios e non precisamos apréndelo de memoria:

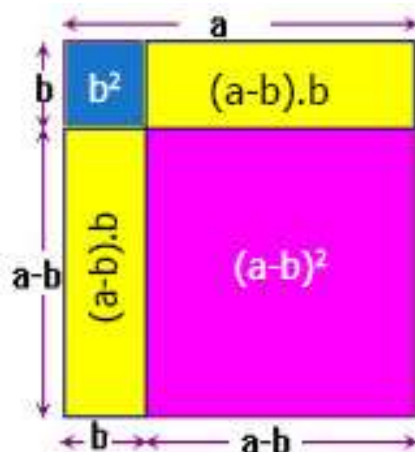
$$\begin{array}{r} a+b \\ \times \quad a+b \\ \hline +a \cdot b + b^2 \\ +a^2 + a \cdot b \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$



Cadrado dunha diferencia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Podémolo obter facendo a multiplicación dos dous monomios e non precisamos apréndelo de memoria:

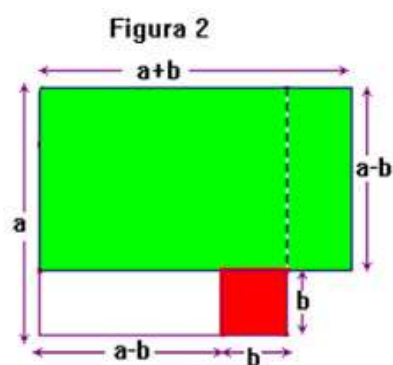
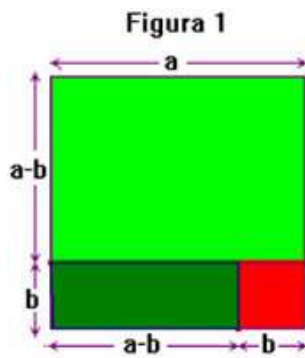
$$\begin{array}{r} a-b \\ \times \quad a-b \\ \hline -a \cdot b + b^2 \\ +a^2 - a \cdot b \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$



Suma por diferencia: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Podémos obter o resultado facendo a multiplicación dos dous monomios e non precisamos apréndelo de memoria:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times a-b \\ \hline -a \cdot b - b^2 \\ + a^2 + a \cdot b \\ \hline a^2 + 0 - b^2 \end{array}$$



Exemplo: $(a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$

Actividades propostas

19. Realiza os cálculos:

a) $(1+4a)^2 =$

b) $(-x+5)^2 =$

c) $(2x-3)^2 =$

d) $(5x+3) \cdot (5x-3) =$

20. Expresa como cadrado dunha suma ou cadrado dunha diferencia, ou unha suma por una diferencia os seguintes polinomios:

a) $a^2 + 6a + 9$

b) $4x^2 - 4x + 1$

c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$

e) $x^2 - 16$

f) $4a^4 - 81b^2$

21. Simplifica as seguintes fraccións alxebraicas:

a) $\frac{x^2-1}{3x+3} =$

b) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2-9} =$

c) $\frac{6-3a}{a^2-4} =$

Fai maxia

1. Neste exercicio vaise a presentar un *truco* mediante o cal vamos a adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxebraica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.

- Dille a un compañeiro/a que escriba nun papel un número natural e que non o mostre
- Que o multiplique por 3
- Que ao resultado anterior lle sume 18
- Que multiplique por 2 o nº obtido
- Que divida entre 6 a última cantidade
- Que ao resultado precedente lle reste o número que escribiu.
- Independentemente do número descoñecido orixinal, ¿qué número apareceu?

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudea que realizou as súas investigacións nas primeiras décadas do século XX. Noether desenvolveu un teorema que é clave para entender a física de partículas elementais e a teoría cuántica de campos. Tamén demostrou dous teoremas esenciais para a teoría da relatividade que permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

Desenvolveu o seu traballo en estruturas alxebraicas e na actualidade o calificativo **noetheriano** utilízase para designar moitos conceptos en álgebra: aneis *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espazos topolóxicos *noetherianos*, etc.

Cando intentou dar clases na Universidade de *Göttingen* o regulamento indicaba explicitamente que os candidatos debían ser homes polo que *Noether* non puido acceder á docencia universitaria. Cóntase, como anécdota, que *Hilbert* (matemático) dixo nun Consello de dita Universidade:

"non vexo por qué o sexo da candidata é un argumento contra o seu nomeamento como docente. Despois de todo non somos unha casa de baños"

De ela dixo Albert Einstein:

"No reino da Álgebra, no que os mellores matemáticos levan traballado durante séculos, ela descubriu métodos que se ten demostrado que teñen unha importancia enorme... A matemática pura é, a súa maneira, a poesía das ideas lóxicas".



EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Neste exercicio vamos a *adivñar* dous números que pensou un compañeiro/a.

Construe unha expresión alxebraica que recolla todos os pasos e, finalmente, descubre o truco.

- Solicita a un compañeiro/a que escriba nun papel, e non o mostre, dous números naturais: un de unha cifra (entre 1 e 9) e outro de dúas cifras (entre 10 e 99)
- Que multiplique por 4 o número escollido de unha cifra
- Que multiplique por 5 o resultado que obtivo
- Que multiplique o resultado anterior por 5
- Que lle sume ó anterior o número de dúas cifras que elixiu
- Se o teu compañeiro/a che di o resultado de estas operacións, ti descubres os seus dous números. Si che di, por exemplo, 467, entón sabes que o número de unha cifra é 4 e o de dúas cifras é 67, ¿por qué?

ECUACIONES DE 1º GRADO E DE 2º GRADO INCOMPLETAS

1. A linguaxe das ecuacions

Xa sabes que:

Unha **ecuación** é unha igualdade entre dúas expresións alxeбраicas que é certa para algún (ou algúns) valores das incógnitas e falsa para outros.

Polo tanto, a diferenza entre identidade e ecuación é que a identidade sempre é certa, mentres que a ecuación non.

O valor (ou valores) da incógnita que fai que a igualdade se cumpla chámase **solución** da ecuación.

Exemplo:

Se temos dúas expresións alxeбраicas: $7x + 3$ e $5x + 2$, e as unimos co signo igual obtemos unha ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

As expresións que hai a cada lado do igual chámanse **membros** da ecuación. Todas as ecuacions teñen dous membros: a expresión que está á esquerda do signo igual chámase **primeiro membro** e a que está á dereita, **segundo membro**.

As letras que conteñen as ecuacions alxeбраicas (as "*partes literais*" das súas dúas expresións) chámanse **incógnitas**, que significa literalmente "*descoñecidas*".

Se todas as letras son iguais, dise que a ecuación ten unha soa incógnita.

Exemplo:

$8x - 2 = 4x + 7$ é unha ec con unha soa incógnita, mentres que $3x + y = 5$ ou $5x - 9 = 3y$ son ecuacions con dúas incógnitas: x e y . O **grado** de unha ecuación é o maior expoñente que aparece nalgunha das súas incógnitas.

Exemplo:

$8x - 2 = 4x + 7$ é unha ecuación de primeiro grado, mentres que $2x + 4xy^2 = 1$ é unha ecuación de terceiro grado xa que o monomio $5xy^2$ ten grado 3 ($1 + 2 = 3$).

Actividades propostas

1. Copia no teu caderno a seguinte táboa e complétaa:

Ecuación	Primeiro membro	Segundo membro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica o número de incógnitas das seguintes ecuacións:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$; c) $3a + 6a^2 = 3$; d) $4x + 8x^2 = 12$

3. Indica o grado das seguintes ecuacions:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

2. Ecuacions equivalentes. Resolución de ecuacións

Xa sabes que:

Unha **solución** dunha ecuación é un número que, cando a incógnita toma ese valor, verifica se a igualdade, é dicir, os dous termos da ecuación valen o mesmo.

Algunhas ecuacións só teñen unha solución, pero outras poden ter varias ou infinitas.

Resolver unha ecuación é atopar todas as súas posibles solucións numéricas.

Para resolver unha ecuación o que se fai habitualmente é transformala noutra ecuación **equivalente** máis sinxela.

Ecuacións equivalentes son as que teñen as mesmas solucións.

Exemplo:

$2x - 9 = 15$ é equivalente a $2x = 24$, posto que a solución de ambas ecuacións é $x = 12$.

Para obter ecuacións equivalentes téñense en conta as seguintes propiedades:

Se se **suma** ou **resta** aos dous membros dunha ecuación unha mesma cantidade, obtense unha ecuación equivalente.

Se se **multiplican** ou **dividen** os dous membros dunha ecuación por unha mesma cantidade (distinta de cero), obtense unha ecuación equivalente.

En xeral:

Para resolver unha ecuación debemos seguir os seguintes pasos:

- 1 Quitar paréntesis.
- 2 Quitar denominadores.
- 3 Agrupar os termos coa variable nun membro e os termos independentes no outro.
- 4 Reducir os termos semellantes.
- 5 Despexar a incógnita.

Actividades resoltas

1. Resolver $2(x+1) - 3(x-2) = x - 6$

1º Quitamos paréntesis.

$$2x + 2 - 3x + 6 = x - 6$$

2º Agrupamos os termos en x nun membro e os termos independentes no outro.

$$2x - 3x - x = -6 - 2 - 6$$

3º Reducimos os termos semellantes.

$$-2x = -14$$

4º Despexamos a incógnita. $x = \frac{-14}{-2} = 7$

2. Resolver a ecuación $\frac{x-3}{3} = x - \frac{x+3}{4}$

1º Quitamos denominadores. Para elo buscamos primeiro o m.c.m

O m.c.m de 3,1 e 4 é 12. Escribimos de novo a Ec: $\frac{4(x-3)}{12} = \frac{12x}{12} - \frac{3(x+3)}{12}$. Agora eliminamos o denominador e queda: $4(x-3) = 12x - 3(x+3)$

2º Quitamos paréntesis: $4x - 12 = 12x - 3x - 9$

3º Agrupamos os termos en x nun membro e os termos independentes no outro

$$4x + 3x - 12x = -9 + 12$$

4º Reducimos os termos semellantes

$$-5x = 3$$

5º Despexamos a incógnita: $x = -\frac{3}{5}$

3. Calcular x para que a suma da metade de x e da terceira parte de x sexa $2x-14$

1º Escribimos a ecuación: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2x - 14$

2º Quitamos denominadores. Para elo buscamos primeiro o m.c.m

O m.c.m de 2,3 e 1 é 6. Escribimos de novo a Ec: $\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{6(2x-14)}{6}$ Agora eliminamos o denominador e queda: $3x + 2x = 6(2x - 14)$

3º Quitamos paréntesis: $3x + 2x = 12x - 84$

4º Agrupamos os termos en x nun membro e os termos independentes no outro

$$3x + 2x - 12x = -84$$

5º Reducimos os termos semellantes

$$-7x = -84$$

6º Despexamos a incógnita

$$x = \frac{-84}{-7} = 12$$

Actividades propostas

4. Resolve as seguintes ecuacións: a) $4x + 8 = 12$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $2x - 3 = 4x - 5$

d) $\frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{x+1}{9}$ e) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+6}{9} = \frac{-5x+8}{3}$

5. Se a suma do dobre de un número coa terceira parte de dito número é 42, ¿qué número é?

6. Calcular un número tal que o resultado de sumarlle 1 ao dobre da súa terceira parte é 19

7. Se se diminúe en 4 metros o lado dun cadrado, obtense outro que ten 128 m^2 menos que o primeiro. ¿Cánto midía o lado?

3. Ecuaciones de 2º grado incompletas

Unha ecuación de 2º grado completa ten a forma xeral: $ax^2 + bx + c = 0$

No presente curso só resolveremos ecuacións de 2º gado incompletas (con 2 termos nada máis).

Son de dous tipos: $\begin{cases} ax^2 + c = 0 \\ \text{ou} \\ ax^2 + bx = 0 \end{cases}$

Sempre vai haber dúas solucións.

No 1º tipo: $ax^2 = -c$; $x^2 = \frac{-c}{a}$; $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

No 2º tipo:

1º sacamos factor común $\Rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{e} \\ ax + b = 0 \rightarrow ax = -b; x = \frac{-b}{a} \end{cases}$

Actividades propostas

8. Resolve as seguintes ecuacións incompletas (se non hai solución, indícao):

a) $2x^2 + 8 = 0$; b) $4x^2 - 16 = 0$; c) $12x^2 - 3x = 0$; d) $3x^2 + 3 - 6x = 3(x - 1)^2$

9. $x(x - 3) + 8 = 4(x + 2)$