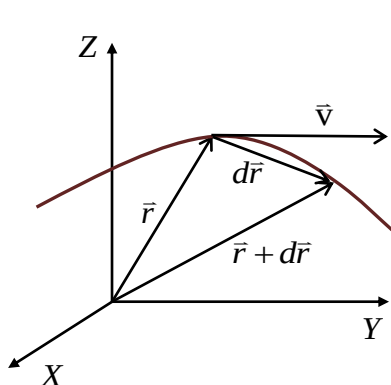


TEMA 1: INTERACCIÓN GRAVITATORÍA

1- REVISIÓN DOS CONCEPTOS BÁSICOS DE CINEMÁTICA E DINÁMICA

A) CINEMÁTICA



$\vec{r}$ (vector posición) = $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

O vector $\vec{v}$ sempre é tanxente a traxectoria!

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}; \quad \vec{v} = v\vec{u}_t$$

Cando $\vec{v}$ é cte $\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{v} \Delta t \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}(t - t_0)$,

facendo $t_0 = 0 \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v} t \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t$. Como $\vec{v}$ é cte podemos prescindir do tratamento vectorial por ser o movemento rectilíneo, e quedáanos:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t} \Rightarrow \text{Ec do movemento rectilíneo uniforme}$$

Vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_y}{dt} + \frac{dv_z}{dt} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad \text{Cando } \vec{a} \text{ é cte} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0) \Rightarrow \text{facendo } t_0 = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Unha vez máis, se queremos, podemos prescindir do tratamento vectorial e quedáanos:

$$\boxed{v = v_0 + at} \Rightarrow \text{Ec da velocidade no movemento rectilíneo uniformemente acelerado}$$

Neste caso ($a = \text{cte}$) podemos deducir tamén a ecuación da posición prescindindo de vectores:

$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v dt; \quad dr = (v_0 + at)dt, \quad dr = v_0 dt + at dt; \quad \int_{r_0}^r dr = \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t at dt$$

$$r - r_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2); \quad \text{facendo } t_0 = 0 \text{ queda:}$$

$$\boxed{r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \Rightarrow \text{Ec da posición no movemento rectilíneo uniformemente acelerado.}$$

Compoñentes intrínsecas da aceleración:

Sabemos que $\vec{v} = v\vec{u}_t$ polo que: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$

$$\frac{dv}{dt} = a_t \text{ (aceleración tanxencial)}, \quad \frac{v^2}{R} = a_n \text{ (aceleración normal)}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n} \quad \text{e} \quad \boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

Movimento circular (todo movimento circular ou curvo ten aceleración)

a) Movimento circular uniforme: Ten $a_n = \frac{v^2}{R} = cte$ e $a_t = 0$. O radio é cte

Velocidade angular: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$. Unidade S.I.: rad/s

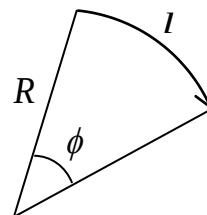
Como $\omega = cte \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$; $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\phi = \omega \Delta t$

Facendo $t_0 = 0 \Rightarrow \phi - \phi_0 = \omega \cdot t \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega \cdot t$

Sabemos que $l = r \cdot \phi \Rightarrow dl = r \cdot d\phi$; $\frac{dl}{dt} = r \cdot \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow v = r \cdot \omega \Rightarrow \boxed{V = \omega \cdot r}$

O movimento circular uniforme é **periódico** (nun periodo recorre unha circunferencia, logo $\Delta\phi = 2\pi$ rad), polo que a expresión de ω en función de T e f queda:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}; \boxed{\omega = 2\pi \cdot f}; \boxed{f = \frac{1}{T}}$$



b) Movimento circular uniformemente acelerado: Ten $a_t = cte$ e a_n variable. O radio é cte

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R; \quad \alpha = \text{aceleración angular.} \quad \boxed{a_t = \alpha R}$$

Como $\alpha = cte$ podemos escribir: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\omega = \alpha \Delta t$; facendo $t_0 = 0$ queda:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}, \text{ e teriamos tamén para o ángulo barrido } \boxed{\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

B) DINÁMICA

LEIS DE NEWTON

1ª. LEI DE INERCIA.

“Se a resultante de tódalas forzas que actúan sobre un corpo é nula, o corpo, ou está en repouso ou se move con movemento rectilíneo uniforme.”

$$\text{Se } \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = 0 \\ \text{ou} \\ \vec{V} = cte \end{cases}$$

O estado natural dos corpos é o repouso ou o movemento rectilíneo uniforme. É imposible distinguir mediante un experimento físico se nos atopamos en repouso ou se nos estamos movendo con movemento rectilíneo uniforme.

2ª. LEI FUNDAMENTAL DA DINÁMICA.

“Se a resultante de tódalas forzas que actúan sobre un corpo non é nula, o corpo adquire unha aceleración proporcional a intensidade da forza resultante”.

Con esta lei Newton derrubou definitivamente a vella concepción Aristotélica de que o efecto dunha forza era producir unha velocidade.

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}}; \text{ m = masa do corpo (cte de proporcionalidade)}$$

Podemos comprobar como a 1ª lei non é máis ca un caso particular da 2ª.

3ª. LEI DE ACCIÓN E REACCIÓN.

“Se un corpo 1 exerce unha forza (*acción*) sobre un corpo 2, o corpo 2 exerce unha forza (*reacción*) do mesmo módulo e sentido contrario sobre o corpo 1”. As dúas forzas exércense simultaneamente e non se anulan pois aplícanse sobre corpos distintos.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

CANTIDADE DE MOVEMENTO OU MOMENTO LINEAL

A cantidade de movemento defínese como o produto da velocidade que ten un corpo pola súa masa. Trátase dunha magnitude vectorial e ten a mesma dirección e sentido que a velocidade.

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \quad \text{Unidade S.I} = \text{kg.m/s} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow \text{entón podemos poñer a 2ª Lei}$$

da forma:
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

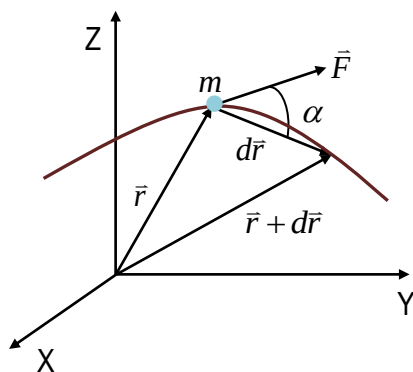
TEOREMA DE CONSERVACIÓN DO MOMENTO LINEAL.

“Se a resultante de tódalas forzas que actúan sobre un corpo ou sistema de corpos é nula o seu momento lineal $\vec{P}$ permanece cte”.

$$\text{Se } \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{cte} \Rightarrow m\vec{v} = \text{cte} \Rightarrow \vec{v} = \text{cte.}$$

Como podemos ver, o teorema de conservación do momento lineal non é máis que o primeiro principio de Newton ou a Lei de Inercia.

TRABALLO



Definimos o **traballo infinitesimal** feito pola forza $\vec{F}$ sobre a masa m ao longo do *desprazamento infinitesimal* $d\vec{r}$ como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha$$

Se queremos calcular o traballo total temos que integrar:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

Se (como ocorre nalgúns casos) a forza é constante, entón:

$$W = \vec{F} \int_{r_1}^{r_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$F \cdot \cos\alpha = \text{forza útil} = F_{\text{util}} \Rightarrow dW = F_{\text{util}} \cdot dr$$

A forza útil é a compoñente da forza na dirección do desprazamento e é a que realiza traballo (que pode ser negativo) polo que **as forzas que actúan perpendiculares ao desprazamento non realizan traballo**.

Supoñamos que na dirección do desprazamento actúa unha **forza neta** (resultante) non nula, entón o *taballo neto* (total) será :

$$W = \int_{r_0}^r F_{\text{neto}} \cdot dr = \int_{r_0}^r m \cdot a \cdot dr = m \cdot \int_{r_0}^r \frac{dv}{dt} \cdot dr = m \cdot \int_{v_0}^v v \cdot dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_0}^v = m \left[\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c \Rightarrow \text{"Teorema das forzas vivas"}$$

FORZAS CONSERVATIVAS

Dicimos que unha forza é conservativa cando o traballo feito *na súa contra* se almacena en forma de enerxía potencial ou cando realiza traballo a costa dunha diminución na enerxía potencial do sistema onde actúa a forza.

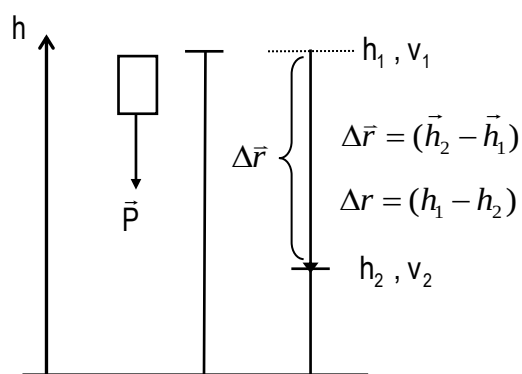
*"Se elevamos un corpo desde o chan cunha forza F constante e igual ao seu Peso, e non supoñendo rozamento co aire, o traballo feito pola forza Peso cando se está elevando é o mesmo **pero de signo contrario** que o que fai a forza Peso cando o soltamos para que volte de novo ao chan"*

Completoouse un ciclo e o traballo total feito pola forza Peso foi nulo $\Rightarrow$ podemos dicir que **cando unicamente actúan forzas conservativas, o traballo ao longo dun ciclo ou liña cerrada vale 0.**

Se $\vec{F}$ é conservativa $\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$; $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ significa traballo ao longo dun ciclo

Supoñamos un corpo que está caendo pola acción do seu peso (non hai rozamento). Nun momento determinado atópase a unha altura h_1 e leva unha velocidade v_1 . Ao cabo dun tempo t atópase a unha altura h_2 e cunha velocidade v_2 . (A única forza que actúa é o peso)

A única forza que fai traballo é o peso (podemos considerala cte se Δr é pequeno). Imos calculalo:



$$W_{\text{neto}} = \vec{P} \cdot \Delta \vec{r} = P \cdot \Delta r \cdot \cos 0^\circ = P \cdot \Delta r \cdot 1$$

$$W_{\text{neto}} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2 = -\Delta E_p$$

$$E_p = mgh \Rightarrow W_{\text{neto}} = -\Delta E_p$$

Neste caso o $W_{\text{neto}} = W_{\text{conservativo}}$ pois só actúan forzas conservativas, entón o resultado xeral é:

$$W_{\text{conservativo}} = -\Delta E_p \quad \text{Sabemos de antes que}$$

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c \quad \text{logo:} \quad \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -(mgh_2 - mgh_1) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 \Rightarrow$$

$$E_{c \text{ final}} + E_{p \text{ final}} = E_{c \text{ inicial}} + E_{p \text{ inicial}} \Rightarrow \text{principio de conservación da enerxía mecánica.}$$

"Cando sobre un corpo actúan unicamente forzas conservativas, a súa enerxía mecánica consérvase". A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potenciais que pode ter o corpo. Sempre que actúa unha forza conservativa existe unha enerxía potencial asociada. Así, cando actúa o peso existe a **enerxía potencial gravitatoria**, cando actúa a forza elástica existe a **enerxía potencial elástica** e cando actúa a forza eléctrica existe a **enerxía potencial eléctrica**.

Cando actúen forzas non conservativas (como forzas de rozamento ou forzas aplicadas por motores) non se conservará a enerxía mecánica. Nestes casos o balance será:

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{conservativo}} + W_{\text{non conservativo}}; \quad \Delta E_c = -\Delta E_p + W_{\text{roz}} \Rightarrow W_{\text{non conservativo}} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$E_{\text{mecánica final}} = E_{\text{mecánica inicial}} + W_{\text{non conservativo}} \Rightarrow W_{\text{non conservativo}} = \Delta E_{\text{mecánica}}$$

PROBLEMAS

1- A posición dun móbil no seu mov ven dada polas ec: $X = 2t - 1$; $Y = 2t^2 - 4t + 1$. Calcula:

- Ec da traxectoria:
- vector velocidade media entre $t=1$ e $t=3$ s.
- a velocidade e o seu módulo para $t=2$ s.
- a aceleración.

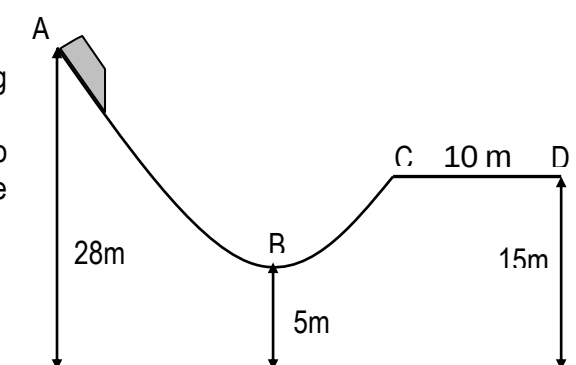
2- Unha bola de 40 g de masa desprázase cunha velocidade de 10 m/s cara outra bola de 240 g de masa e en repouso. Despois do choque a primeira bola rebota cunha velocidade de 7 m/s. ¿Que velocidade adquire a segunda bola? *Reponde con vectores*

3- Un corpo de 0,5 kg situado sobre unha mesa sen rozamento e suxeito a unha corda de 80 cm de lonxitude, xira nun círculo horizontal con velocidade constante. Se a tensión da corda é de 10 N, ¿cánto tardará en dar unha volta completa?

4- No alto da montaña rusa atópase un vagón de 200 kg de masa con dúas persoas dentro de 75 Kg cada unha.

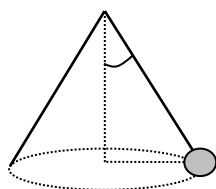
O vagón ponse en movemento dende o repouso facendo o recorrido A-B-C sen rozamento, atopándose finalmente cun freo en C que o fai deter en D. Calcula:

- velocidade que leva o vagón en B e C.
- valor do traballo de rozamento no tramo CD e a aceleración de freado.



S: a) 21,23 m/s ; 15,96 m/s b) -44590 J; 4459 N

Nos tramos ABC cúmprese a conservación da enerxía mecánica e no tramo CD non. O apartado a resólvese aplicando o principio de conservación da Em entre os pto correspondentes. No apartado b aplicar teorema forzas vivas e 2ª lei de Newton. Non vale facelo por cinemática!!



5- A bola da figura xira no aire con movemento circular uniforme a razón de unha volta por segundo. Se a lonxitude da corda é de 0,3 m e a masa da bola é de 100 g, calcula:

- Tensión da corda.
- Ángulo que forma coa vertical.

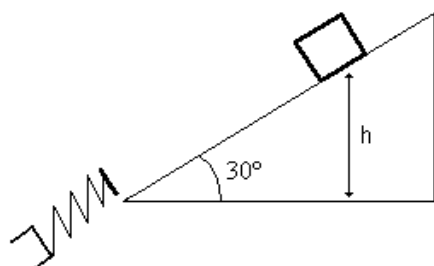
Debuxar as forzas que actúan sobre a bola. Descompoñer e aplicar a 2ª lei de Newton a cada eixe tendo en conta a dinámica de rotación que destes o ano pasado!!!

Solucións: a) 1,18 N; b) 34,16°

6- A un corpo de masa 100 kg, en repouso sobre unha superficie horizontal, aplicámoslle unha forza de 600N formando un ángulo de 60° coa horizontal. O coeficiente de rozamento entre a superficie e o corpo vale 0,2. Mentras aplicamos a forza o corpo desprázase 10 m. Calcula:

- O traballo neto realizado sobre o corpo. $N = 547,3$ N; $F_r = 109,43$ N; $W_{\text{neto}} = 1905,35$ J
- A velocidade final que adquire o corpo. $v^2 = 38,11$ m²/s²; $v = 6,17$ m/s

7- Calcular a altura dende a que debemos deixar esvarar un corpo por un plano inclinado para que a compresión do muelle situado no fondo sexa de 90cm.

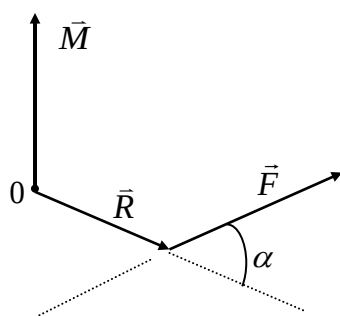


Datos:

$K(\text{cte elástica}) = 300\text{N/m}$
 $\mu = 0.1$
 $m_{\text{corpo}} = 2\text{kg}$

Observamos que enerxías ten o corpo inicialmente e finalmente e aplicamos o balance de enerxía mecánica tendo en conta que neste caso non se conserva pois vai haber perdas por rozamento (cálculanse pola expresión do traballo de rozamento que tamén queda en función de h!)

2- MOMENTO DUNHA FORZA RESPECTO A UN PUNTO



$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} = R \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot \vec{u}_n$; $\times$ = produto vectorial
O Momento dunha forza F aplicada nun pto P respecto a un punto O é un vector con **dirección perpendicular** ao plano formado por $\vec{R}$ e $\vec{F}$ e **módulo**: $M = R \cdot F \cdot \sin \alpha$, sendo α o menor dos ángulos formados por $\vec{R}$ e $\vec{F}$. O **sentido** é o determinado polo avance ou retroceso dun tirarollas cando imos desde $\vec{R}$ ata $\vec{F}$.

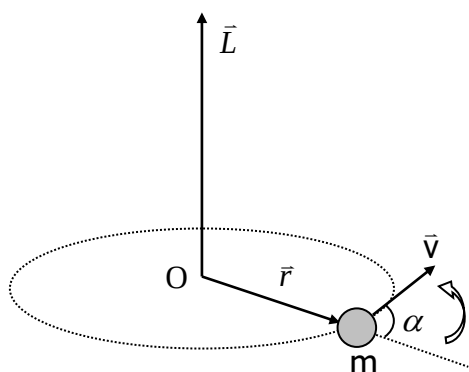
O momento dunha forza está relacionado cos movementos de rotación. Un corpo con un momento non nulo indica que se atopa en rotación. Exemplo: Par de forzas

Se sobre un corpo actúan simultaneamente varias forzas externas, o *momento resultante* é igual a **suma vectorial** dos momentos individuais de cada unha das forzas:

$$\vec{M}_T = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

3- MOMENTO ANGULAR: A SÚA CONSERVACIÓN. FORZAS CENTRAIS

O momento angular xoga o mesmo papel na rotación que o momento lineal na translación.



Defínese o momento angular $\vec{L}$ como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{L} = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot \vec{u}_n}$$

O momento angular está relacionado coa rotación. Sempre que teñamos un corpo rotando entomo a un punto vai existir un momento angular.

3.1- CONSERVACIÓN DO MOMENTO ANGULAR.

Imos ver primeiro como varía o momento angular co tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{P})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{F}. \text{ Vemos que temos dous produtos vectoriais:}$$

$\vec{r} \times \vec{F}$ representa o momento dunha forza $\vec{F}$ aplicada ao corpo de masa m respecto do punto O .

$$\vec{v} \times \vec{P} = \vec{v} \times m\vec{v} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = m \cdot v \cdot v \cdot \sin 0^\circ \cdot \vec{u}_n \Rightarrow \sin 0^\circ = 0 \Rightarrow \vec{v} \times \vec{P} = 0$$

polo tanto: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_{F_{ext}}}$ $\Rightarrow$ * Similitude con $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{F_{ext}}$ na translación

“Para que se produza unha variación temporal do momento angular é preciso que exista un momento exterior non nulo”

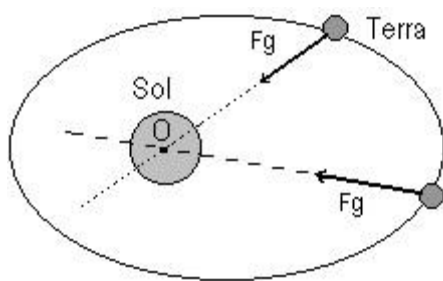
Se $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow$ O produto vectorial só é nulo cando os dous vectores teñen a mesma dirección. ¿Por qué?

Entón: Se $\boxed{\vec{M}_{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte}$ pois a súa derivada é nula.

“Se o momento resultante de tódalas forzas exteriores que actúan sobre un sistema é nulo o momento angular permanece constante”

3.2 –FORZAS CENTRAIS

Dicimos que un corpo está sometido a unha *forza central* cando a liña de interacción (dirección) pasa sempre por un mesmo punto O. Exemplos de forzas centrais son: a *forza elástica*, a *forza gravitatoria* ou a *forza eléctrica*.



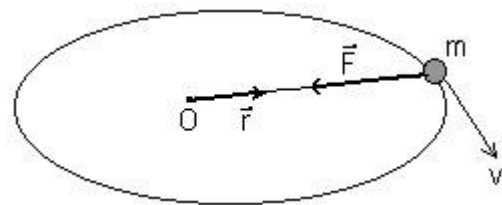
Vemos que no caso da forza gravitatoria do Sol sobre a Terra, a dirección na que actúa pasa sempre polo centro do Sol.

Imos ver que ocorre coa variación do momento angular cando un corpo está sometido a forzas centrais.

Sabemos que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_{F_{ext}}$$

Neste caso $\vec{F}$ e $\vec{r}$ forman un ángulo de 180° (podería ser que formasen un ángulo de 0° se tivesen o mesmo sentido, como no caso de forzas eléctricas entre cargas do mesmo signo). Nos dous casos o seno vale 0, polo que:



$$\vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin \alpha = r \cdot F \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$$

Problema sobre momento angular

Un LP de vinilo (de 30 cm de diámetro) xira en sentido horario a 33 rpm. Unha mosca pousase no extremo do disco dando voltas ao mesmo ritmo. Calcular o momento angular da mosca respecto ao centro do disco, supoñendo que a súa masa é de 0,05 g. (Ten en conta que o momento angular é unha magnitude vectorial)

Temos que dar a resposta final en forma de vector!!! $\vec{L} = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot \vec{u}_n$

Primeiro calculamos o módulo; $L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha$ $\alpha = 90$ $\omega = 33 \frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi rad}{1 rev} \cdot \frac{1 min}{60 s} = 3,46 \frac{rad}{s}$

$$v = \omega \cdot r = 3,46 \cdot 15 \cdot 10^{-2} = 0,518 \frac{m}{s} \Rightarrow L = 15 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,518 \cdot \sin 90 = 3,88 \cdot 10^{-7} \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

$$\vec{L} = -3,88 \cdot 10^{-7} \vec{k} \left(\frac{kg \cdot m^2}{s} \right)$$

4- LEIS DE KEPLER

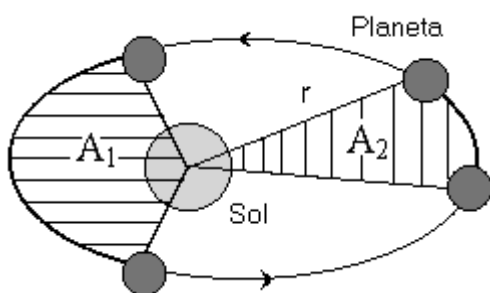
Kepler foi un astrónomo que se adicou, no século XVII, a descubrir as leis que gobernaban o movemento dos planetas entorn ao Sol. Para elo valeuse, sobre todo, das numerosas táboas de datos sobre a posición dos planetas realizadas polo astrónomo e seu maestro *Tycho Brahe*. Baseándose na Teoría Heliocéntrica de *Nicolás Copérnico* tentaba atopar as leis matemáticas que explicasen o gran número de datos recollidos nas táboas sobre a posición dos distintos planetas ao longo do ano.

Hai que dicir que as súas leis son válidas tanto para describir o movemento dos Planetas entorn ao Sol como o movemento dos Satélites entorn aos Planetas.

O seu traballo pódese resumir en tres Leis enunciadas por él :

1ª- Os Planetas móvense describindo órbitas elípticas en vez de circulares. O Sol atópase nun dos focos da elipse (que describan órbitas elípticas implica que a órbita ten que ser plana)

Que a traxectoria sexa plana é debido a que o momento angular ($\vec{L}$) se conserva. Ao ser $\vec{L}$ un vector, para que se conserve ten que ser constante en módulo, dirección e sentido. Que sexa cte en dirección e sentido obriga a que a traxectoria sexa plana! *Por que?*



2ª- O radio vector que une o Sol e o Planeta barre áreas iguais en tempos iguais.

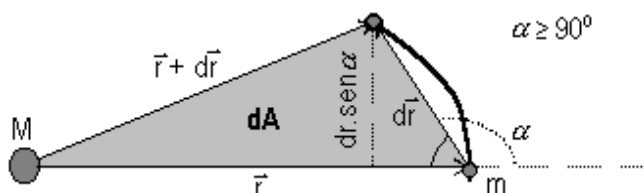
$$A_1 = A_2$$

(A velocidade areolar é constante)

Demostración: Supoñamos que nun instante dt o planeta barre unha área dA

Área do triángulo sombreado:

$$dA = \frac{r \cdot dr \cdot \sin \alpha}{2}$$



Sabemos que $\vec{L}$ é cte polo que L tamén é cte $\Rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha = cte$

$$\frac{L}{m} = r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \sin \alpha = cte \Rightarrow \frac{L}{m} = \frac{r \cdot dr \cdot \sin \alpha}{dt} = cte; \quad \text{dividindoos dous membros por 2 queda:}$$

$$\frac{L}{2 \cdot m} = \frac{r \cdot dr \cdot \sin \alpha}{2 \cdot dt} = cte \Rightarrow \frac{L}{2 \cdot m} = \frac{dA}{dt} = cte; \quad \boxed{\frac{dA}{dt} \text{ (velocidade areolar)} = cte}$$

3ª- A relación entre o cubo do radio medio da órbita e o cadrado do seu periodo é constante.

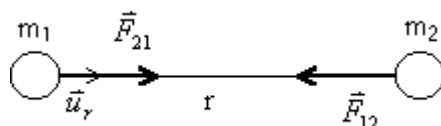
$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = cte} \quad (\text{a teoría da gravitación universal deducirá esta lei !!})$$

5-TEORÍA DA GRAVITACIÓN UNIVERSAL



Isaac Newton (1643-1727), considerado o físico máis impotante da historia, baseándose nos traballos de Copérnico, Kepler e Galileo, e xunto coas súas propias investigacións e aportacións estruturou un dos pilares fundamentais da ciencia.

“Tódolos corpos do Universo manifestan unha forza de atracción mutua”



Supoñamos dúas masas

puntuais m_1 e m_2 separadas unha distancia r .

A fórmula matemática que expresa a súa lei de interacción entre as masas é a seguinte:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Cúmprese que: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

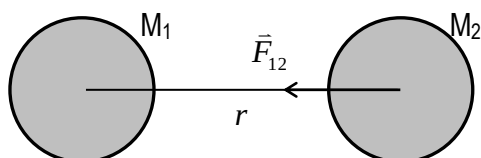
Esta teoría de gravitación foi substituída no primeiro cuarto do século XX pola teoría de gravitación de Einstein (a Relatividade Xeral), que en moitos casos (tales como os que nos ocupan) pode aproximarse razoablemente pola teoría de Newton

G(cte de gravitación universal) = $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{Kg}^2$.

O valor desta constante foi determinado por *Cavendish* en 1798 mediante unha balanza de torsión. Vemos que o seu valor é pequeno, isto implica que as masas teñen que ser moi grandes para que se poña de manifesto a interacción gravitatoria.

As forzas gravitatorias sempre son *atractivas* (signo negativo) e sempre se presentan a pares. Son forzas de *acción e reacción*. Trátase de interaccións a distancia polo que non é preciso a presenza de ningún medio material para que se poñan de manifesto (*isto según a física clásica, na física moderna considérase que a interacción é debida a o intercambio de partículas virtuais que serían os gravitóns, aínda non descubertos, e non sería instantánea*).

Cando temos masas moi grandes é preciso ter en conta o radio dos planetas. A forza gravitatoria maniféstase como se os planetas fosen masas puntuais con toda a masa no seu centro:



$$\vec{F}_{12} = -G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \vec{u}_r$$

A lei de gravitación universal serve tanto para explicar por qué a Lúa orbita entorno á Terra como por qué os corpos caen ou pesan, de aí o calificativo de *“universal”*.

O **módulo** da forza coa que a Terra atrae a un corpo de masa *“m”* situado na súa superficie vale:

$$F_g = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

6- CAMPO GRAVITATORIO. INTENSIDADE DE CAMPO GRAVITATORIO.

Dicimos que nunha zona do espazo existe un *campo* cando existe unha magnitude física que pode tomar distintos valores nesa zona do espazo. Os campos poden ser *escalares* ou *vectoriais*. Exemplos de campos escalares son os valores da presión nunha determinada zona da atmosfera, valores de temperatura, etc.

Os campos que máis nos van interesar a nós son os campos vectoriais e dentro deles os *campos de forzas conservativas* ou *campos conservativos*.

“Dicimos que nunha zona do espazo existe un campo de forzas cando o colocar nela un corpo de proba, este vese sometido a unha forza”

Entre os campos de forzas conservativos que nos interesan a nós están os campos de forzas centrais, aqueles nos que o corpo de proba está sometido a unha forza central, e dentro dos campos de forzas centrais, neste tema ocuparemos do campo gravitatorio.

“Chamámolles campo gravitatorio a perturbación que un corpo produce no espazo que o rodea polo feito de ter masa”

6.1- INTENSIDADE DE CAMPO GRAVITATORIO.

A intensidade do campo gravitatorio $\vec{g}$, creado por un corpo de masa M nun punto do espazo é a forza que actuaría sobre a unidade de masa colocada nese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{Unidade S.I : N/Kg}$$

A partir da definición anterior, a forza que experimenta un corpo de masa m situado nun campo gravitatorio creado por outra masa M ven dada pola expresión:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad \vec{F} = m \left(-G \frac{M}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_r = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Imos ver cal é a expresión do **campo gravitatorio terrestre**:

a) Na superficie da terra:

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M}{R_T^2} \vec{u}_r \quad \boxed{g_0 = G \frac{M}{R_T^2}}$$

b) En puntos situados a unha altura h :

$$\boxed{g_{ext} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}}$$

c) En puntos situados no interior da Terra ($R < R_T$):

Primeiro consideraremos á Terra como unha esfera homoxénea de densidade uniforme:

$$d = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3} = cte \quad \text{Se temos un punto interior ($R < R_T$), a masa a considerar será menor que M_T polo que:}$$

$$\vec{g}_{int} = -G \frac{M_T \frac{R^3}{R_T^3}}{R^2} \vec{u}_r = -G \frac{M_T \cdot R}{R_T^3} \vec{u}_r \Rightarrow \quad M = d \cdot V = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M_T R^3}{R_T^3} \Rightarrow$$

$$\vec{g}_{int} = -G \frac{M}{R^2} \vec{u}_r \quad \vec{g}_{int} = \vec{g}_0 \frac{R}{R_T} \quad \boxed{\text{Para } R=0 \Rightarrow g_{int} = 0}$$

$$\boxed{g_{int} = g_0 \frac{R}{R_T}}$$

* Se dividimos g_0 entre g_{ext} quedáanos:

$$\frac{g_0}{g_{ext}} = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2} \Rightarrow g_{ext} = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \quad \boxed{g_{ext} = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}} \quad \text{Para } h \ll R_T \Rightarrow \frac{h}{R_T} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{g_{ext} \approx g_0}$$

O valor standar de g na superficie terrestre defínese a unha latitude de 45° xa que sobre dito valor inflúen

a) O valor do radio da Terra (lembramos que é unha esfera achatada polos polos).

b) O efecto da forza centrífuga producida pola rotación terrestre.

O peso é a resultante da gravitación terrestre e da forza centrífuga debida á rotación.

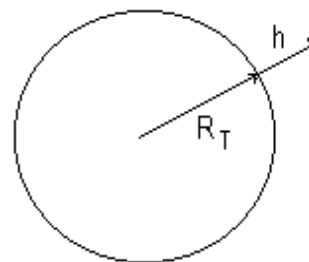
Estas forzas só teñen a mesma dirección e sentido contrario no ecuador. Por iso o valor de g no ecuador é mínimo.

No polo, a forza centrífuga é nula e o valor de g é máximo.

O valor estándar de g considérase o correspondente a un punto ao nivel do mar e a 45° de latitude:

$$g = 9,80616 \text{ m/s}^2.$$

No estado español é o valor da gravidade na cidade de Alicante.

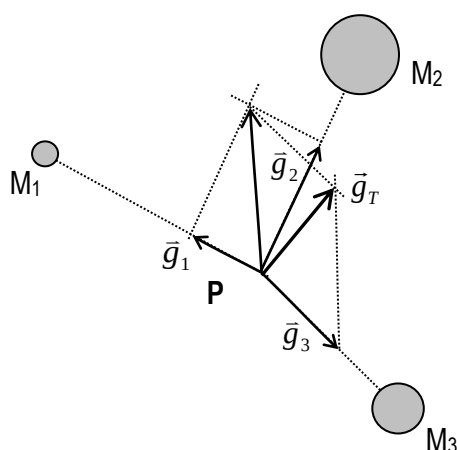


Exercicios Repaso:

- 1- Sabendo que o radio da Lúa é aproximadamente a cuarta parte do radio da Terra e que a masa da Terra é 81 veces maior que a masa da Lúa, determina a aceleración da gravidade na Lúa se na superficie terrestre vale $9,8 \text{ m/s}^2$. Canto pesaría unha persoa de masa $m = 70 \text{ kg}$ na Lúa?
- 2- Deducir, en función de R_T , a qué altura debemos ascender para que o valor de g sexa o **64%** do que ten na superficie terrestre. Se o período dun reloxo de péndulo ven determinado mediante a expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo l a súa lonxitude ¿o reloxo adiantará ou atrasará nese punto?

7- CAMPO GRAVITATORIO ORIXINADO POR VARIAS MASAS PUNTUAIS: PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Cando nunha mesma zona do espazo existen varias masas, o campo gravitatorio total nun determinado punto vai ser igual a suma vectorial dos campos individuais creados por cada masa. Cada masa compórtase como se as demais non existisen.

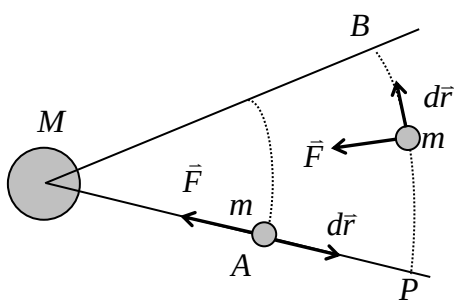


$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g}_T = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i$$

8- ENERXÍA POTENCIAL GRAVITATORIA. POTENCIAL GRAVITATORIO

Como a forza gravitatoria é conservativa vai existir unha *enerxía potencial gravitatoria* asociada. Supoñamos que queremos trasladar un corpo de masa " m " situado nun campo gravitatorio creado por unha masa " M " dende un punto A a un punto B. Como a forza gravitatoria é conservativa, o seu traballo non depende do camiño seguido. Podemos elixir calquer camiño para ir dende A ata B. Calculemos entón o traballo:



Podemos supoñer que m se traslada dende A ata B polo camiño APB. Entón:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow P} + W_{P \rightarrow B} ;$$

$$W_{A \rightarrow P} = \int_A^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^P F \cdot dr \cdot \cos 180^\circ = - \int_A^P G \frac{M \cdot m}{r^2} dr$$

$$W_{A \rightarrow P} = -G \cdot M \cdot m \int_{r_A}^{r_P} \frac{dr}{r^2} = -G \cdot M \cdot m \left(-\frac{1}{r} + K \right)_{r_A}^{r_P}$$

$$W_{A \rightarrow P} = -G \cdot M \cdot m \left[\left(-\frac{1}{r_P} + K \right) - \left(-\frac{1}{r_A} + K \right) \right] = \left(-G \frac{M \cdot m}{r_A} + K \right) - \left(-G \frac{M \cdot m}{r_P} + K \right)$$

$$W_{A \rightarrow P} = Ep_A - Ep_P = -\Delta Ep$$

$$W_{P \rightarrow B} = 0 \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ porque } \cos 90^\circ = 0. \text{ Logo:}$$

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow P} = Ep_A - Ep_P. \text{ Como } r_P = r_B \Rightarrow \boxed{W_{A \rightarrow B} = Ep_A - Ep_B}$$

Como vimos, a $Ep_{grav} = -G \frac{M \cdot m}{r} + K$ donde K pode tomar calquera valor pois non inflúe no

incremento de enerxía potencial xa que ao ser este unha diferenza é independente do valor da constante. Como consecuencia, o valor da constante K é arbitrario e depende da elección da orixe de Enerxía potencial. Se lle asignamos o valor 0 a Enerxía potencial que teñen os puntos situados a unha distancia infinita da masa que crea o campo ($r \rightarrow \infty$) temos:

$$0 = -G \frac{M \cdot m}{\infty} + K \Rightarrow 0 = 0 + K \Rightarrow \boxed{K = 0} \quad \text{Entón quedamos: } \boxed{Ep_{grav} = -G \frac{M \cdot m}{r}}$$

8.2- POTENCIAL GRAVITATORIO

Defínese o potencial gravitatorio como o traballo que efectúa o campo gravitatorio para trasladar a unidade de masa desde o punto A ao punto B :

$$\frac{W}{m} = \frac{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}{m} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{m} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad \boxed{\frac{W}{m}} \text{ denomínase } \textit{diferenza de potencial gravitatorio} \text{ e represéntase por } V_A - V_B$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_A^B G \frac{M}{r^2} dr \cdot \cos 180^\circ = -GM \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -GM \left[-\frac{1}{r} + K \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_A - V_B = -GM \left[\left(-\frac{1}{r_B} + K \right) - \left(-\frac{1}{r_A} + K \right) \right] = \left(-\frac{GM}{r_A} \right) - \left(-\frac{GM}{r_B} \right) \quad K \text{ elimínase } \Rightarrow$$

$$V = -G \frac{M}{r} + K \quad \text{Como no caso da E potencial*, se cando } r \rightarrow \infty \text{ facemos } V = 0 :$$

$$0 = 0 + K \Rightarrow \boxed{K = 0} \text{ logo: } \boxed{V = -G \frac{M}{r}} \quad \text{"O Potencial gravitatorio nun punto do espazo é o traballo que realiza o campo gravitatorio para levar a unidade de masa desde ese punto ata o infinito"}$$

$$W_{A \rightarrow B} = Ep_A - Ep_B = m(V_A - V_B) \quad \text{Unidade S.I} = \text{J/Kg}$$

"O Traballo só depende da posición inicial e final e non do camiño seguido"

Problemas:

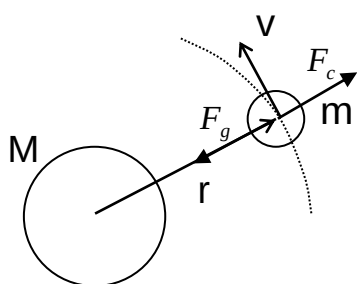
- 1- Un satélite artificial xira arredor da Terra con un período de **3 horas**. Hachar o período doutro satélite no que a distancia ao centro da Terra é **4 veces** a do primeiro ¿Qué tipo de satélite é?
- 2- Un satélite describe unha órbita circular arredor da Terra, con un período de **1 día**. Calcular:
 - a) Radio da órbita
 - b) Campo gravitatorio terrestre nun punto calquera da órbita.
 - c) Enerxía mecánica do satélite.
 Datos: $R_t = 6370 \text{ km}$; $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

- 3- Determina con que velocidade se ten que lanzar un foguete que leva un satélite para que acade unha altura de 5000 Km con velocidade nula. Supón que o rozamento coa atmosfera é desprezable e que a masa do foguete permanece cte.

Solución: Aplicar balance de enerxía mecánica

9-MOVEMENTO DUN CORPO BAIXO A ACCIÓN DUNHA FORZA GRAVITATORIA. ÓRBITAS

Imos calcular primeiro a velocidade orbital (ten que aplicarse perpendicular ao radio para que o momento angular L sexa máximo) que é preciso comunicarlle a un corpo de masa m para poñelo en **órbita circular** en torno a outro moi maior de masa M :



No caso dunha órbita circular podemos aplicar en todo momento a igualdade: $F_g = F_c$, entón $\Rightarrow$

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v_{\text{orb}} = \sqrt{G \frac{M}{r}};$$

A Enerxía total será a suma de cinética e potencial gravitatoria.

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M \cdot m}{r}. \text{ Se substituímos } v^2 \text{ pola expresión anterior:}$$

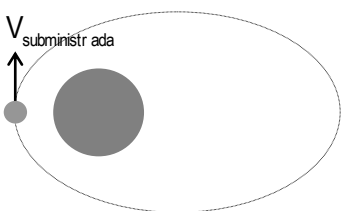
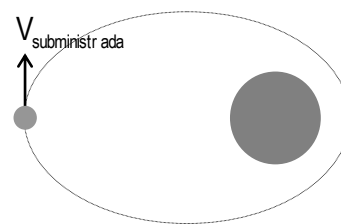
$$E_T = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow E_T = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} < 0$$

Vemos que no caso de órbita circular cúmprese que:

$$E_c = \frac{|E_p|}{2} \text{ polo que: } E_T = \frac{|E_p|}{2} - |E_p| = -\frac{|E_p|}{2}$$

- Se $E_c < \frac{|E_p|}{2}$, entón a velocidade que lle aplicamos é menor

que a calculada anteriormente para a órbita circular. Neste caso a órbita resultante será **elíptica**, pero pechándose cara o corpo central M (para gañar velocidade). Debido a isto, se a velocidade subministrada é moi pequena pode chegar a precipitarse sobre o corpo central M . A velocidade subministrada corresponderá a velocidade no Apoxeo.



- Se $\frac{|E_p|}{2} < E_c < |E_p|$, entón a velocidade que se lle aplica é maior que a calculada anteriormente para a órbita circular. Neste caso a órbita resultante será tamén **elíptica**, pero afastándose do corpo central M (para perder velocidade). A velocidade subministrada corresponderá a velocidade no Perixeo.

9.1- VELOCIDADE DE ESCAPE

- Se $E_c = |E_p| \Rightarrow E_T = |E_p| - |E_p| = 0 \Rightarrow$ O corpo describirá unha **órbita parabólica** (aberta) e poderá chegar ao infinito con velocidade 0 $\Rightarrow$ Poderá escapar do campo gravitatorio de M!

A velocidade que hai que comunicar para que se cumpla a condición anterior coñécese como **velocidade de escape** e obtémola do seguinte modo:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = 0; \quad \frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{M \cdot m}{r}; \quad v_{esc} = \sqrt{2 \frac{G M}{r}}$$

Se o corpo se atopa na supeficie da terra:

$$v_{esc} = \sqrt{2 \frac{G M_T}{R_T}}$$

Se o corpo se atopa a unha altura sobre a supeficie terrestre:

$$V_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

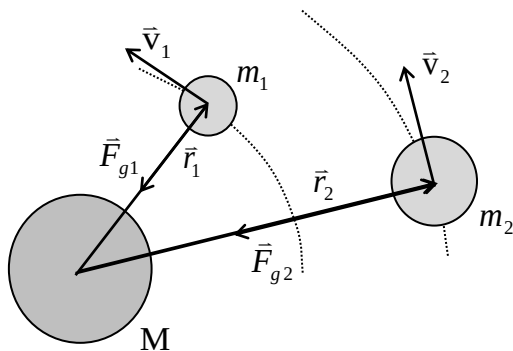
Se substituímos G , M_T , e R_T polos seus valores sáenos $V_e = 11,2$ Km/s que é unha velocidade extraordinariamente elevada. Se en vez de a terra se trata doutro corpo (planeta, lúa, etc) teremos que substituír M_T e R_T polos valores respectivos de dito corpo

- Se $E_c > |E_p| \Rightarrow E_T > 0 \Rightarrow$ O corpo describirá unha **órbita hiperbólica** (aberta). O corpo pode chegar ao infinito aínda con velocidade. No infinito ten $E_p = 0$ pero aínda lle queda enerxía cinética para seguir movéndose!

Todos os casos vistos anteriormente podemos resumilos como segue:

- **Se $E_T < 0$** O corpo describe unha órbita *circular ou elíptica* segundo os casos como xa vimos.
- **Se $E_T = 0$** O corpo describe unha órbita *parabólica* $\Rightarrow$ "O corpo pode abandonar o campo gravitatorio e chegar ao infinito con velocidade nula"
- **Se $E_T > 0$** O corpo describe unha órbita *hiperbólica* $\Rightarrow$ "O corpo pode abandonar o campo gravitatorio e chegar ao infinito aínda con velocidade"

- DEMOSTRACIÓN DA TERCEIRA LEI DE KEPLER



$$\vec{F}_{g1} = m_1 \cdot \vec{a}_c \Rightarrow -G \frac{M \cdot m_1}{r_1^2} \vec{u}_r = -m_1 \omega_1^2 r_1 \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{g2} = m_2 \cdot \vec{a}_c \Rightarrow -G \frac{M \cdot m_2}{r_2^2} \vec{u}_r = -m_2 \omega_2^2 r_2 \vec{u}_r$$

Logo de eliminar a ambos lados todo o que se vai:

$$G \frac{M}{r_1^2} = \omega_1^2 r_1 \Rightarrow G \frac{M}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{T_1^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$G \frac{M}{r_2^2} = \omega_2^2 r_2 \Rightarrow G \frac{M}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{T_2^2} \Rightarrow \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Como podemos comprobar: $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = cte$; $\frac{4\pi^2}{GM} = cte$. A cte depende do corpo central, non é a mesma para a Terra que para oSol

RELACIÓN ENTRE AS DÚAS EXPRESIÓNS DA ENERXÍA POTENCIAL

Como sabemos de cursos anteriores, na expresión clásica da enerxía potencial gravitatoria $Ep = m \cdot g \cdot h$ tomábase como orixe de enerxías potenciais a superficie da terra $\Rightarrow$ Se $h=0$ $Ep=0$. e era válida para alturas pequenas. Deseguido imos ver como podemos chegar a esta expresión partindo da nova definición de Ep que xa coñecemos:

$$Ep_{grav} = -G \frac{M \cdot m}{r} + K \quad \text{Só temos que tomar como orixe de enerxía potencial a superficie da terra, é dicir: para } r = R_T \Rightarrow Ep = 0. \text{ Logo:}$$

$$0 = -G \frac{M \cdot m}{R_T} + K \Rightarrow K = G \frac{M \cdot m}{R_T} \quad \text{Entón a expresión da enerxía potencial será:}$$

$$Ep_{grav} = -G \frac{M \cdot m}{r} + G \frac{M \cdot m}{R_T} \quad \text{Para puntos situados a unha altura } h \text{ por encima da terra} \\ \Rightarrow r = R_T + h; \quad h \ll R_T. \text{ Agora:}$$

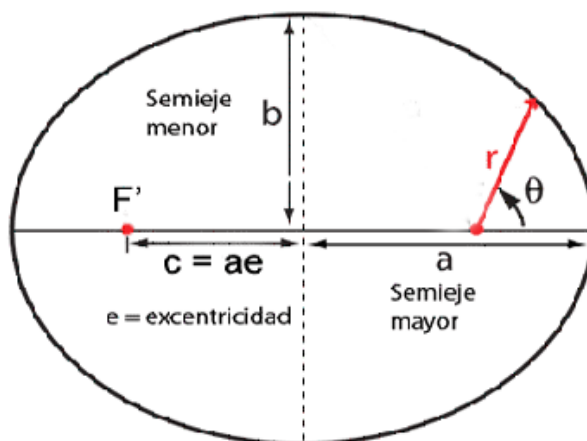
$$Ep_{grav} = -G \frac{M \cdot m}{R_T + h} + G \frac{M \cdot m}{R_T} = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right) = G \cdot M \cdot m \frac{h}{R_T(R_T + h)}$$

$$\text{Tendo en conta que } G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2 \Rightarrow Ep_{grav} = g_0 \cdot R_T^2 \cdot m \frac{h}{R_T^2 + R_T \cdot h};$$

Como $h \ll R_T$ podemos desprezar o termo $R_T \cdot h$ fronte á R_T^2 e quedáanos:

$$Ep_{grav} = g_0 \cdot R_T^2 \cdot m \frac{h}{R_T^2} \quad \text{ou, o que é o mesmo: } Ep_{grav} = m \cdot g_0 \cdot h$$

Parámetros da Elipse



$$\text{Excentricidade: } e = \frac{c}{a}$$

O seu valor atópase entre 0 e 1. Con $c=0$ teríamos órbita circular.

$$\text{Perixéo: } a - c$$

$$\text{Apoxéo: } a + c$$

$$r_{medio} = \frac{(a + c) + (a - c)}{2} = a$$

O radio medio da órbita coincide co semieixe maior a !!

Problemas e Exercicios

- 1- Razoa cal será o signo do traballo realizado polo campo gravitatorio: a) para achegar dúas masas. b) para afastalas.
- 2- Un satélite describe unha órbita elíptica arredor da Terra. Considerando a súa posición en dous puntos da órbita, razoa se: a) a velocidade orbital do satélite é a mesma en ambos os puntos; b) a enerxía mecánica do satélite é a mesma en ambos os puntos; c) o momento angular do satélite respecto ao centro da Terra é distinto en ambos os puntos.
- 3- Razoar a resposta á seguinte cuestión: “Cando un satélite en órbita perde parte da súa enerxía por fricción, o radio da nova órbita é: a) maior, b) menor, c) mantense constante.
- 4- Se a Terra se contrae reducindo o seu radio a metade e mantendo a súa masa: a) a órbita arredor do Sol será a metade; b) o período dun péndulo será a metade; c) o peso dos corpos será o dobre. Razoa cal é a opción correcta.
- 5- Se un satélite artificial describe órbitas circulares arredor da Terra; xustifica cal das seguintes afirmacións é correcta en relación coa súa enerxía mecánica E e as súas velocidades orbital v e de escape v_e : a) $E = 0$, $v = v_e$; b) $E < 0$, $v < v_e$; c) $E > 0$, $v > v_e$.
- 6- Dous planetas de igual masa, $m_1 = m_2$, xiran en torno a unha estrela de gran tamaño M , describindo órbitas circulares de radios $r_1 = 10^{11} \text{ m}$ e $r_2 = 1'5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Se o planeta m_1 , tarda 2 anos en dar unha volta completa en torno a M :
 - a) Calcula a velocidade do planeta m_1 e a masa M da estrela.
 - b) Hachar a velocidade e o período do planeta m_2 , e comparalos cos de m_1 .Dato: $G = 6'67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- 7- Dous satélites de comunicacións **A** e **B** con diferentes masas ($m_A > m_B$) xiran arredor da terra en órbitas estables de diferente radio sendo $r_A < r_B$. Elixo razoadamente a resposta correcta:
 - a) **A** xira con maior velocidade lineal.
 - b) **B** ten menor período de revolución.
 - c) Os dous teñen a mesma enerxía mecánica.
- 8- Un astronauta de 75Kg xira arredor da Terra dentro dun satélite artificial nunha órbita situada a 10000 Km sobre a superficie da Terra. Calcula:
 - a) Velocidade orbital e período de rotación.
 - b) O peso do astronauta nesa órbita.
 - c) O valor da velocidade de escape nesa órbita. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ N/Kg}$, $R_T = 6400 \text{ Km}$.
- 9- Temos dúas esferas de masas 2 Kg e 4 Kg situadas, respectivamente, nos puntos (0,0) e (6,0) dun sistema de coordenadas cartesianas representado en metros. Calcula:
 - a) Valor do campo gravitatorio nos puntos (3,4) e (3,0)
 - b) O traballo necesario para transportar outra esfera de masa 3 Kg desde o punto (3,4) ao punto (3,0)
- 10- Na superficie dun planeta de radio $R = 1,25 R_T$ a intensidade do campo gravitatorio é de $14,7 \text{ N/Kg}$. Calcula:
 - a) Relación entre as masas do planeta e da Terra.
 - b) A altura desde a que debe caer un obxecto nese planeta para que chegue á superficie coa mesma velocidade coa que chegaría á superficie terrestre cando caese desde unha altura de 275 m.

- 11- Queremos situar un satélite de 50 Kg de masa nunha órbita circular a 500 Km de altura sobre a superficie terrestre. Calcula:
- Velocidade do satélite nesa órbita.
 - Energía que foi preciso comunicarlle desde a superficie terrestre para poñelo en órbita.
 - Intensidade do campo gravitatorio terrestre nesa órbita.
- 12- A estación espacial internacional (ISS) describe arredor da Terra unha órbita practicamente circular a unha altura $h = 390$ km sobre a superficie terrestre, sendo a súa masa $m = 415$ T.
- Calcula o seu periodo de rotación en minutos así como a velocidade coa que se despraza.
 - Que enerxía é necesario comunicarlle para levala a unha órbita de altura dobre? Calcula o periodo de rotación nesa nova órbita. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $R_T = 6370$ km.
- 13- A aceleración da gravidade na superficie de Marte é de $3,7 \text{ m/s}^2$. O radio da Terra é de 6378 km e a masa de Marte é un 11% a da Terra. Calcula:
- O radio de Marte. **Solución:** $3,44 \cdot 10^6 \text{ m}$
 - A velocidade de escape desde a superficie de Marte. **Solución:** $5045,5 \text{ m/s}$.
- 14- Sabendo que a masa da Terra é 81 veces a masa da Lúa e que a distancia do centro da Terra ao da Lúa é de 384000 Km, calcula o punto entre a Terra e a Lúa no que a forza gravitatoria vale 0. (*Unha vez que os foguetes acadan esta distancia xa poden parar os motores porque a partir de aí predomina o campo gravitatorio da Lúa*)
- 15- Ceres é o planeta anano máis pequeno do sistema solar e ten un período orbital arredor do Sol de 4,60 anos, unha masa de $9,43 \cdot 10^{20} \text{ kg}$ e un radio de 477 km. Calcular: a) o valor da intensidade do campo gravitatorio que Ceres crea na súa superficie; b) a enerxía mínima que debe ter unha nave espacial de 1000 kg de masa para que, saíndo da superficie, poida escapar totalmente da atracción gravitatoria do planeta; c) a distancia media entre Ceres e o Sol, tendo en conta que a distancia media entre a Terra e Sol é de $1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ e que o período orbital da Terra arredor do Sol é de 1 ano. ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$)
Solucións: $0,276 \text{ N/kg}$; $1,32 \cdot 10^8 \text{ J}$; $4,15 \cdot 10^{11} \text{ m}$.
- 16- Un satélite artificial de 500 kg describe unha órbita circular arredor da Terra cun radio de $2 \cdot 10^4$ km. Calcula: a) a velocidade orbital e o periodo; b) a enerxía mecánica e a potencial; c) se por fricción se perde algo de enerxía, que lle ocorre ao radio e a velocidade?
Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $R_T = 6370$ km. (ABAU setembro 2010).
- 17- A Terra tarda 1 ano en describir a súa órbita entornao ao Sol. Considerando esta órbita *practicamente circular* con un radio $R = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$, calcula a masa do Sol.
Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$. **Solución:** $1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
- 18- Deséxase poñer un satélite de 1 T de masa en órbita arredor de Terra e a unha altura dúas veces o radio terrestre. Calcular: a) a enerxía que hai que comunicarlle desde a superficie da Terra; b) a forza centrípeta necesaria para que describa a órbita; c) o periodo do satélite en dita órbita. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $R_T = 6370$ km (ABAU setembro 2013)
Solucións: a) $5,2 \cdot 10^{10} \text{ J}$; b) $1,1 \cdot 10^3 \text{ N}$; c) $2,6 \cdot 10^4 \text{ s}$
- 19- A Terra describe unha órbita elíptica arredor do Sol. Chámaselle *perihelio* á posición na que a Terra está máis cerca do Sol e *afelio* á posición na que está máis alonxada do Sol. ¿En qué posición será maior a cantidade de movemento da Terra? ¿En que posición será maior o momento angular?

20- Un satélite artificial de 100 kg de masa describe unha órbita circular arredor da Terra a unha altura de 500 km sobre a súa superficie. Se o periodo de revolución é $T_1 = 5665$ s, determina:
a) velocidade do satélite na órbita.

b) as enerxías cinética, potencial e total do satélite na órbita e a enerxía necesaria para transferilo a unha órbita de periodo $T_2 = 7200$ s. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$

Solucións: 7619,68 m/s; $2,9 \cdot 10^9 \text{ J}$; $-5,79 \cdot 10^9 \text{ J}$; $-2,89 \cdot 10^9 \text{ J}$; $0,43 \cdot 10^9 \text{ J}$

21- a) Calcular o radio que debería ter a Terra, conservando a súa masa, para que a velocidade de escape fose igual que a da luz, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) Ante un colapso de este tipo ¿variaría o período de rotación da Lúa arredor da Terra?

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$; $R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$; $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$. **Solución:** 8,9 mm