HOMOLOGÍA Y AFINIDAD

2º Bach

INTRODUCCIÓN

As transformacións xeométricas son correspondencias que se establecen entre os elementos de dúas figuras xeométricas e que cumpren unha determinada lei.

Segundo se consideren as características métricas ou as características proxectivas nunha transformación xeométrica, distinguimos entre **xeometría métrica** e **xeometría proxectiva**.

- A *xeometría métrica* estudia as transformacións que conservan as características métricas, como o paralelismo, os ángulos, a área, a distancia... Así pois, a translación, as simetrías, o xiro, a homotecia e a semellanza que estudiamos na unidade 4 do curso anterior son transformacións métricas.
- A *xeometría proxectiva* estudia as transformacións que conservan as características proxectivas ou invariantes proxectivas, como a aliñación de puntos, a concorrencia de rectas ou de planos, a pertenza de puntos a liñas...

Existen dous grupos de transformacións proxectivas, as **homografías** e as **correlacións**.

- As *homografías* son transformacións proxectivas que establecen unha correspondencia entre elementos da mesma especie, é dicir, a un punto faille corresponder un punto, e a unha recta faille corresponder unha recta.

  As transformacións que estudiaches na unidade 4 do curso anterior (translación, simetrías, xiro, homotecia, semellanza) e as que se exporán nos dous apartados seguintes (homoloxía e afinidade) son homografías.

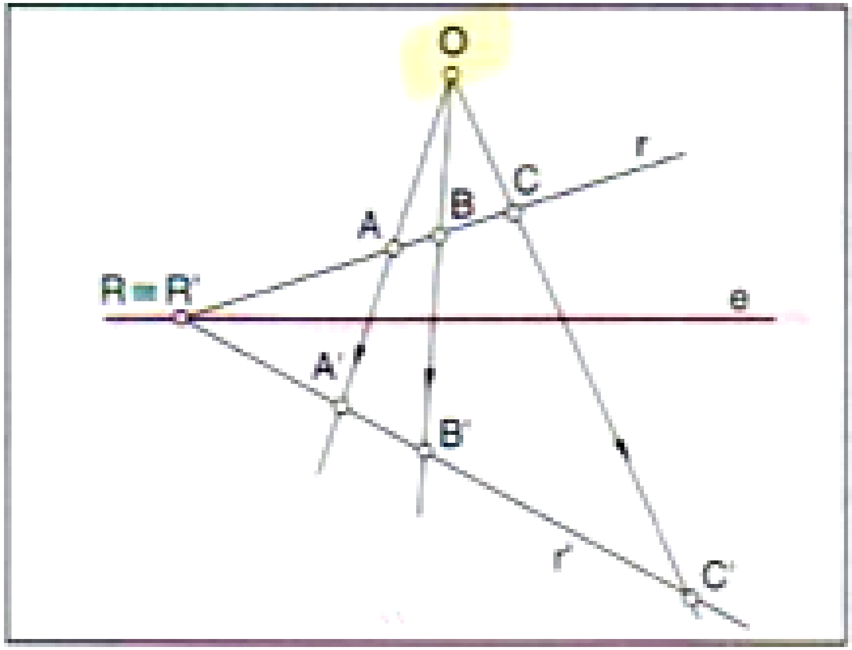
- As *correlacións* son transformacións proxectivas que establecen unha correspondencia entre elementos de diferente especie, é dicir, a un punto faille corresponder unha recta, e a unha recta faille corresponder un punto.

  Na unidade 4 estudiarase a polaridade como exemplo de correlación.

HOMOLOGÍA

É unha transformación xeométrica homográfica, xerada pola *proxección* desde un punto *O*, e na que dúas figuras homólogas, *ABC* e *A´B´C´*, son dúas *seccións* desa radiación.

Así pois, dúas figuras planas son homolóxicas se se cumpre que:

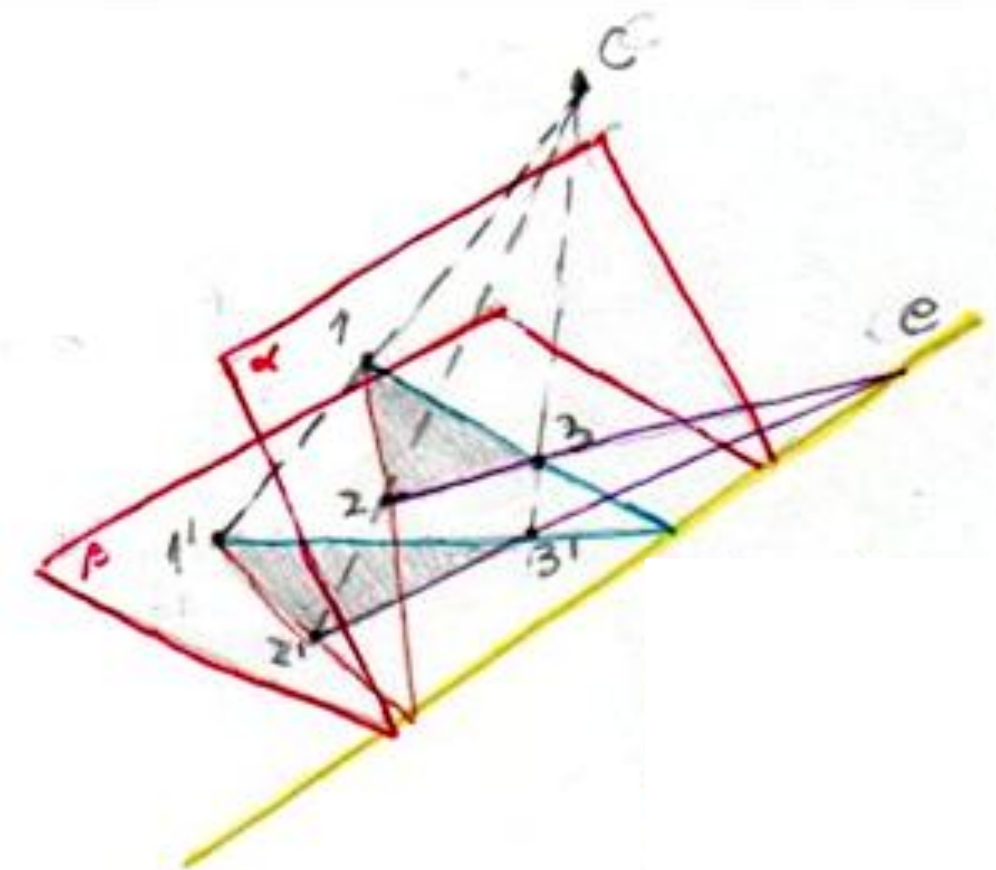


— Os puntos homólogos están aliñados cun punto fixo *O*, chamado **centro de homoloxía**.

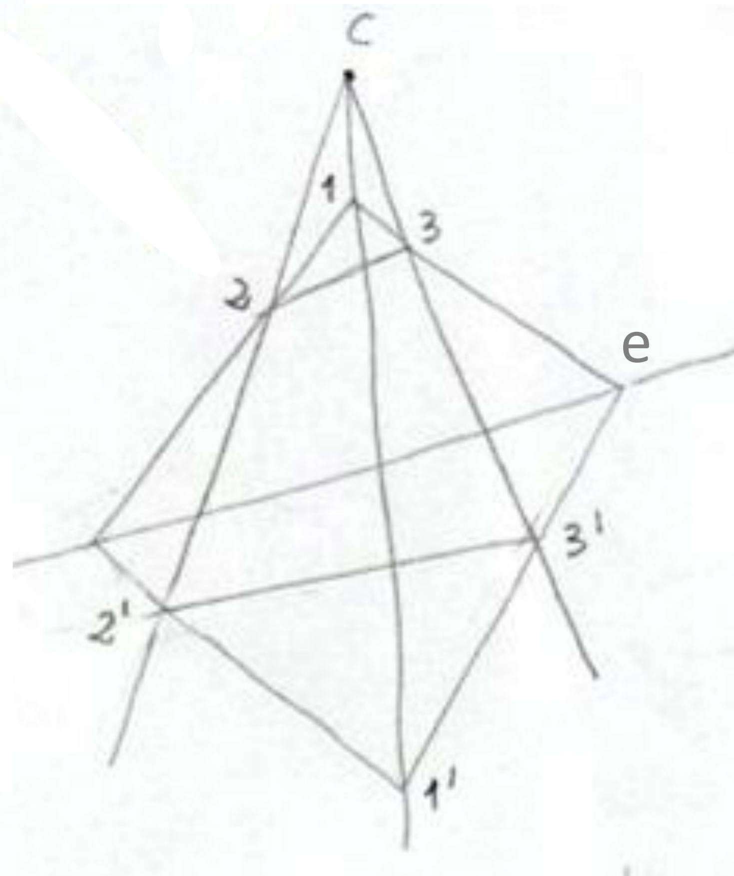
r y r'

— As rectas homólogas córtanse en puntos dunha recta fixa *e*, denominada **eixe de homoloxía**.

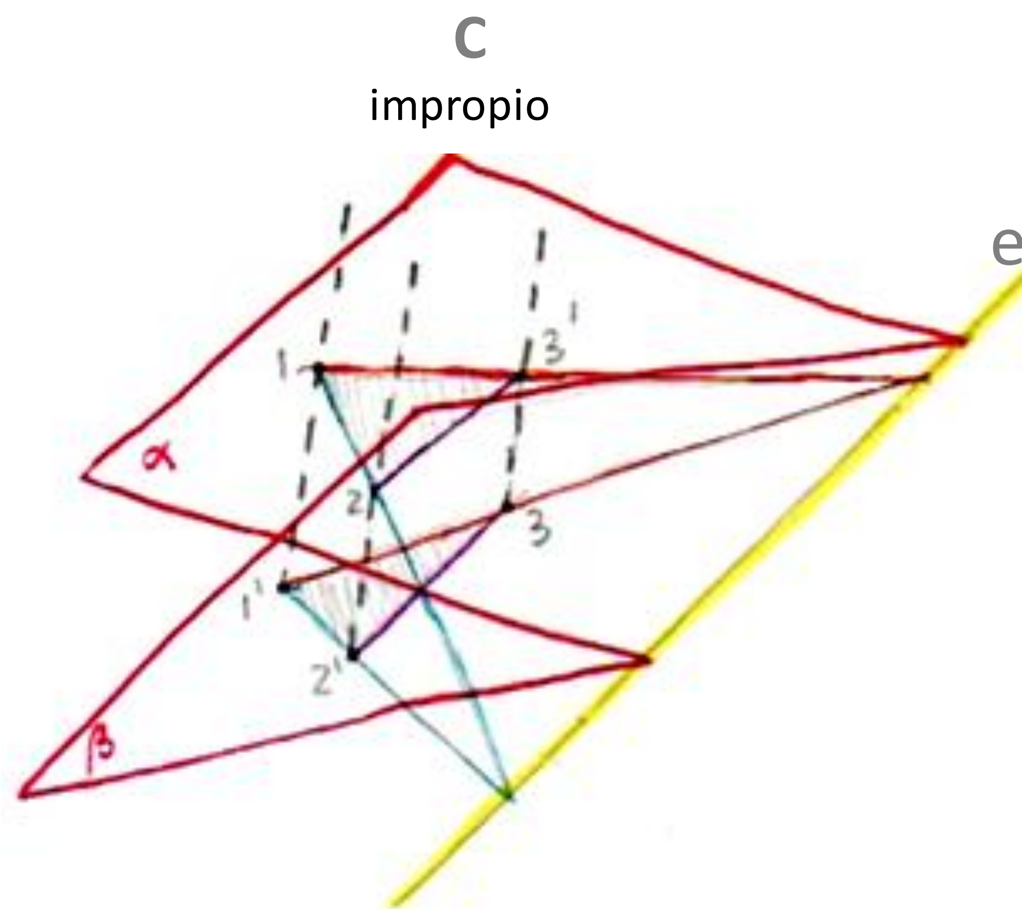
HOMOLOGÍA: es una relación que se establece cuando desde un punto (C) trazamos una radiación de rectas que cortan a dos planos. Las figuras que se forman son homólogas. La intersección de esos dos planos es el eje de homología y C el centro de homología.

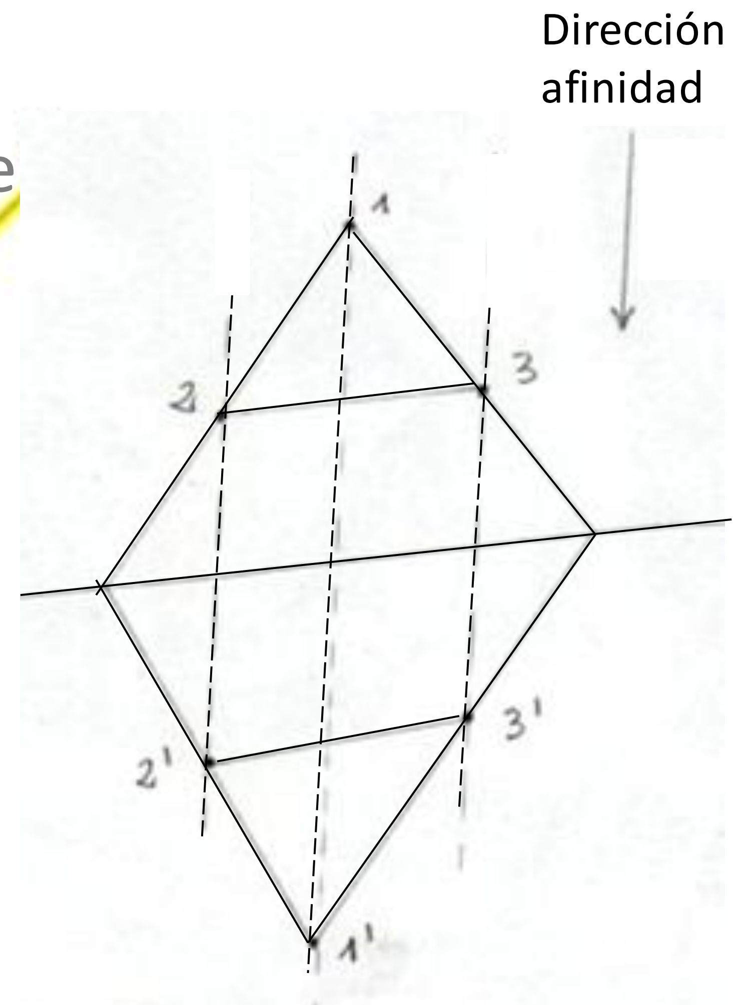


1 y 1' son homólogos, como
2 y 2' y 3 y 3'.

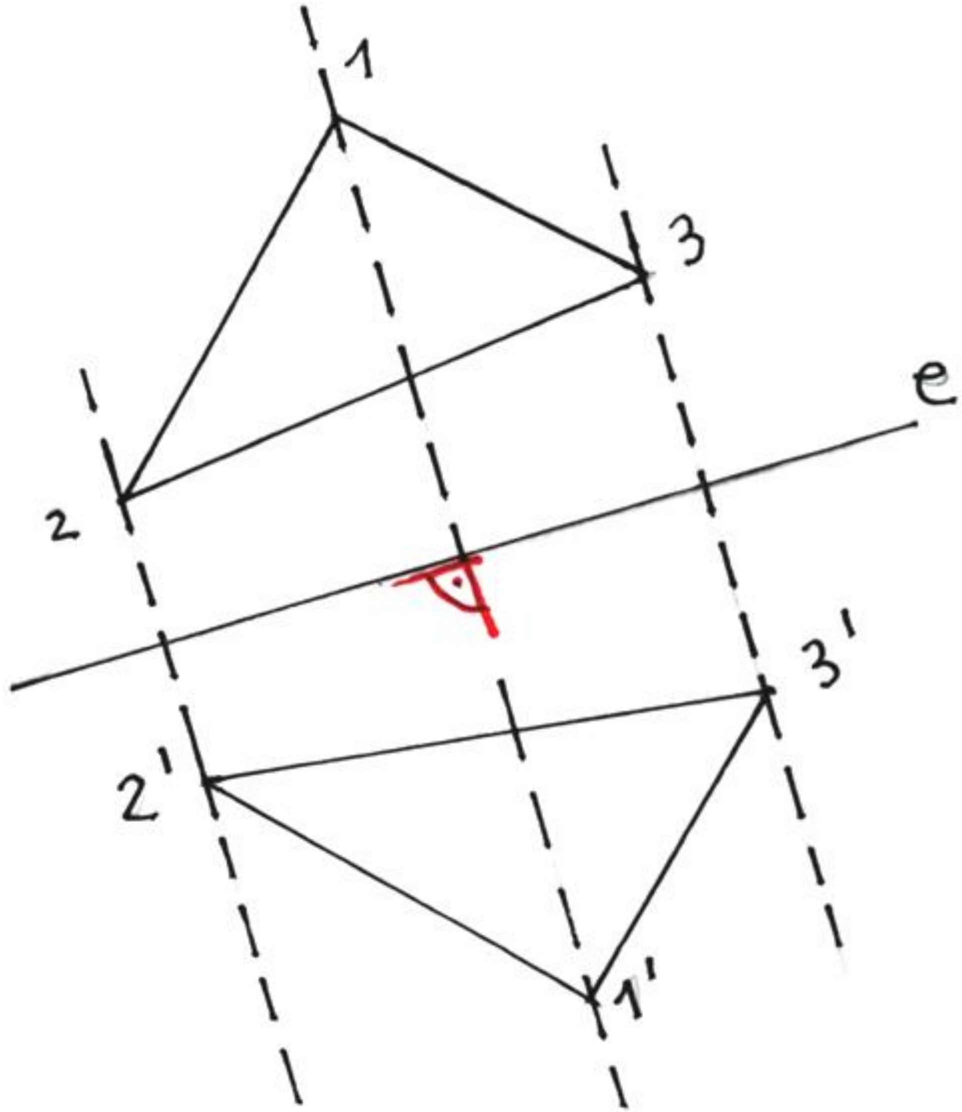


La **AFINIDAD**: es una homología en la que el punto C es un punto impropio, es decir, está en el infinito, y hay una dirección de afinidad.



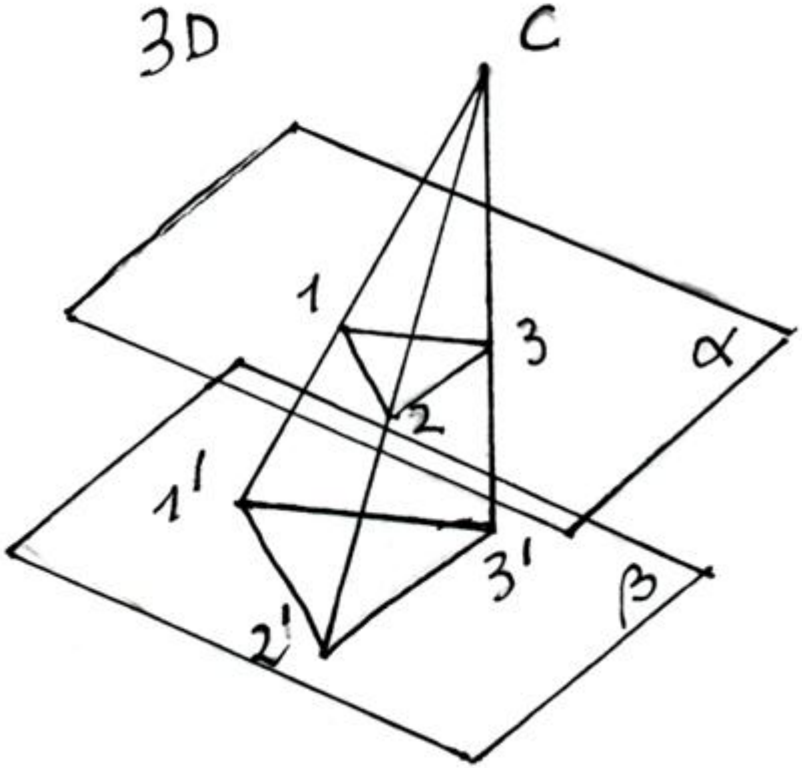


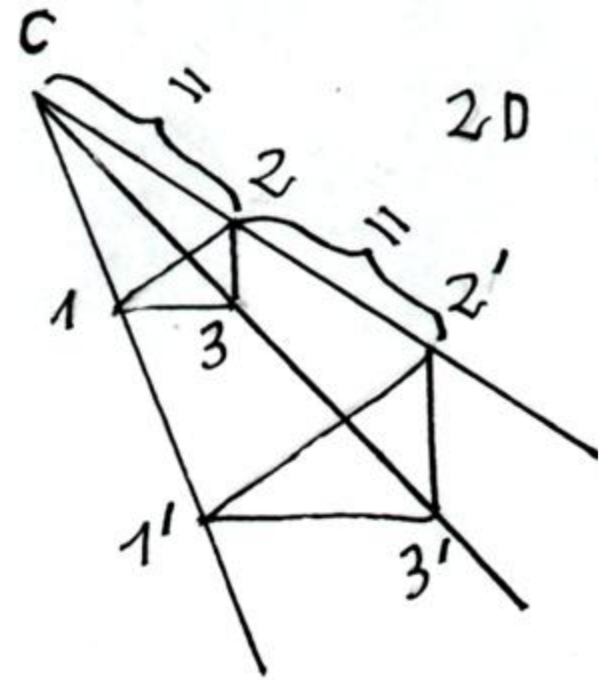
La AFINIDAD ORTOGONAL se da cuando la dirección de afinidad es perpendicular al eje. Y si además, los puntos homólogos equidistan del eje, tenemos una simetría, que es una modalidad de afinidad ortogonal.



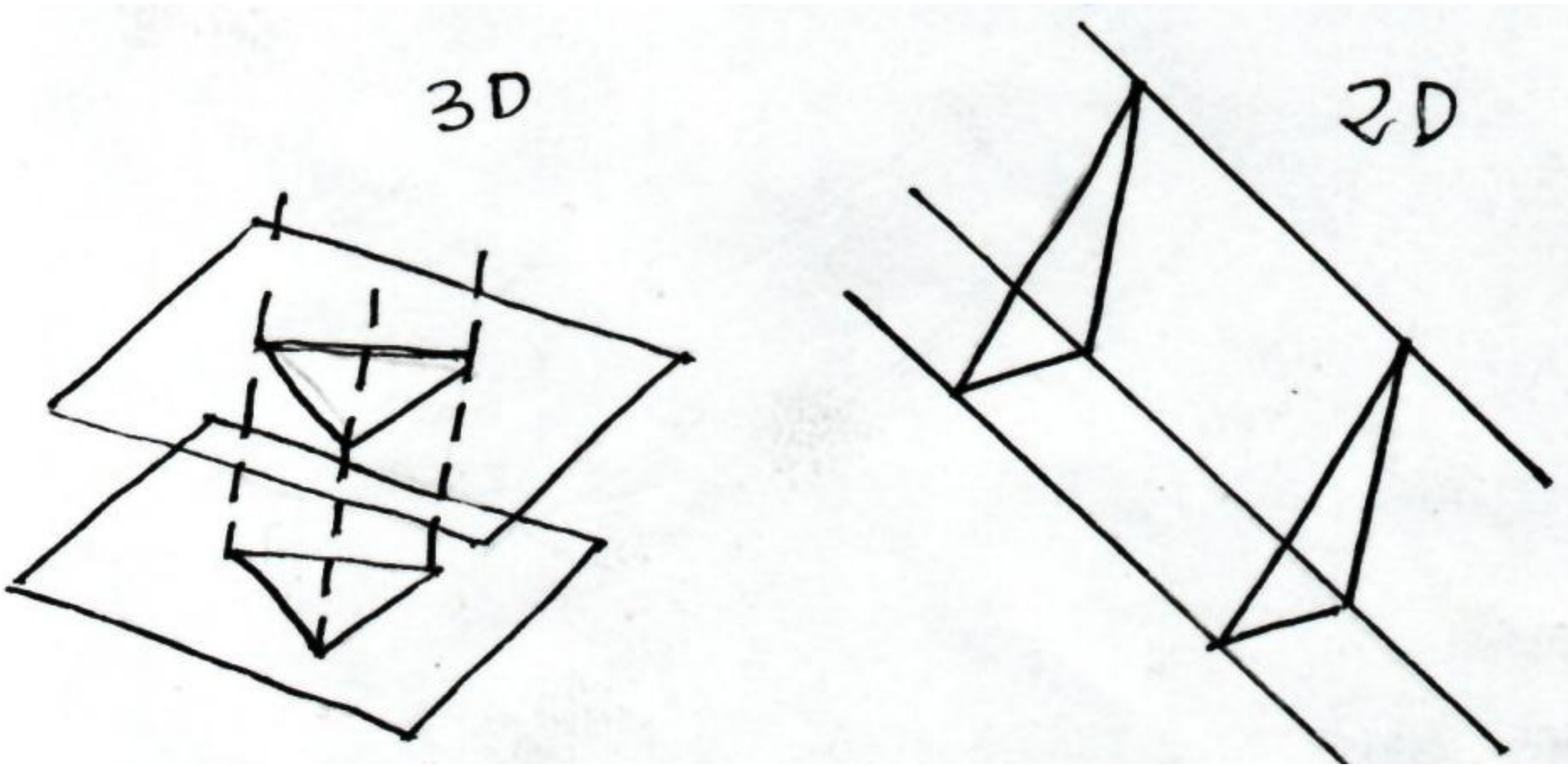
La **HOMOTECIA** es una homología en la que lo que es impropio es el eje de homología, es decir, los planos se cortan en el infinito, es decir, en la práctica no se cortan, son paralelos. Sirve para dibujar figuras proporcionales.

La razón que se usó aquí es 2 : se dobló la distancia, la figura resultante es el doble de la primera. Pero podría ser 2/3 , 1/2 , -2 , etc.





En la **<u>TRASLACIÓN</u>** el eje es impropio, es decir, los planos no se cortan y el centro de homología también es impropio (está en el infinito). Sirve para hacer figuras iguales.



ELEMENTOS DE LA HOMOLOGÍA

Elementos dobres

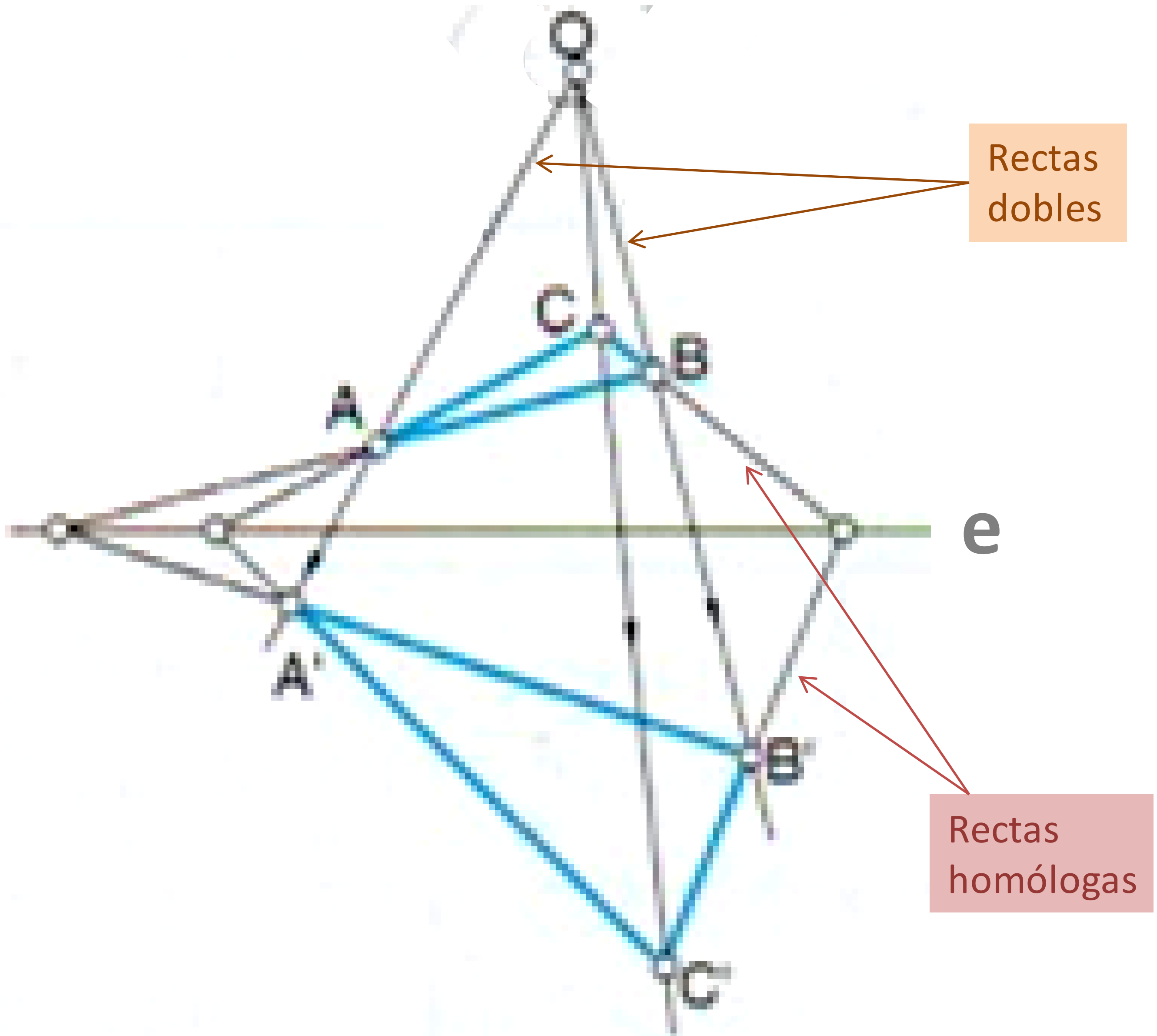
Os elementos que son dobres, é dicir, homólogos de si mesmos, nunha homoloxía son os seguintes:

- Os puntos homólogos están aliñados co centro *O*; logo as rectas que pasan por este punto son dobres, aínda que non o sexan os seus puntos.
- O centro de homoloxía *O* é dobre, xa que é a intersección dun feixe de rectas que son dobres.
- As rectas homólogas córtanse no eixe *e*; logo o eixe de homoloxía é dobre e, ademais, de puntos dobres, posto que os seus puntos pertencen á vez a unha recta e á súa homóloga.

Determinación

Unha homoloxía queda determinada se coñecemos:

- O centro, o eixe e un par de puntos homólogos.
- O centro, o eixe e un par de rectas homólogas.
- Dous triángulos homolóxicos.


O
C
B
A
e
A'
B'
C'
Rectas dobles
Rectas homólogas

REGLAS DE LA HOMOLOGÍA

- Dos puntos homólogos están siempre alineados con el centro de homología.
- Dos rectas homólogas se cortan en el eje de homología.
- Los puntos dobles se encuentran siempre en el eje de homología.

Rectas Límite

Si prolongamos la recta A'C' (que es r'), todos los puntos homólogos de los que se encuentran en ella están sobre su homóloga r. Así tenemos N , homólogo de N'. Si N' estuviera muy lejos (en el infinito), para hallar su homólogo, trazaríamos una **paralela** a la recta r' desde O, que se corta en e (eje de homología) con r (donde están todos los homólogos de r'), es decir, la prolongación de la recta AC. Esta operación se realiza por el principio de que dos rectas paralelas se cortan en el infinito.

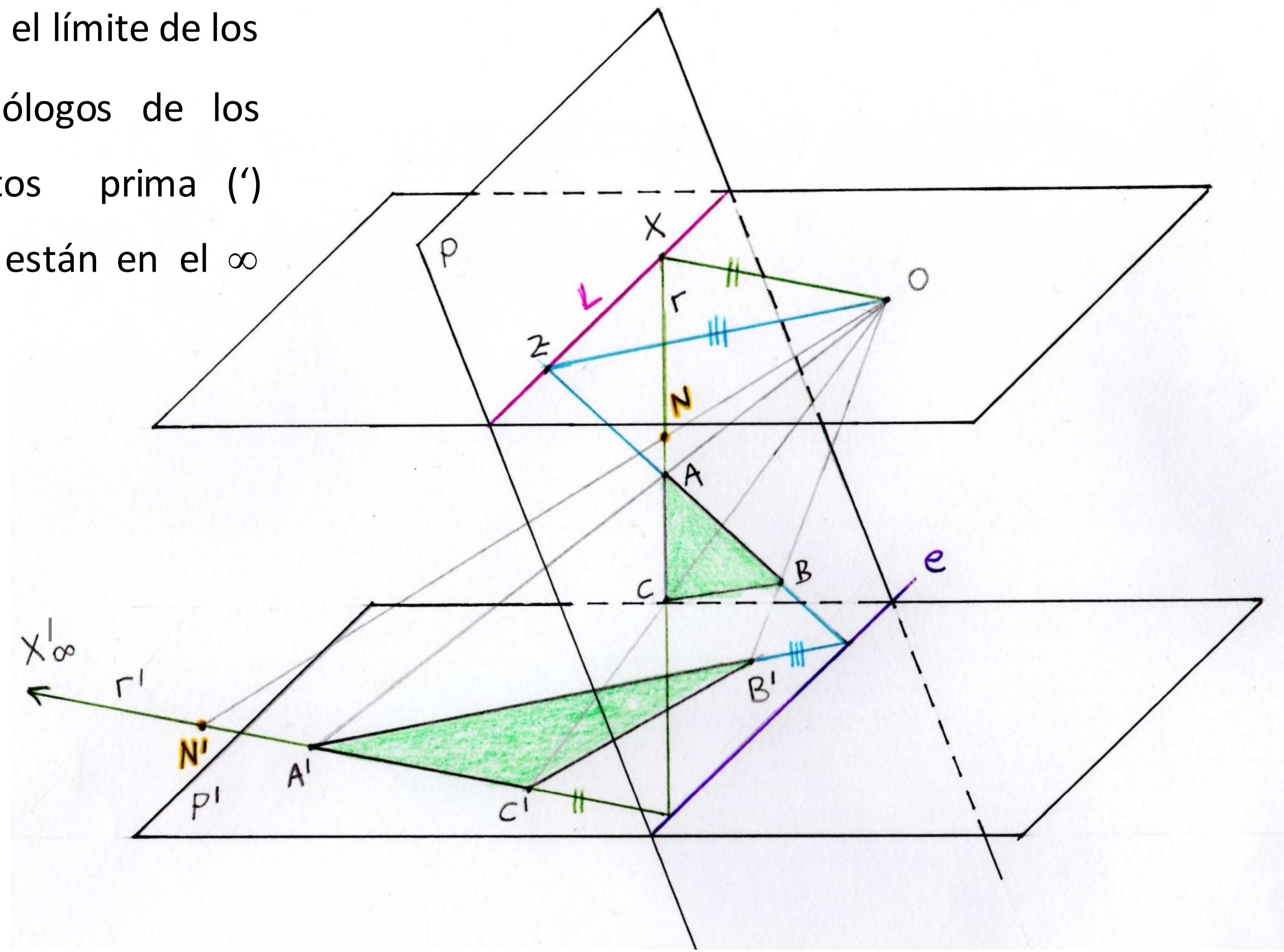
La recta límite L es donde se cortan la recta r con la paralela de su homóloga r'. Es el límite en el que se encuentran todos los puntos cuyo homólogo está en el infinito. Así, por ejemplo, el punto X es el homólogo de un punto de la recta A'C' (r') que se encuentra en el ∞.

La recta límite L también se puede definir como la intersección del plano P con el plano que contiene al centro de homología O y es paralelo a P'.

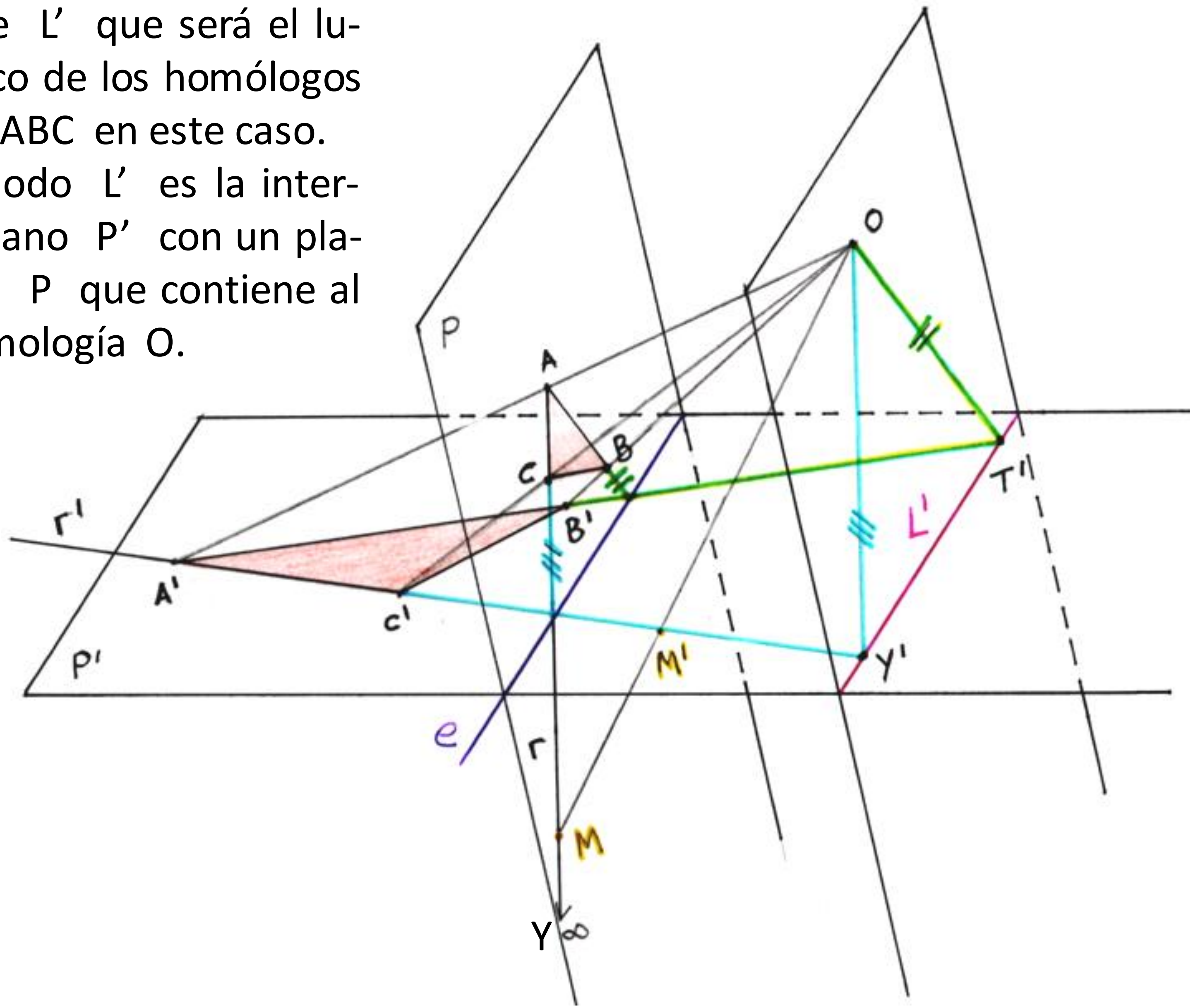
Prolongando el otro lado del triángulo, recta A'B' y trazando desde O una paralela, obtenemos el punto Z en L.

Así, con los dos puntos X y Z, podemos situar la recta límite de los infinitos puntos de las infinitas rectas contenidas en el triángulo $\widehat{A'B'C'}$.

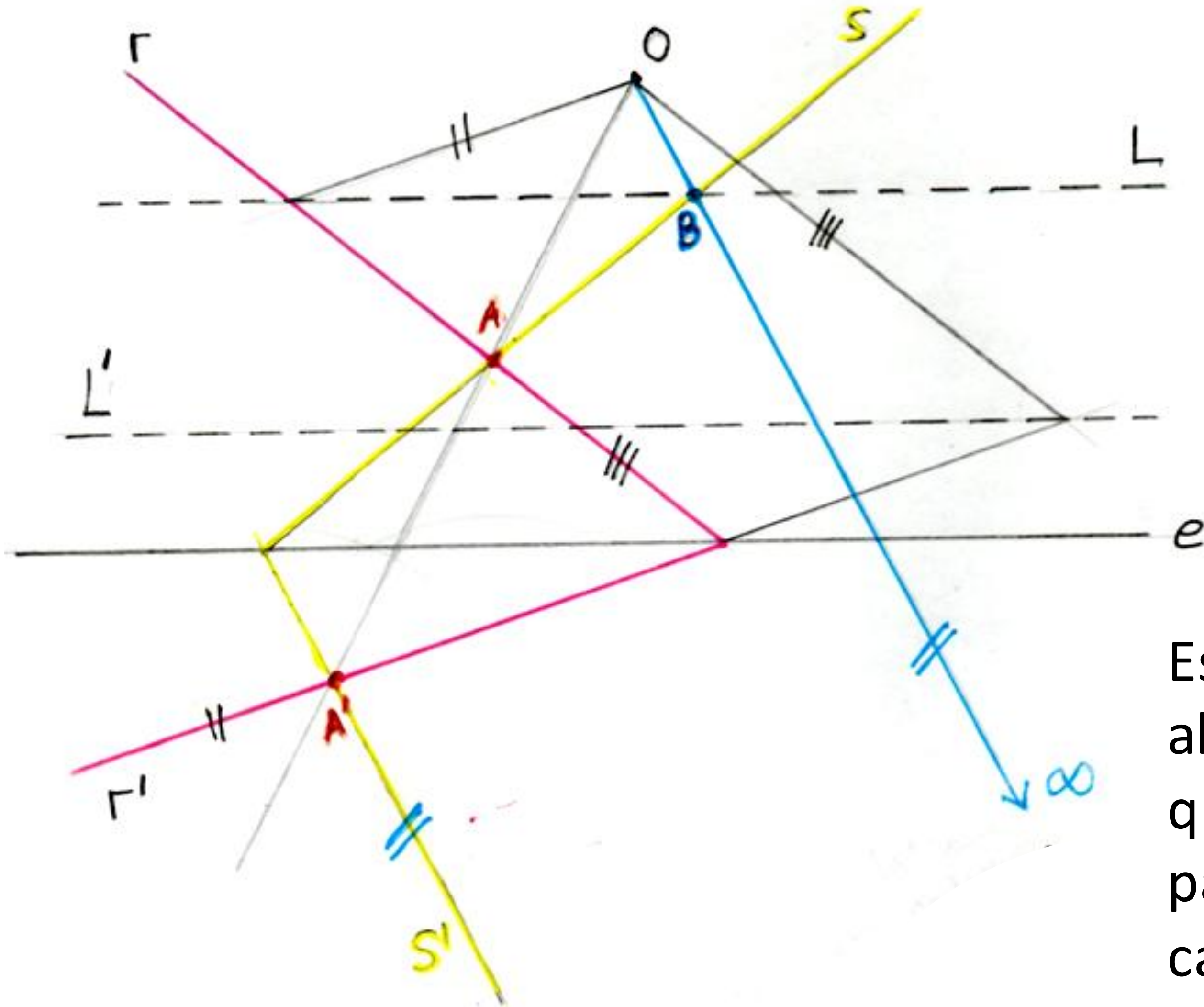
L es el límite de los homólogos de los puntos prima (‘) que están en el ∞



Del mismo modo se puede hallar la recta límite L’ que será el lugar geométrico de los homólogos del triángulo ABC en este caso.
Del mismo modo L’ es la intersección del plano P’ con un plano paralelo al P que contiene al centro de homología O.

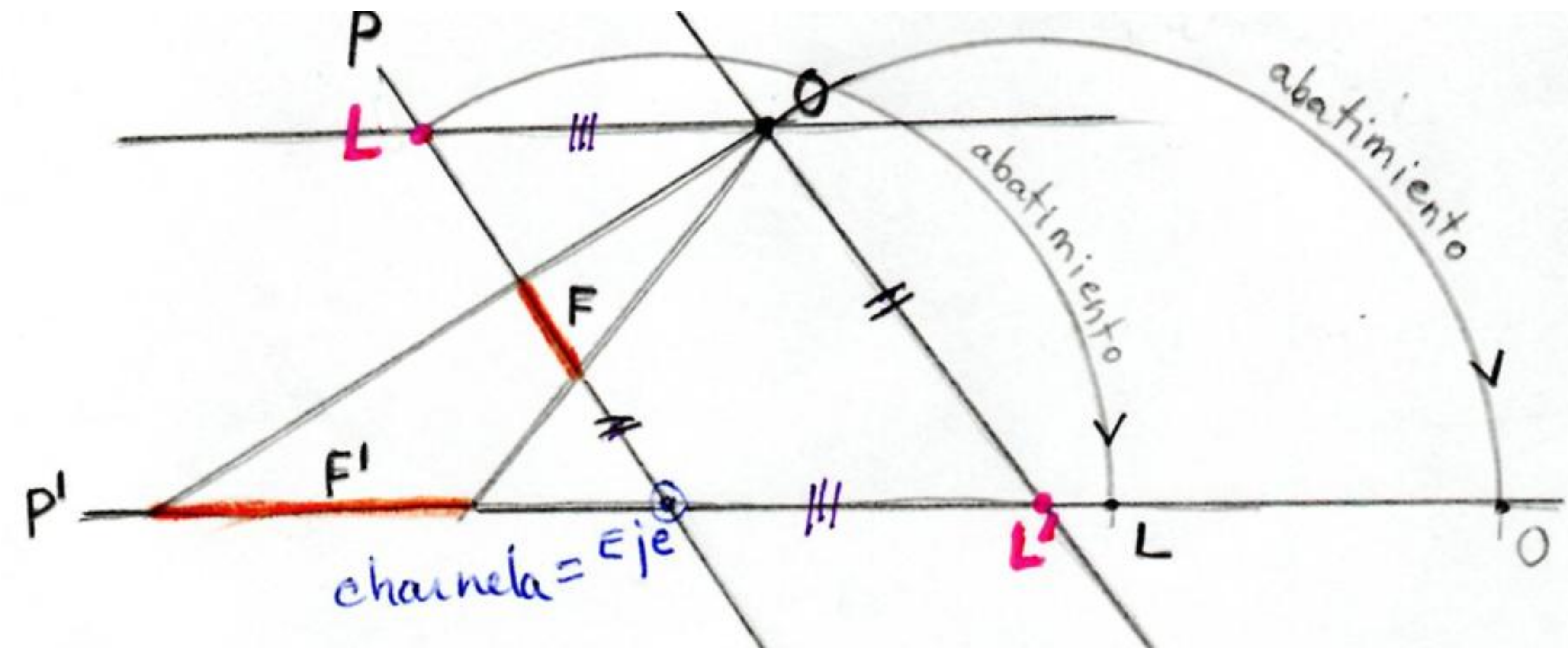


El homólogo de un punto (B) de una recta límite no se puede encontrar porque está en el infinito.



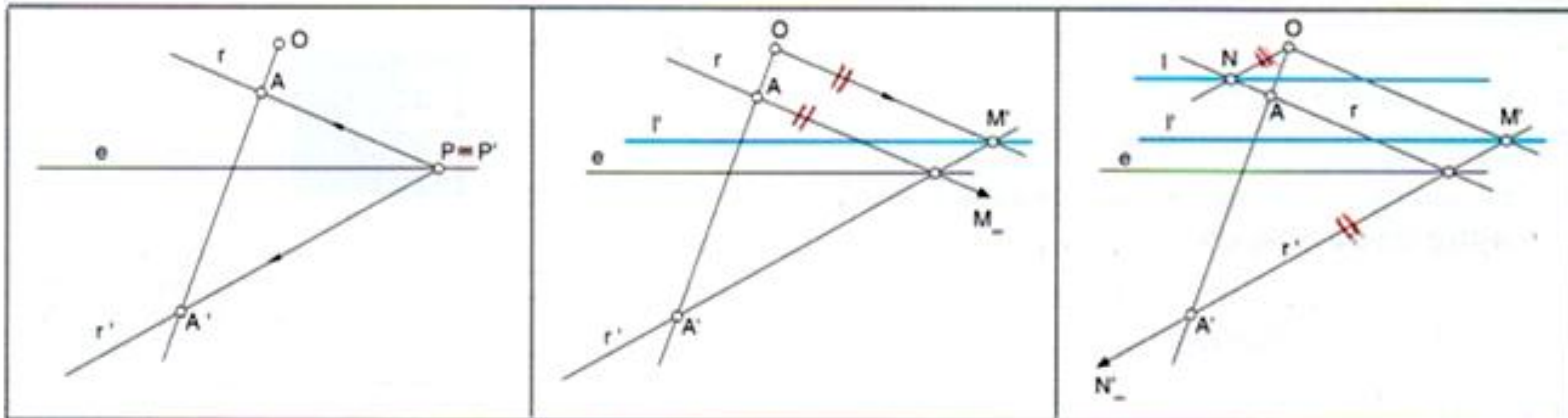
Esto se comprueba al ver que la recta que une O y B es paralela a S' y nunca se encuentran.

Aquí vemos la situación de las dos rectas límite en la vista de perfil.
Para trabajar en el plano en 2D se abate L tomando como charnela el eje de homología, y se abate O tomando como centro del abatimiento L' . De tal modo que la distancia entre el eje y L abatida es igual a la distancia entre L' y O abatido.
En Homología Inversa el abatimiento se realiza hacia la izquierda, en vez de a la derecha (caso que aparece en este dibujo).



Veamos la ubicación de las rectas límite en 2D

Son dúas rectas que constitúen o *lugar xeométrico* dos puntos homólogos do infinito de cada unha das figuras, orixinal e transformada. Así pois, deben ser dúas rectas paralelas ó eixe de homoloxía, xa que se cortan con el no punto impropio.



Sexa a homoloxía definida polo centro *O*, o eixe *e* e o par de puntos homólogos *A* e *A'*.

1. Consideramos *P* = *P'* un punto dobre calquera do eixe e trazamos as rectas homólogas *r* e *r'* que unen *P* = *P'* con *A* e *A'*, respectivamente.

2. Sexa M_∞ o punto *impropio* ou do infinito da recta *r*.

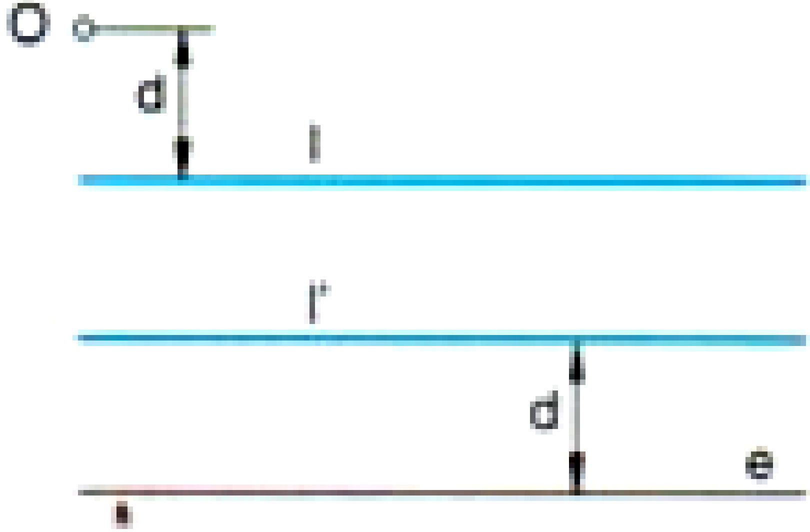
   O seu punto homólogo *M'* é a intersección de *r'* coa paralela a *r* polo centro *O*.

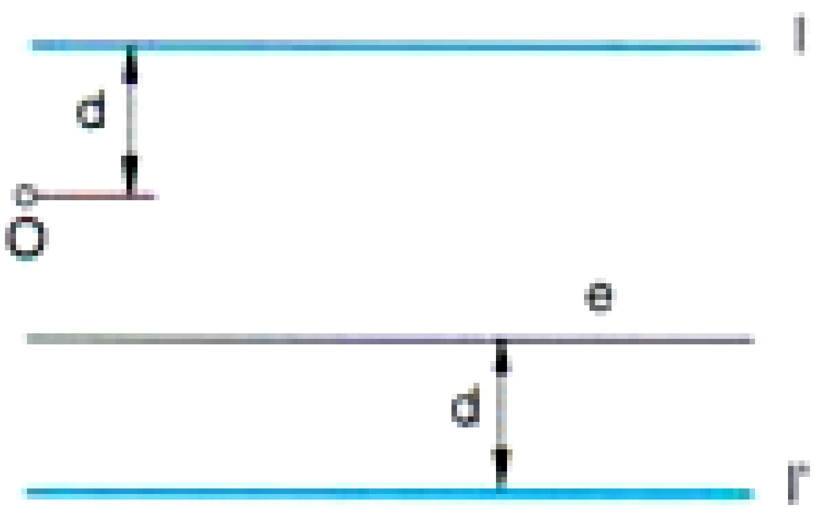
   A paralela ó eixe *e* por *M'* é a recta límite *l'*.

3. Sexa N'_∞ o punto *impropio* ou do infinito da recta *r'*.

   O seu punto homólogo *N* é a intersección de *r* coa paralela a *r'* polo centro *O*.

   A paralela ó eixe *e* por *N* é a recta límite *l*.

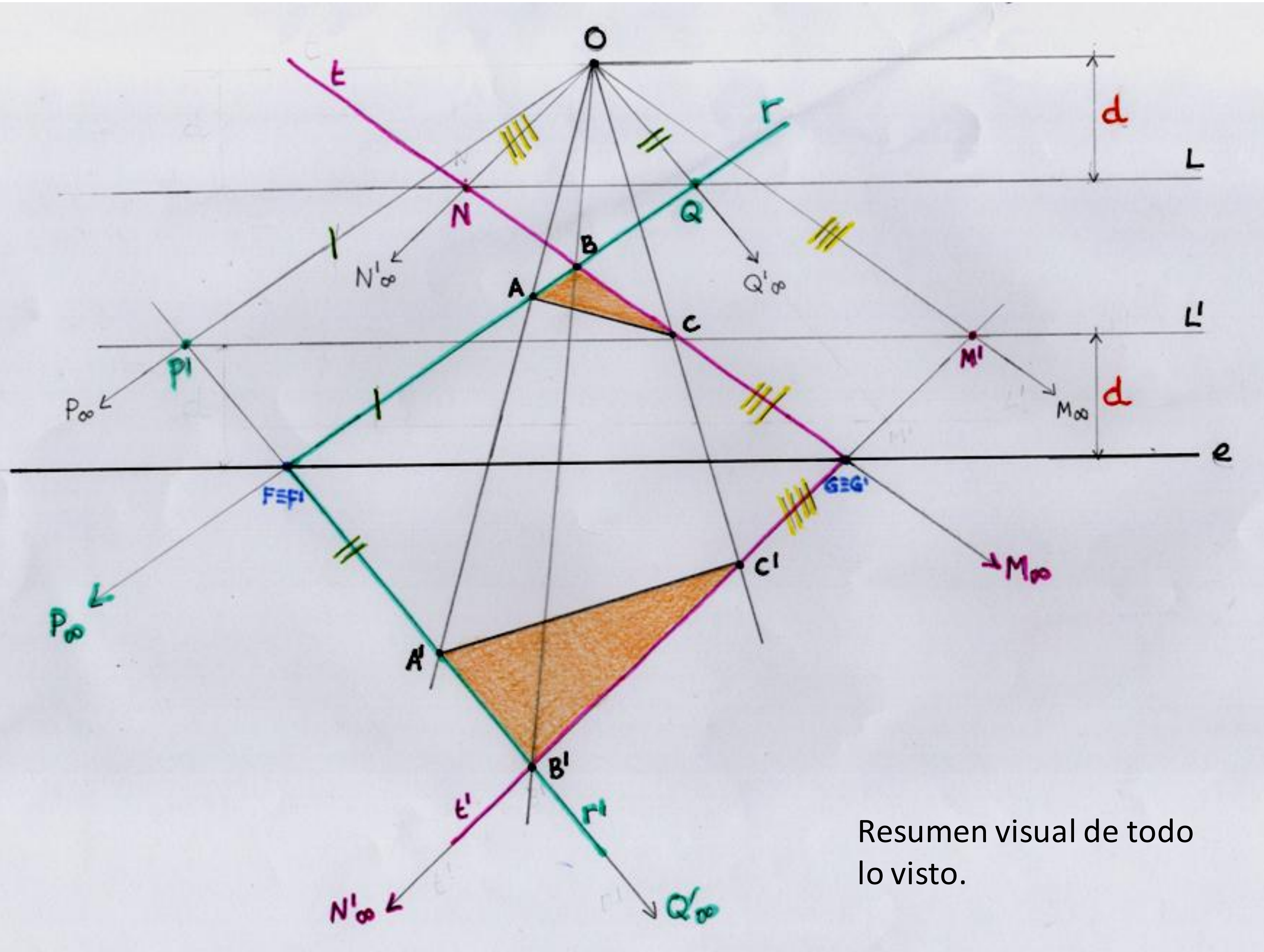




Propiedades de las rectas límite:

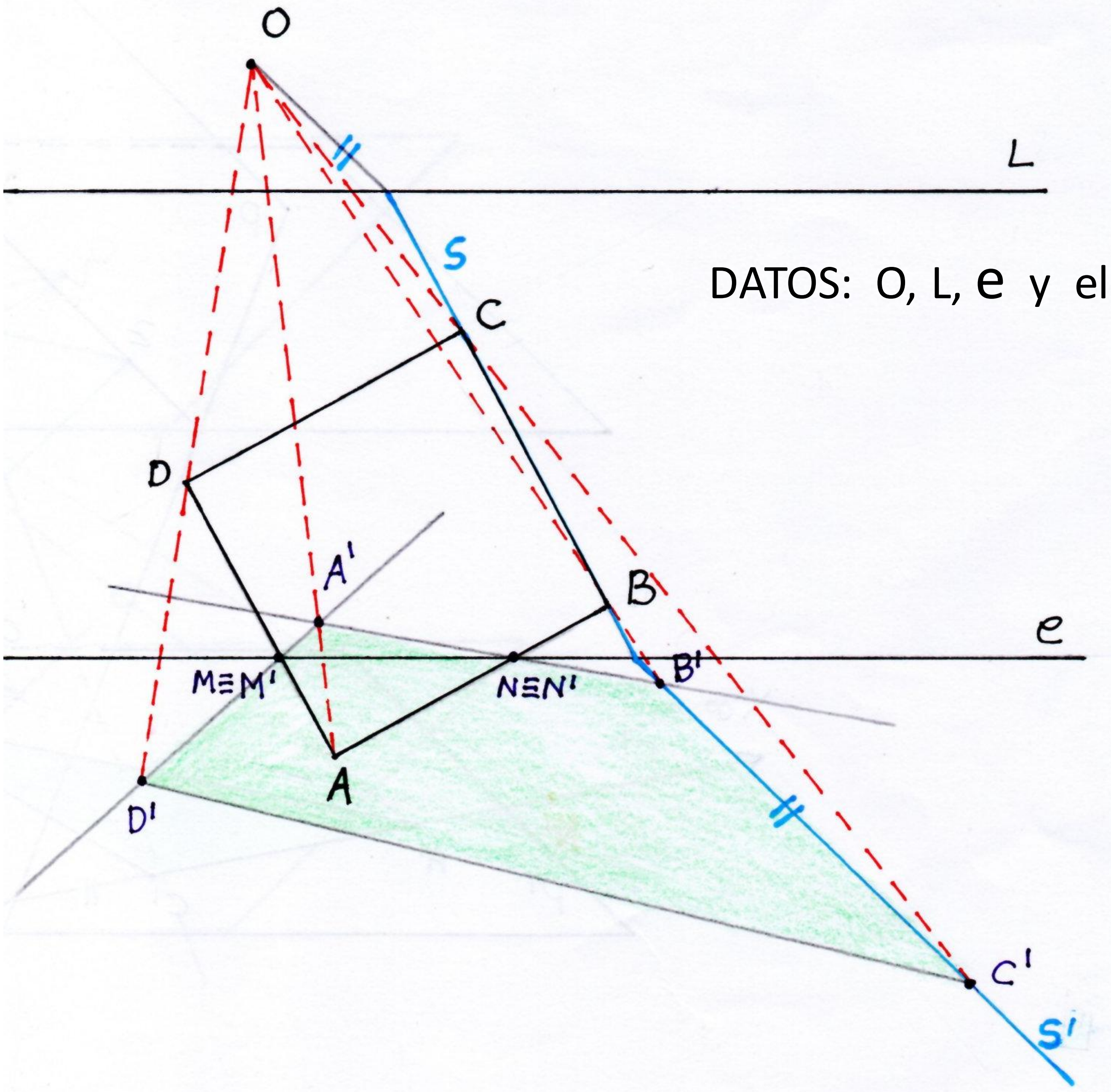
La distancia de L al centro de homología O es siempre igual a la distancia de L’ al eje e.

Las rectas límite pueden ser interiores o exteriores a la región del plano comprendida entre el centro y el eje, verificando así la propiedad anterior de la distancia.



Resumen visual de todo lo visto.

EJERCICIOS DE EJEMPLO



DATOS: O, L, e y el cuadrado ABCD.

Ejemplo de homología de una figura que corta al eje de homología.

Los puntos dobles juegan un papel crucial.

- **Transformar mediante una homología un cuadrilátero cualquiera dado ABCD en un cuadrado.**

CUESTIÓN: ¿cómo calculamos el centro de Homología O ?

Para transformar un cuadrilátero en un cuadrado, los lados homólogos del cuadrilátero deben ser perpendiculares, así como las diagonales homólogas de las diagonales del cuadrilátero.

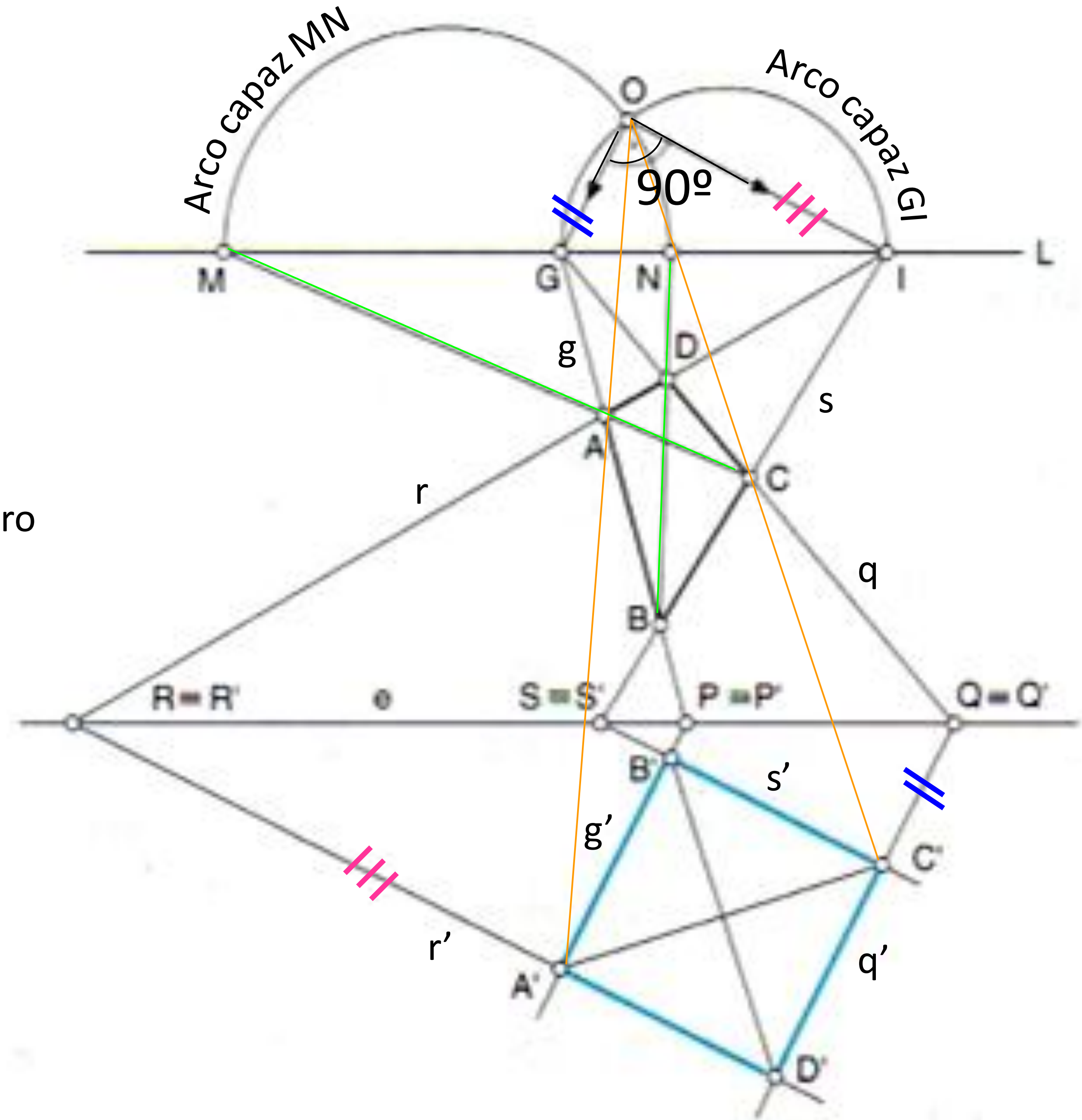
1º - Se prolongan las diagonales del cuadrilátero dado hasta la recta límite L, obteniendo M y N. Cómo las diagonales del cuadrado homólogo deben formar 90º al cruzarse, en la homología las rectas que partan de O hasta M y N deben formar 90ºal cruzarse. Para encontrar O, recurrimos entonces a trazar un arco capaz de 90º entre M y N.

2º - Lo mismo sucede con los lados, por lo que hacemos otro arco capaz de 90º entre G e I. Y dónde se corten ambos arcos tendremos el centro de homología O.

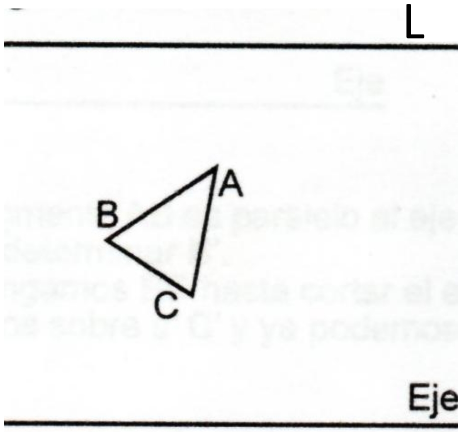
DATOS:

L , e ,

cuadrilátero



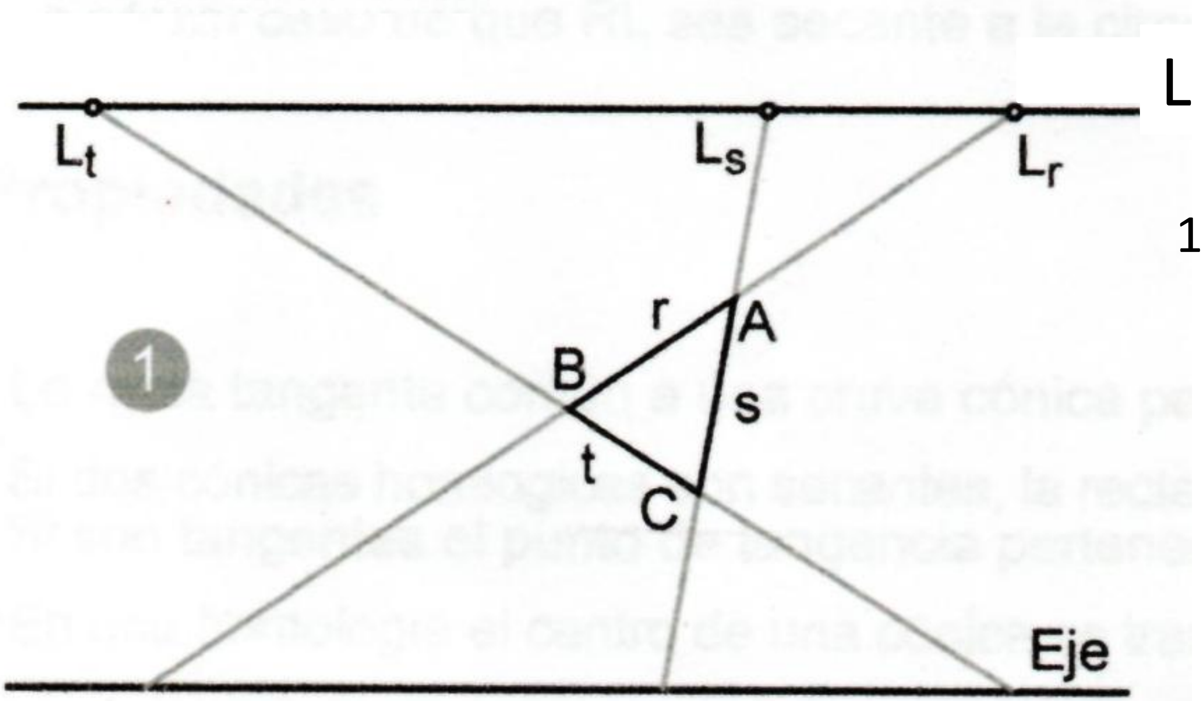
- **Dado el triángulo ABC, la recta límite L y el eje de homología, determinar el triángulo equilátero homólogo.**



DATOS

CUESTIÓN: ¿cómo calculamos el centro de Homología O ?

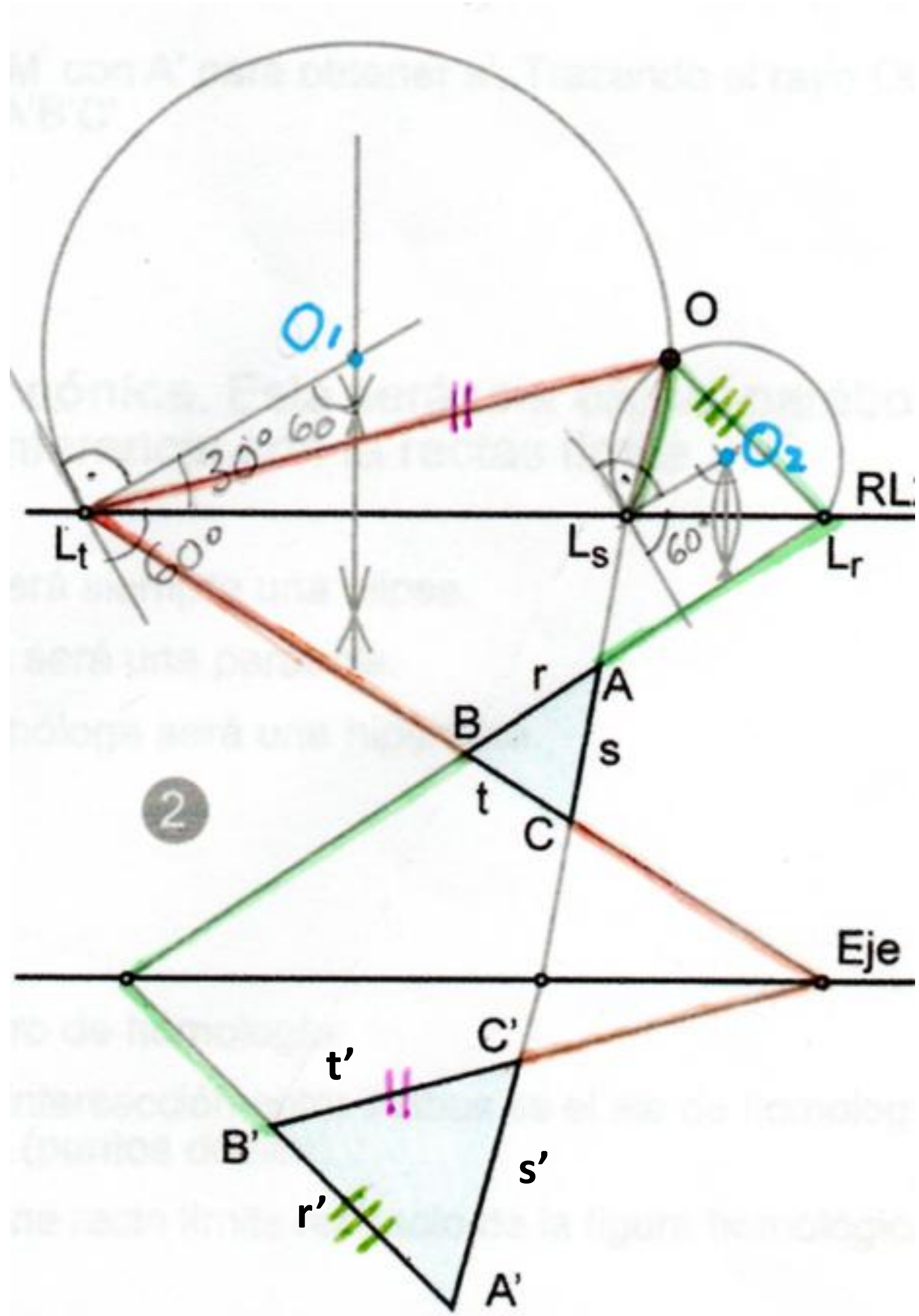
Para ello hay que recordar que los ángulos interiores de un triángulo equilátero son iguales y de 60º.



1º - Prolongamos los lados del triángulo (rectas r, s, t) hasta obtener sus límites en el infinito sobre L.

2º - Trazamos el arco capaz de 60º del segmento Ls-Lr por un lado, y del segmento Lt-Ls por otro. Dónde se corten ambos arcos capaces tendremos el centro de homología O.

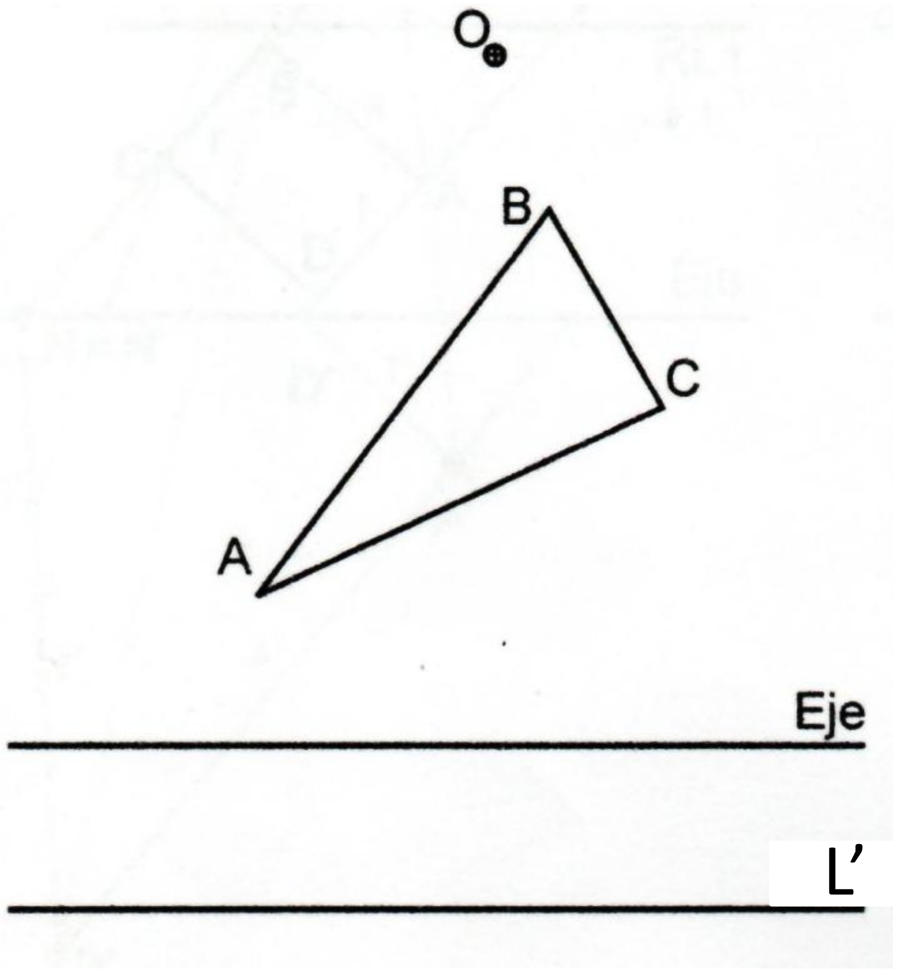
3º - Desde O trazamos las recta que serán paralelas a las homólogas de t, r y s, desde el eje de homología, obteniendo el triángulo equilátero homólogo.



En la HOMOLOGÍA **DIRECTA** los puntos homólogos se encuentran a distinto lado del eje de homología.

En la HOMOLOGÍA **INVERSA** un punto original y su homólogo se encuentran al mismo lado del eje.

EJEMPLO (H. Inversa): Se conoce el centro O, el eje y la recta límite L'. Determinar el triángulo homólogo.

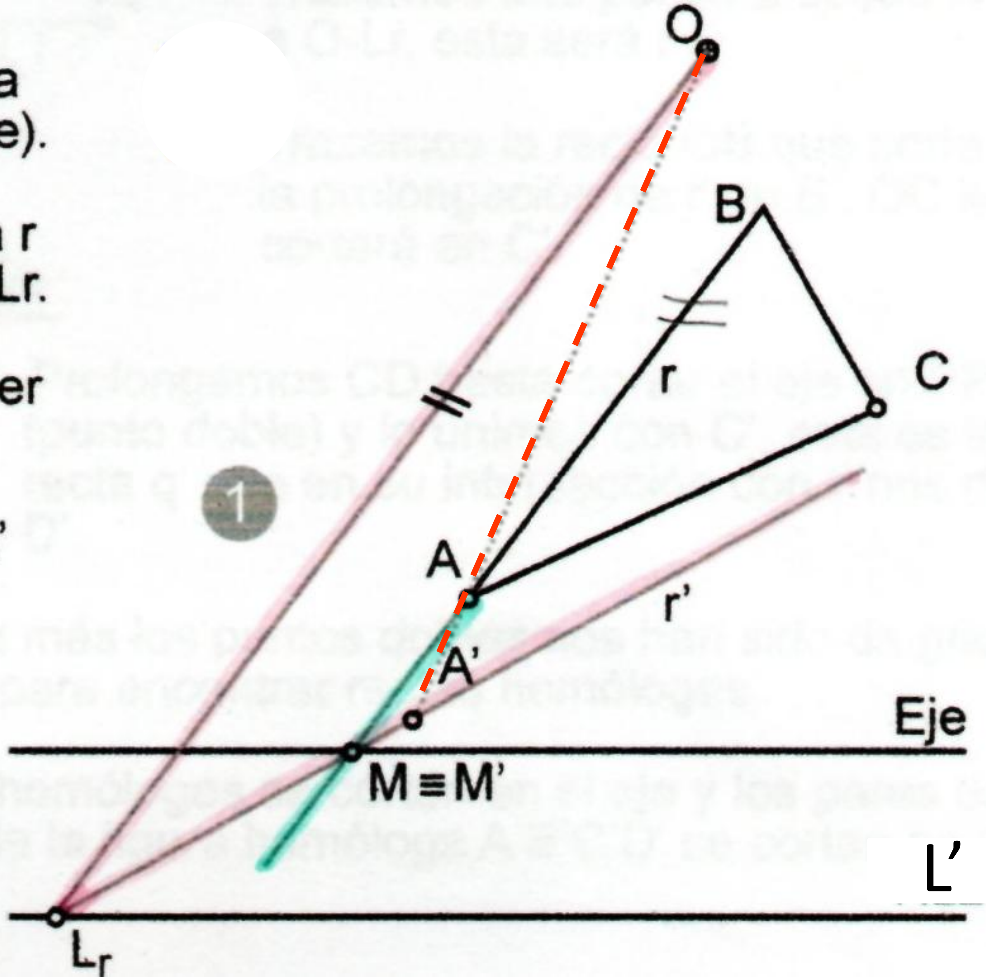


1º- Prolongamos AB (recta r) hasta cortar el eje en MM'(punto doble).

Trazamos por O una paralela a r cortando en RL2 para obtener Lr.

Unimos Lr con MM' para obtener r.'

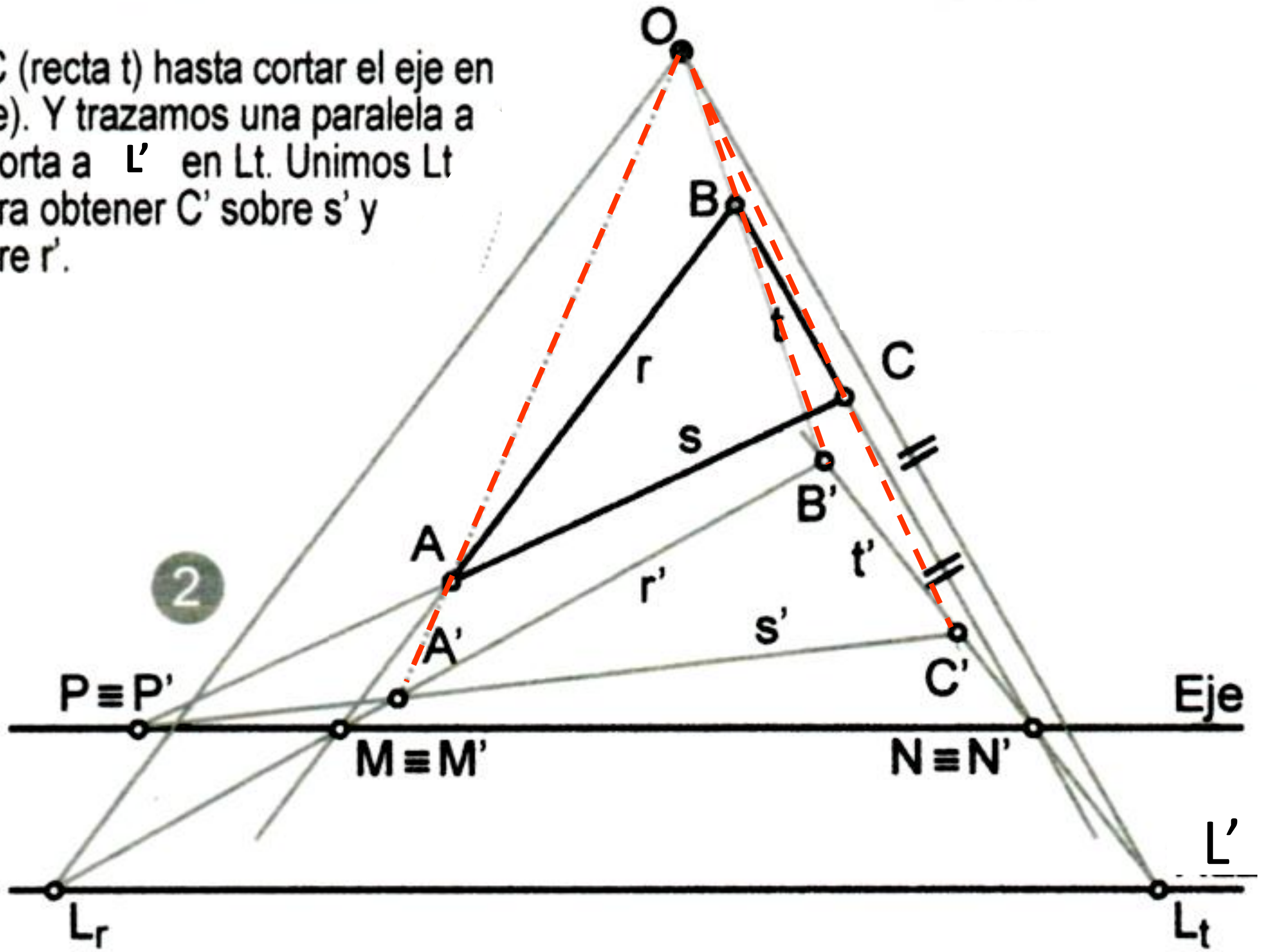
Uniendo O con A obtenemos A' sobre r'.



2º- Prolongamos AC (recta s) hasta cortar el eje en PP' (punto doble).

Uniendo P' con A' obtenemos la recta s'.

Prolongamos BC (recta t) hasta cortar el eje en NN' (punto doble). Y trazamos una paralela a t por O que corta a **L'** en Lt. Unimos Lt con NN' para obtener C' sobre s' y A' sobre r'.



Cónicas homológicas de una circunferencia

La figura homológica de una circunferencia es una cónica que depende de la posición relativa de la circunferencia y su recta límite:

- Si la recta límite es exterior, la figura homológica es una elipse.
- Si la recta límite es tangente, la figura homológica es una parábola.
- Si la recta límite es secante, la figura homológica es una hipérbola.

Propiedades

- La tangente común a una cónica y a su homóloga pasa por el vértice de homología.
- Si dos cónicas homológicas se cortan, la recta que une los puntos de intersección es el eje de homología; si son tangentes, la tangente común es el eje.
- En una homología, el centro de una cónica se transforma en el polo de la recta límite respecto de la figura homológica.

ELIPSE HOMOLÓGICA

Sea la circunferencia de centro *O*, un eje *e*, la recta límite *l* y el vértice *V* (fig. 12):

Determinación del polo.

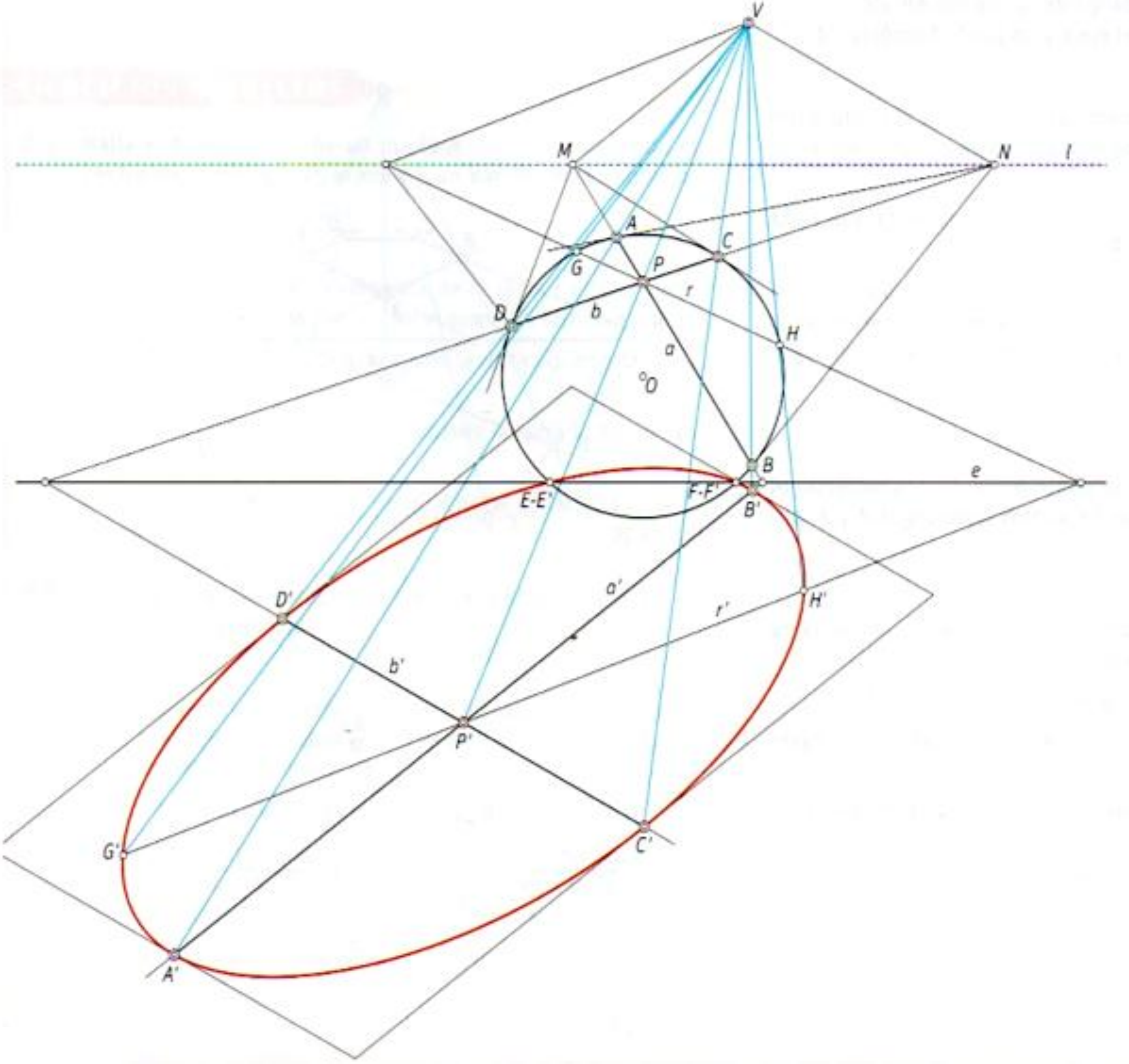
1. Se elige un punto *M* de la recta límite *l* y se trazan las tangentes a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia son *C* y *D*.
2. Se unen *C* y *D* hasta cortar a la recta límite en *N*, y desde este se trazan dos tangentes cuyos puntos de tangencia son *A* y *B*.
3. La intersección *P* de las rectas *AB* y *CD* es el polo *P*.

Diámetros conjugados de la elipse.

4. Son los segmentos homólogos de *AB* y *CD*: por la intersección de la recta *AB* con el eje se traza la paralela a *VM*, y por la intersección de *CD* con el eje se traza la paralela a *VN*. El homólogo *P'* del polo *P* es el centro de la elipse homóloga.

Trazado de la elipse.

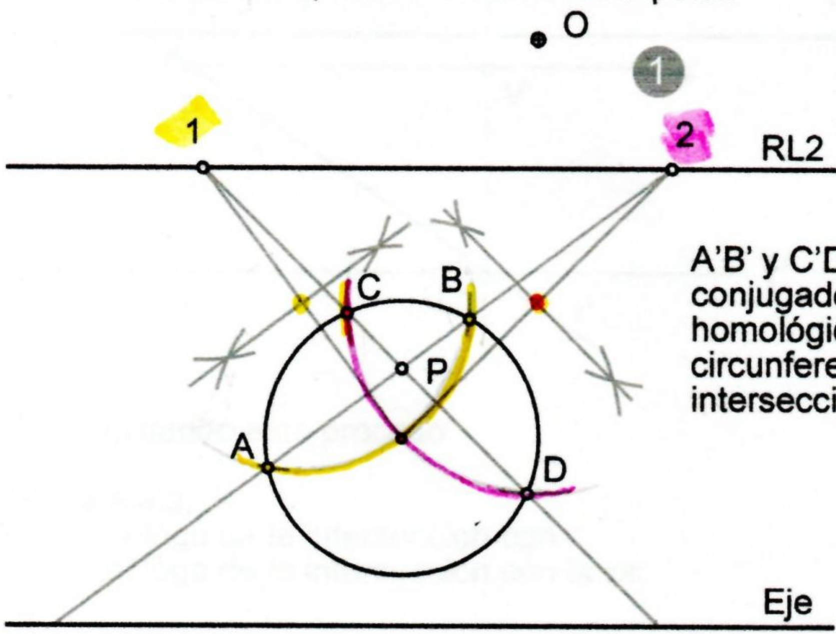
5. Por *P* se traza cualquier recta *r* que corta a la circunferencia en *G* y *H*. Con la homóloga *r'*, *G'* y *H'* son puntos de la elipse.
6. Los puntos *E-E'* y *F-F'* de intersección de ambas cónicas con el eje son puntos dobles.


V
M
N
l
A
C
G
P
r
D
b
H
a
O
B
e
E-E'
F-F'
B'
a'
D'
H'
r'
b'
P'
G'
C'
A'

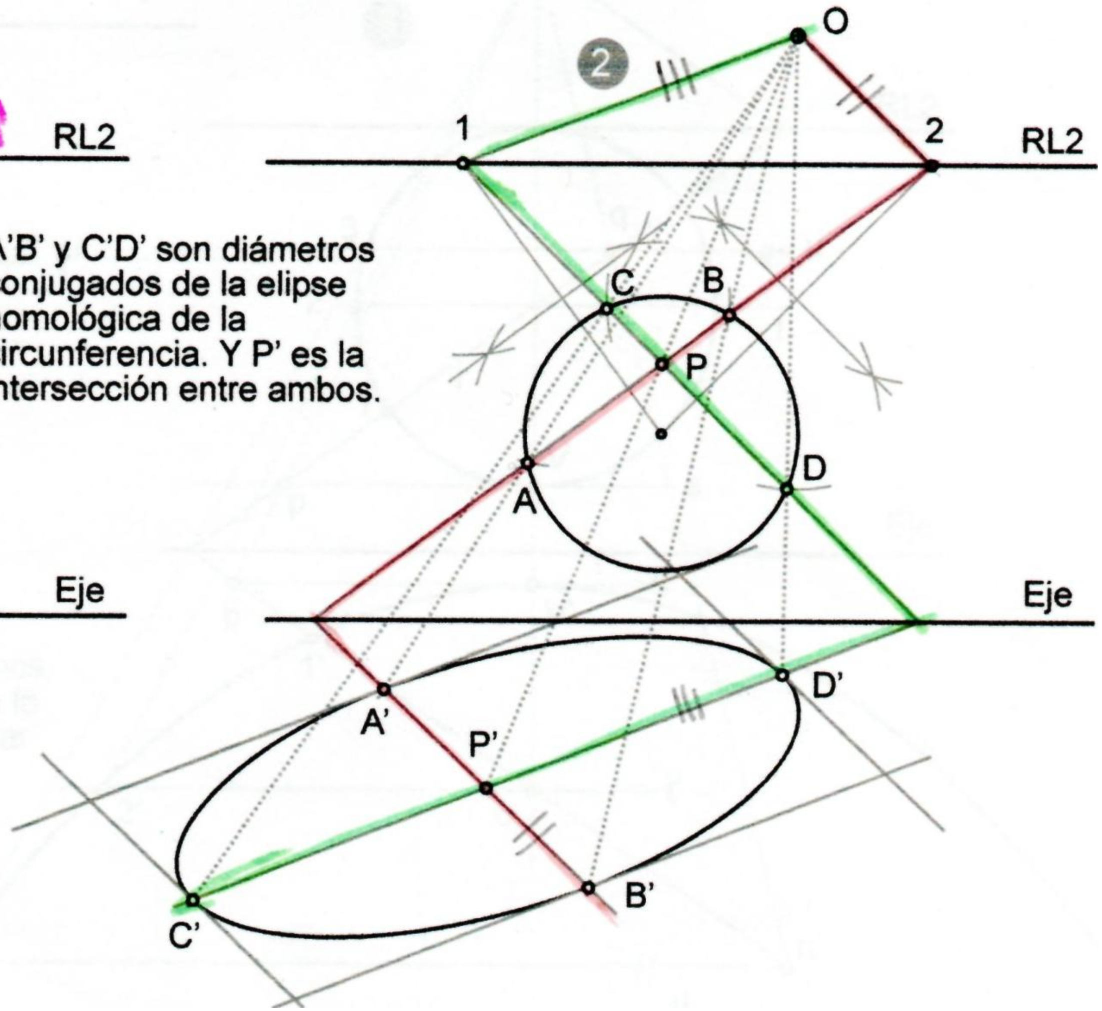
Otra manera de hallar los diámetros conjugados

1º- Elegimos un punto al azar 1 (desplazado de la perpendicular del centro a la RL2) sobre RL2 a partir del cual trazaremos las rectas tangentes a la cir. dada. No trazamos las rectas tangentes pero si hallamos los puntos de tangencia A y B.

Unimos A con B oteniendo sobre RL2 el punto 2, a partir del cual repetimos la operación (rectas tangentes pto.-cir.) hallando C y D prolongando CD nos encontraremos en RL2 con el punto 1. La intersección de CD con AB es el Polo de la circunferencia, siendo RL2 su recta polar.



A'B' y C'D' son diámetros conjugados de la elipse homológica de la circunferencia. Y P' es la intersección entre ambos.

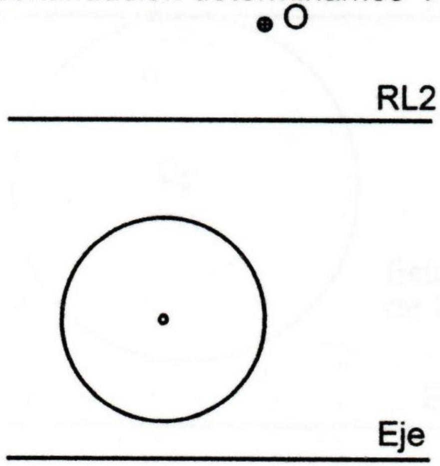


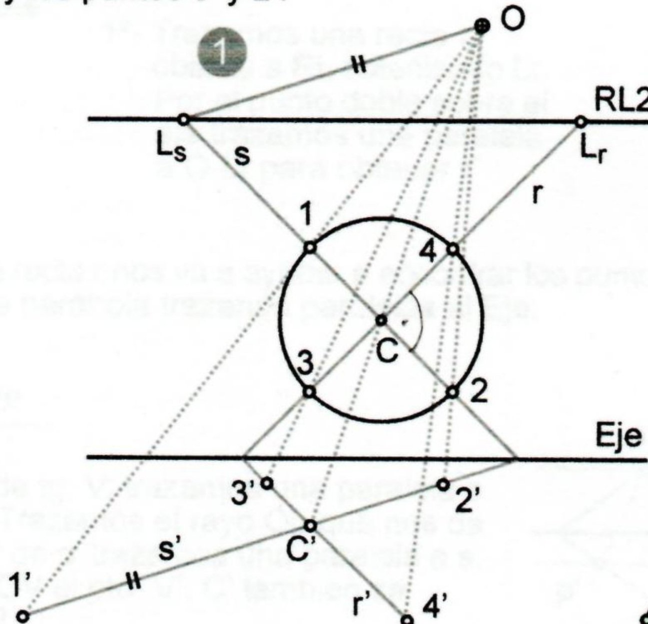
2º- De este modo solo tenemos que determinar A'B' y C'D' para a partir de ahí emplear cualquiera de los multiples métodos que existen para trazar una elipse a partir de los diámetros conjugados o de una "caja" axonométrica.

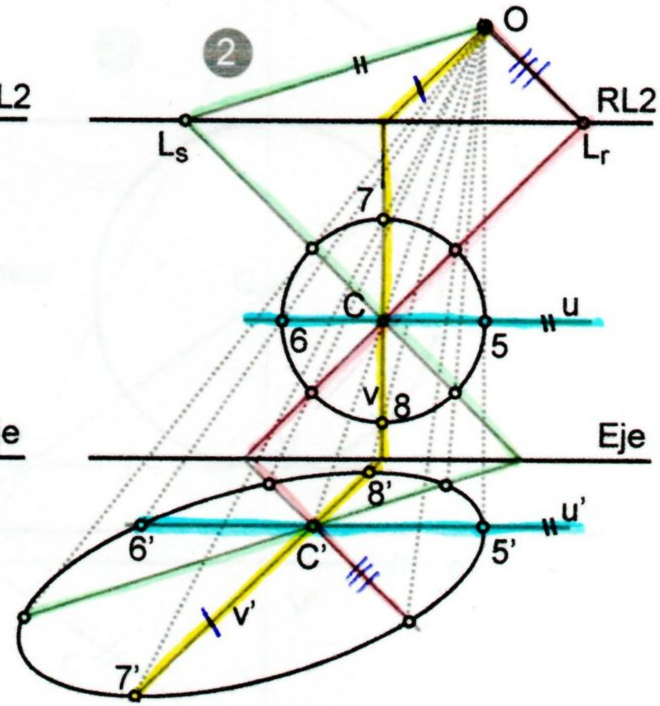
Por el método general, sin hallar los diámetros conjugados

Para resolver este ejercicio vamos a aplicar los convencionalismos o leyes generales de la homología, trazando diámetros y sus homólogos para obtener sobre ellos puntos homólogos que deteminen la elipse.

1º- Trazamos dos diámetros, r y s, que cortan a RL2 al eje obtenemos la homóloga de s trazando desde su punto doble sobre el eje una paralela a O-Ls. Asó podemos trazar los rayos correspondientes que nos dan 1', C' y 2'. A continuación determinamos r' y los puntos 3' y 2'.







Podemos repetir esta operación con tantos diámetros como queramos. Siempre podremos determinar 2 puntos de la figura transformada.

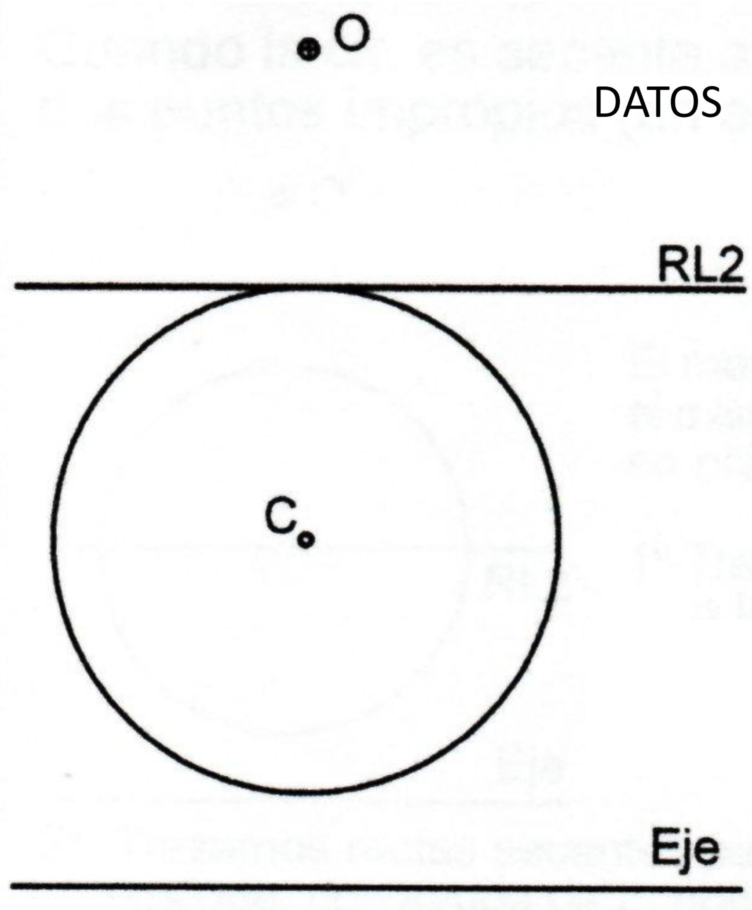
2º- Trazamos otros dos diámetros, en este caso uno es perpendicular a RL y al eje y el otro es paralelo. Así determinamos dos puntos más de la elipse homológica de la circunferencia y podemos trazarla a mano alzada.

De este modo no conseguimos puntos distribuidos equitativamente sobre la elipse lo cual dificulta su trazado a mano alzada. Podemos observar que ninguno de los diámetros homológicos son ejes o diámetros conjugados de la elipse (en cualquiera de estos dos casos se cortarían por su punto medio). Y lo ideal sería obtener los ejes de la elipse o los diametros conjugados para trazar la elipse mediante cualquiera de sus métodos. Convirtiendo la recta límite en polar de la circunferencia y encontrando su polo podemos conseguir esto.

Son los casos anteriores.

PARÁBOLA HOMOLÓGICA

CASO: Cuando el centro de la circunferencia está alineado con el centro de homología.

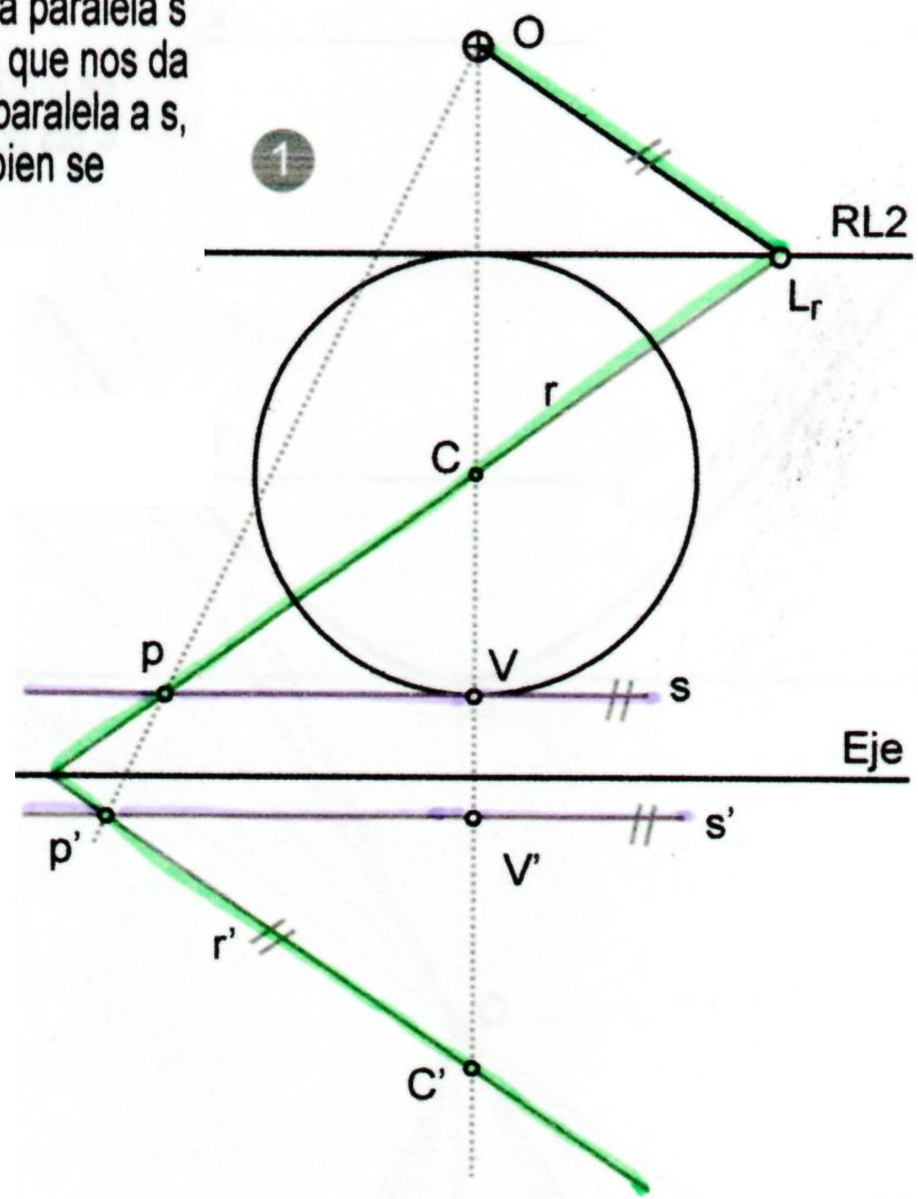


Cuando la circunferencia es tangente a la recta límite, el homólogo del punto de tangencia es un punto impropio (en el infinito).

1º- Trazamos una recta r, oblicua a RL obteniendo Lr. Por el punto doble sobre el eje trazamos una paralela a O-Lr para obtener r'

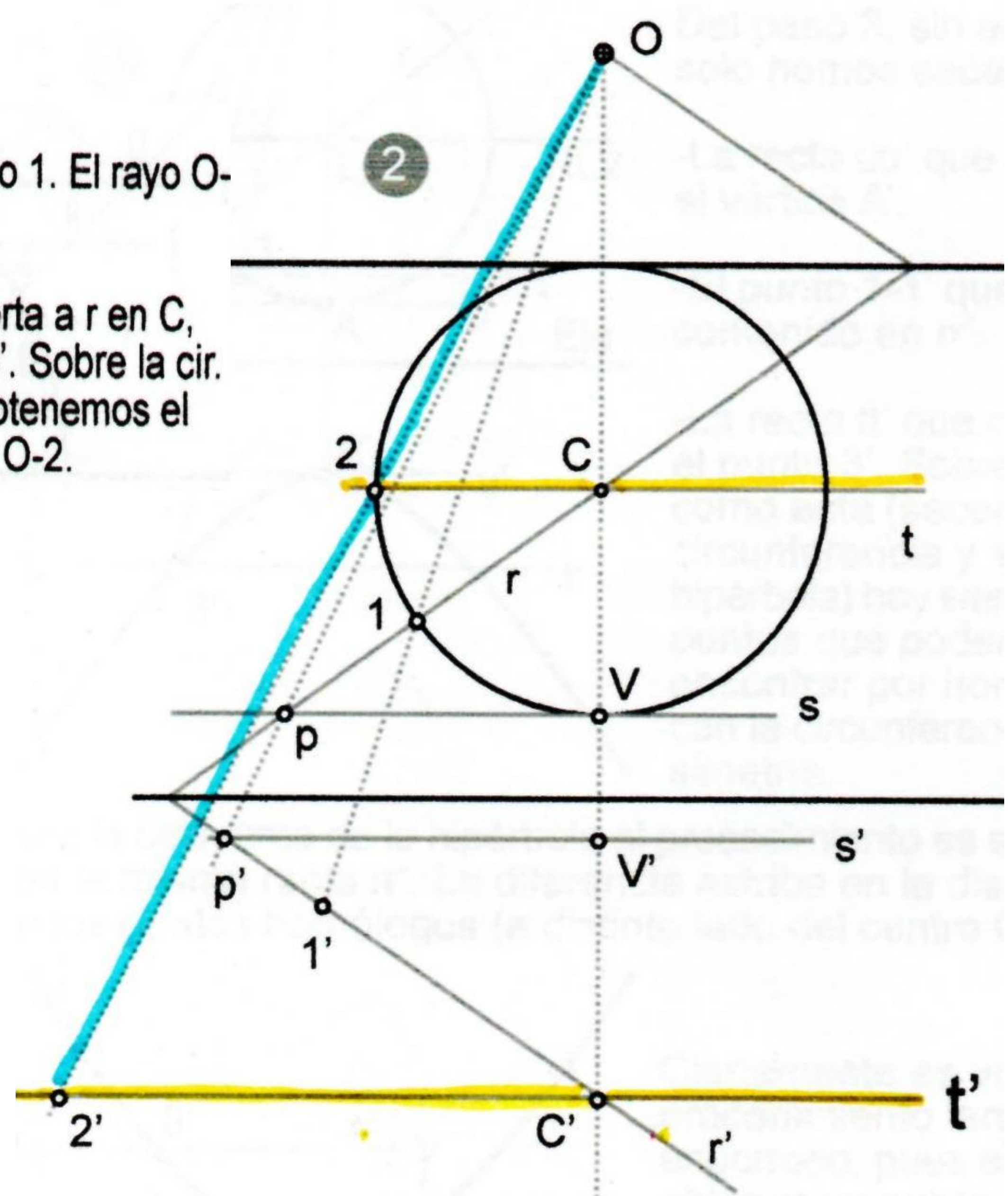
Esta recta r nos va a ayudar a encontrar los puntos de la parábola trazando paralelas al Eje.

Por el extremo opuesto al pto de tg, V, trazamos una paralela s que nos da sobre r el punto p. Trazamos el rayo Op que nos da sobre r' el homólogo p'. A partir de p' trazamos una paralela a s, s', que nos dara sobre el rayo OV el pto. V'. C' tambien se encuentra sobre r' y el rayo OR.



2º- Sobre la recta r y la cir. vemos el punto 1. El rayo O-1 nos da sobre r' el pto. 1'.

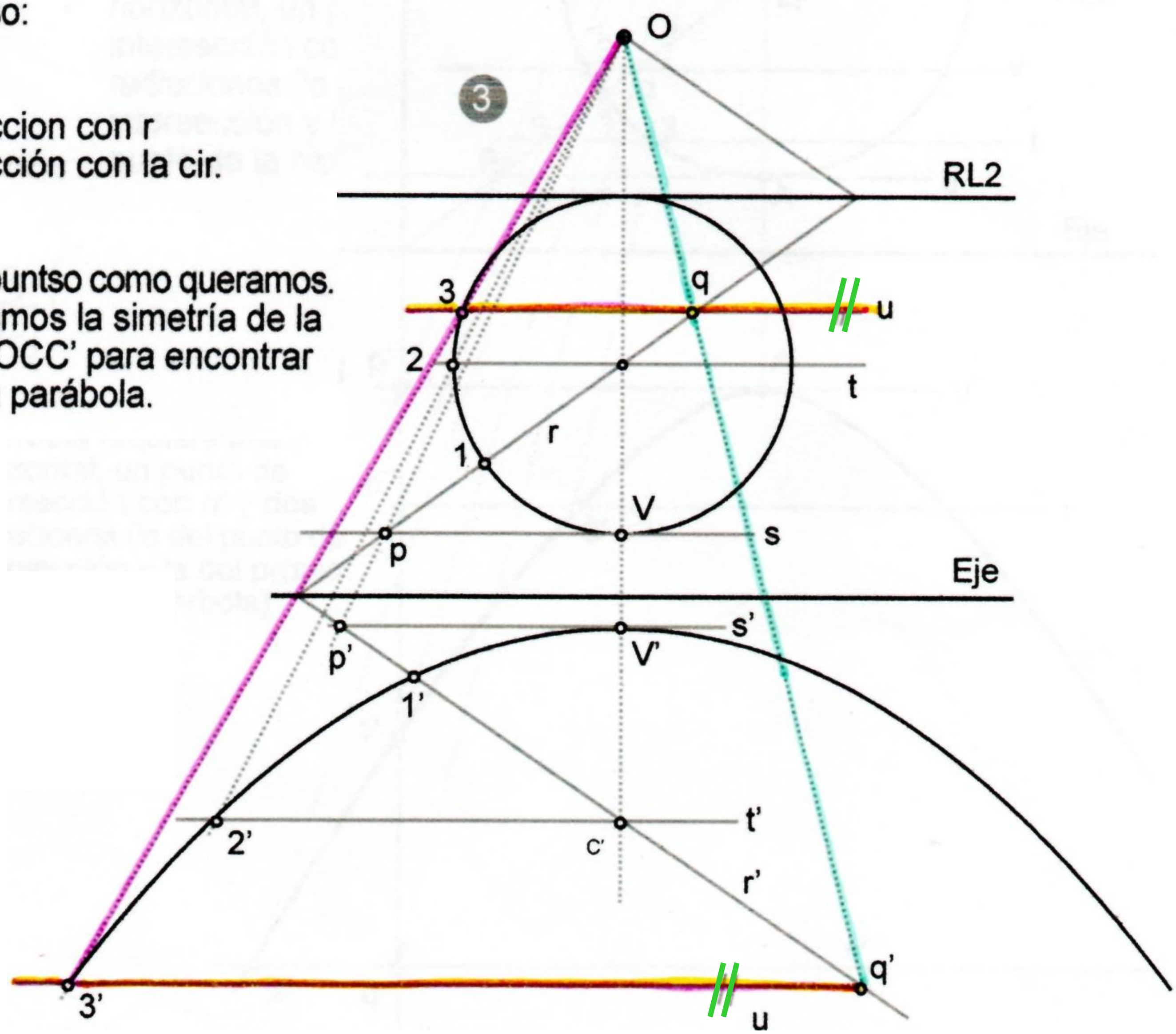
Trazamos una paralela al eje t que corta a r en C, por lo que t' será paralela al eje por C'. Sobre la cir. y la recta t encontramos 2, del cual obtenemos el homólogo 2' sobre t' trazando el rayo O-2.



3º- Repitiendo este proceso:

1º Paralela,
2º homologo de la interseccion con r
3º homólogo de la intersección con la cir.

Podemos encontrar tantos puntso como queramos. Para este ejercicio empleamos la simetría de la parábola respecto al rayo OCC' para encontrar los puntos simétricos de la parábola.



PARÁBOLA HOMOLÓGICA

CASO: cuando el centro de la circunferencia no está alineado con el centro de la homología

1º - El punto de tangencia T1 de la circunferencia dada con la recta límite L es muy importante. Al estar en L , tiene su homólogo en el infinito. Esto quiere decir que será el punto por el que la parábola estará abierta. Unimos T1 con el centro de homología. La paralela nos determinará más adelante el eje de la parábola.

2º - Hallamos la dirección de la parábola, que será perpendicular a su eje. Para ello hacemos una perpendicular a OT1 (ángulo de 90º) obteniendo el punto 1 en L. Las rectas t y s (cuyas homólogas t’ y s’ son la dirección y el eje respectivamente) se cortan en V (cuyo homólogo es V’, el vértice de la parábola). Para hallar V unimos 1 con C (centro de la circunferencia dada) y hallamos su punto medio M, y con radio MT_1, pasando por C, obtenemos V que es el otro punto de tangencia desde M. Desde 1 y T_1 trazamos t y s pasando por V hasta el eje de homología. Luego sendas paralelas a O1 y OT_1, que son t’ y s’. Donde se cortan tenemos V’. Lo corroboramos viendo que V y su homólogo V’ están en línea con el centro de homología O.

3º - Hallamos el foco F y F’.

Para ello usaremos la siguiente propiedad de la parábola que dice: toda proyección ortogonal desde el foco hasta una recta tangente a la parábola, tendrá intersección con la recta tangente por el vértive de la parábola.

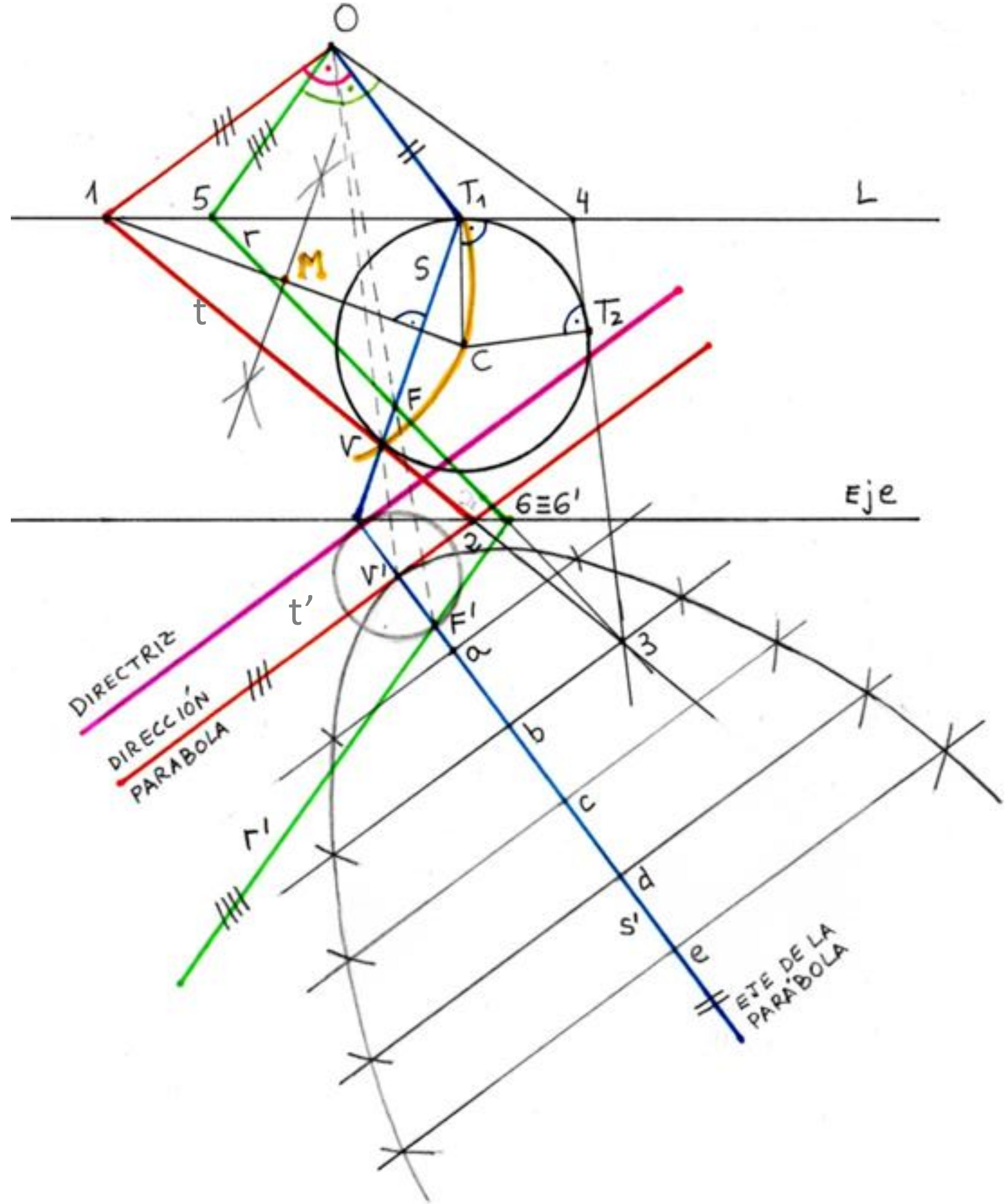
Por tanto, trazamos una tangente a la circunferencia por un punto T_2 cualquiera y la prolongamos hasta que corte a la anterior recta tangente t en el punto 3.

Desde O trazamos una perpendicular a O4 hallando 5 en L, que al unirlo con 3 nos da la posición del foco F y con una recta de proyección nos da su homólogo F’ en el eje de la parábola.

4º - Finalmente dibujamos la parábola siguiendo el proceso habitual.

DATOS:

Circunferencia tangente, la recta límite L, el eje y el centro de homología O.



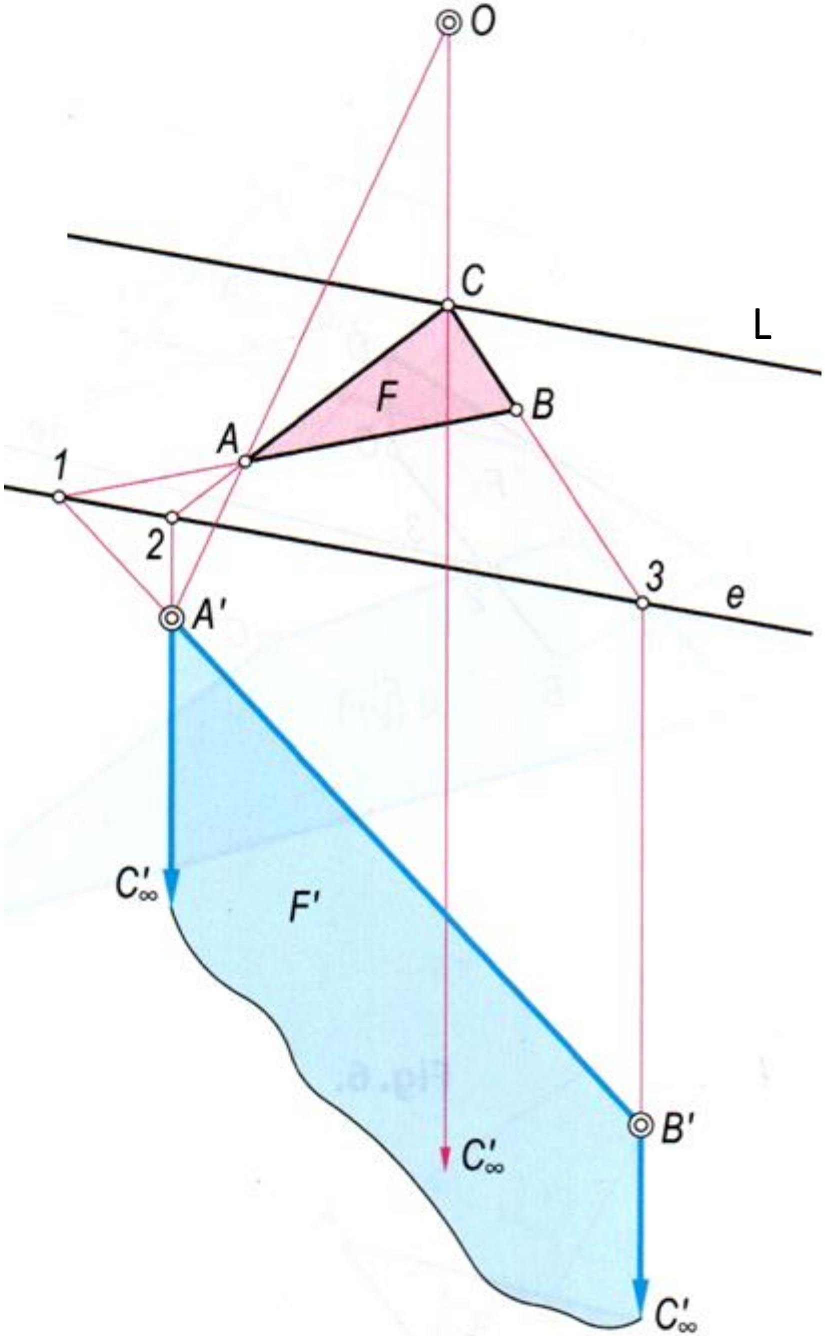
CASO ESPECIAL:

FIGURA HOMÓLOGA EN EL INFINITO.

Si la figura F tiene un vértice en L , o la figura F’ lo tiene en L’ , su homológica es una figura abierta en la que el homólogo de ese vértice ese vértice se encontrará en el infinito.

En el dibujo, como C se encuentra en la recta límite L , es un punto impropio.

Entonces, las rectas A’C’ y B’C’ se cortan en el infinito, ya que C’ está en el infinito. Es decir, esas rectas son paralelas.

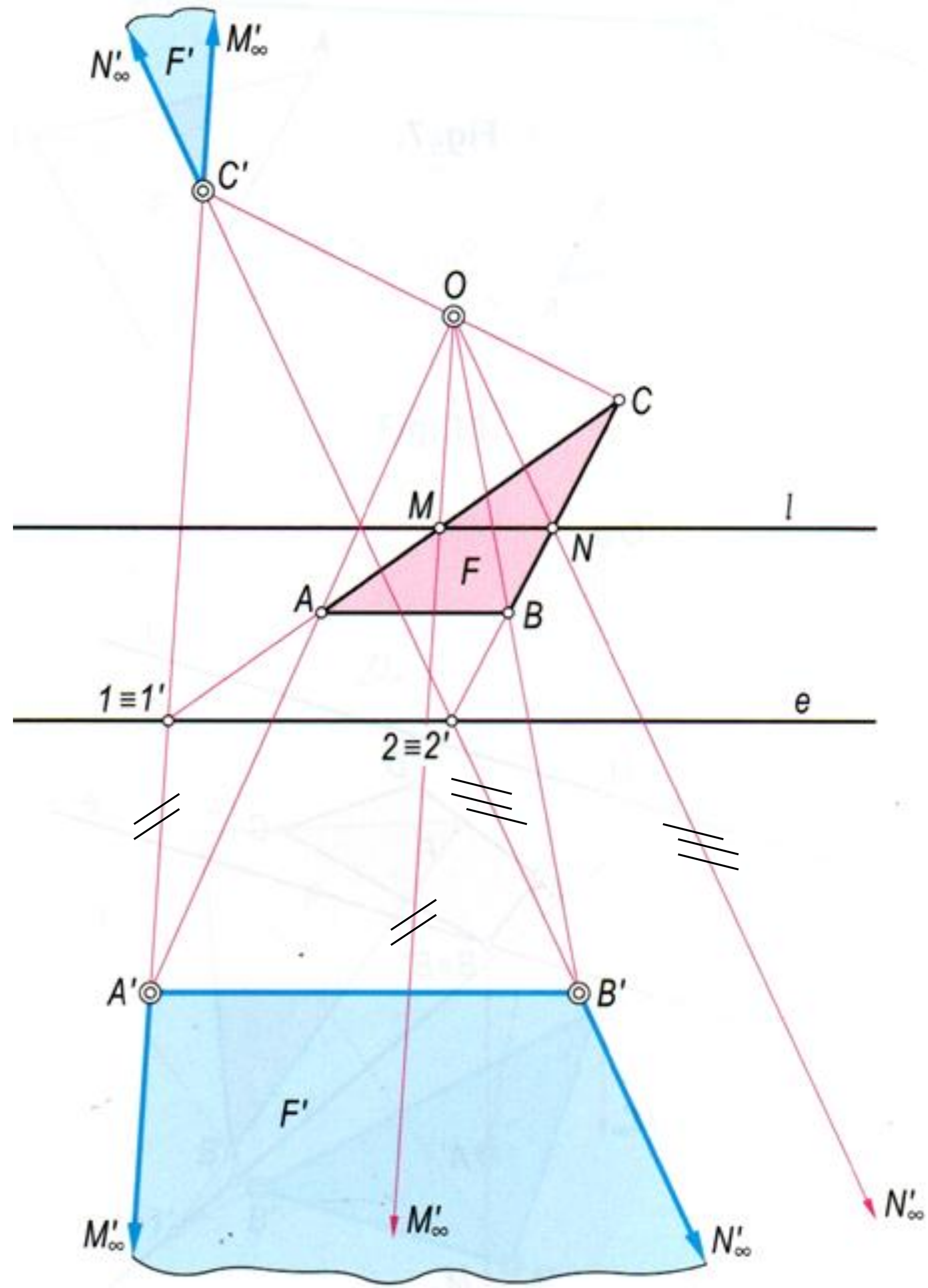


CASO ESPECIAL:

FIGURA HOMÓLOGA PARTIDA.

Si la recta límite L es secante a la figura F , o L' a F' , la figura homológica de la figura se va a componer de dos partes abiertas.

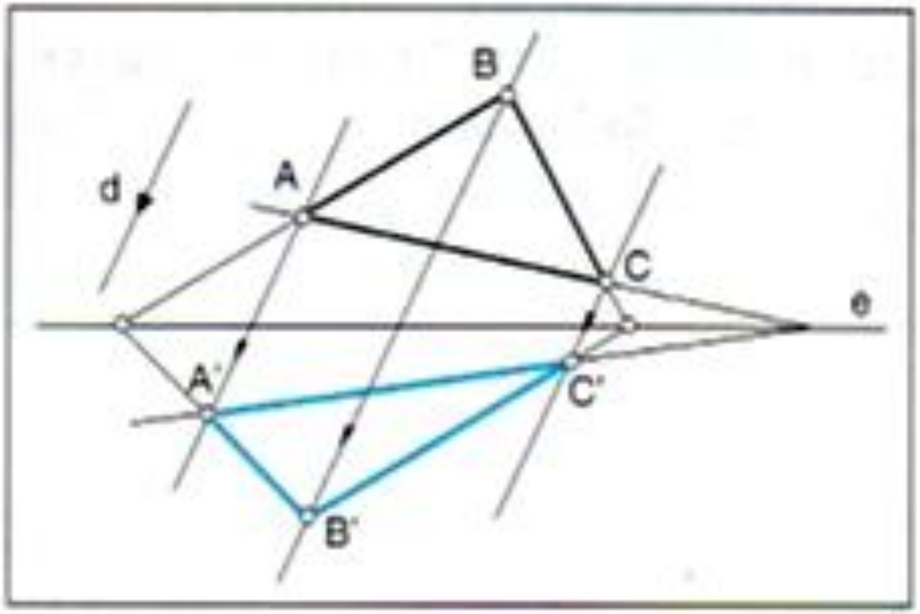
En el dibujo de este triángulo vemos que al lado AC de la figura F le corresponde el segmento A'C' que tiene que pasar por el punto impropio M'∞ (homólogo de M en la recta límite L), y C y C' están alineados con O por definición.
Del mismo modo, el lado BC está cortado por L en uno de sus puntos, que es N, punto impropio. Por tanto su homólogo B'C' pasará por N'∞ y aparece por detrás del centro de homología O.



AFINIDADE

A homoloxía afín ou afinidade é un caso particular de homoloxía cun centro de proxección que está no infinito, é dicir, é un *punto impropio*.

O feixe de rectas proxectantes está formado por rectas paralelas que determinan a *dirección de afinidade*.



Así pois, dúas figuras planas son afíns se se cumpre que:

— Os puntos homólogos están aliñados segundo a **dirección de afinidade**.

— As rectas homólogas córtanse en puntos dunha recta fixa *e*, chamada **eixe de afinidade**.

Na afinidade non existen líneas límite.

Elementos dobres

Os elementos que son dobres, é dicir, homólogos de si mesmos nunha afinidade son:

- Calquera recta paralela á dirección de afinidade é unha recta dobre, pero non é de puntos dobres.
- As rectas afíns córtanse no eixe *e*; logo o eixe de afinidade é dobre e, ademais, de puntos dobres, posto que os seus puntos pertencen á vez a unha recta e á súa afín.

Determinación

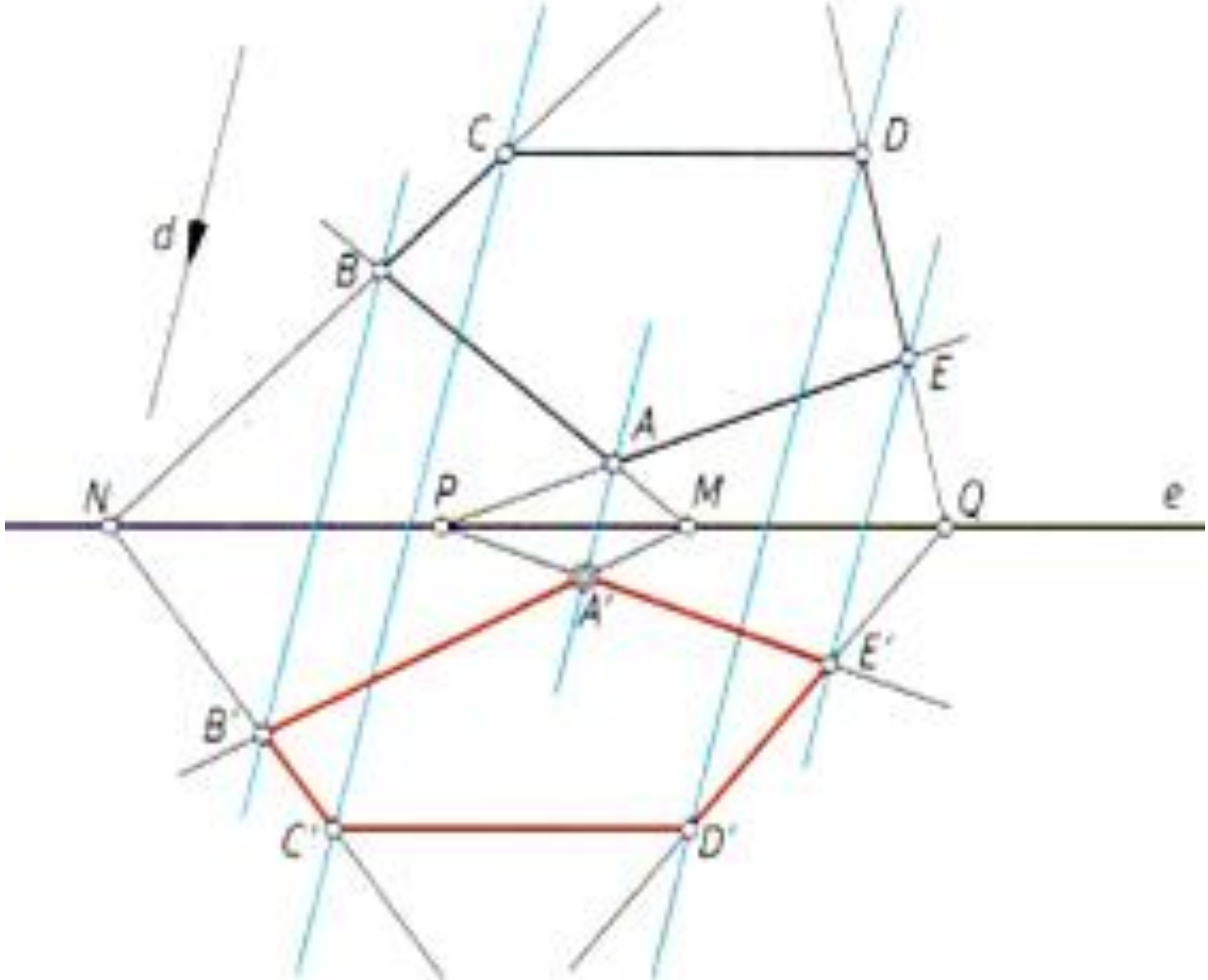
Unha afinidade queda determinada se coñecemos:

- O eixe e dous puntos afíns, xa que a recta que os une determina a dirección de afinidade.
- Un punto do eixe e un par de rectas afíns.
- Dous triángulos afíns.

Construye la figura afín del polígono *ABCDE* (fig. 16), conociendo el eje *e* y un punto afín *A'*.

Solución:

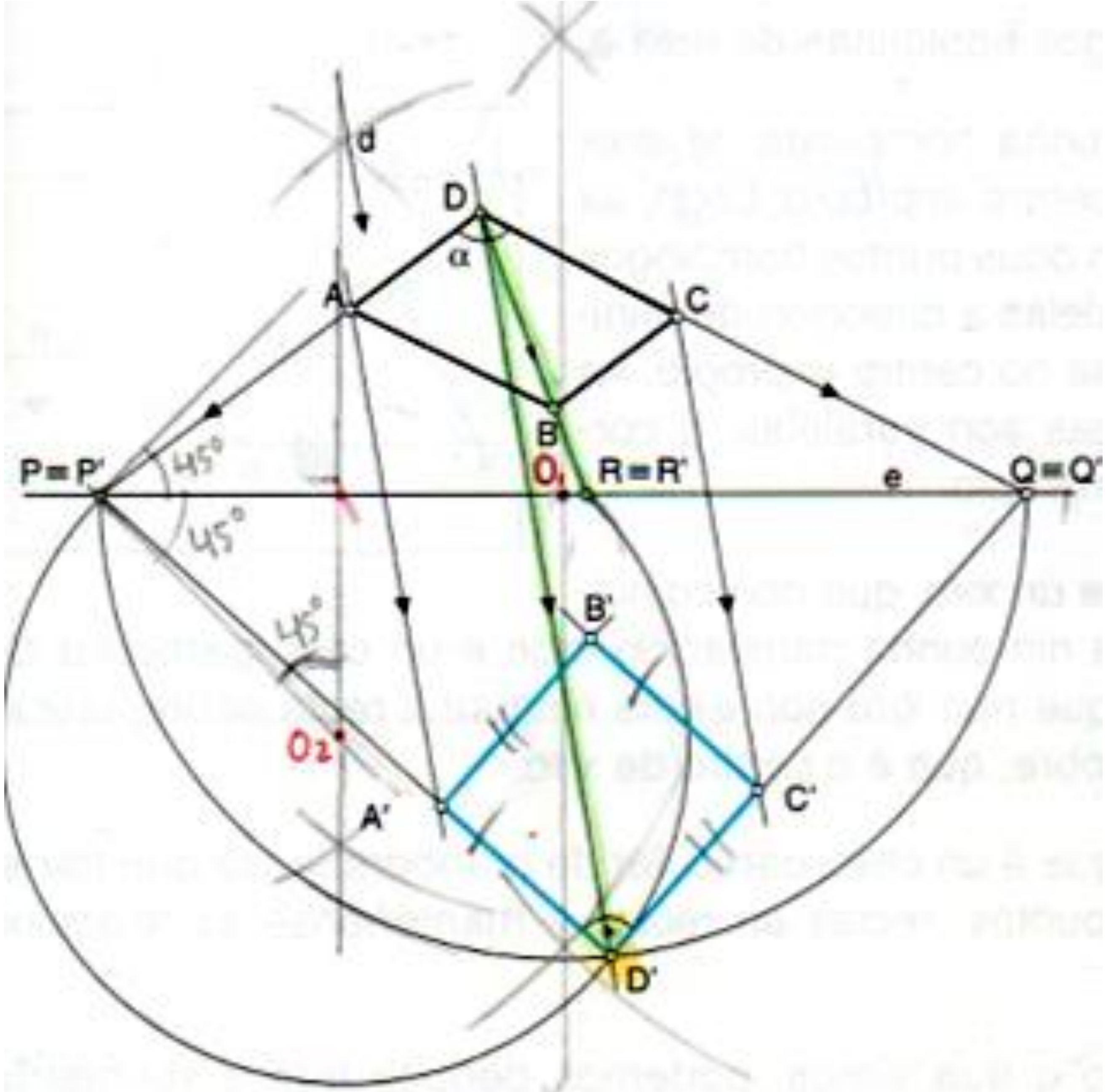
1. La dirección *d* de afinidad queda determinada mediante la recta *AA'*.
2. Aplicando el procedimiento general, se une el punto *A* con cualquier otro, el *B* por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto *M*.
3. El punto *M* se une con *A'* mediante una recta que corta al rayo paralelo a la dirección de afinidad, trazado por *B* en el punto *B'*.
4. Se une el punto *C* con el punto *B* o con cualquier otro del que ya se conozca su afín y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los afines de todos los vértices.


C
D
d
B
E
A
N
P
M
Q
e
A'
E'
B'
C'
D'

Trasnformar mediante una afinidad un cuadrilátero cualquiera ABCD en un cuadrado, conociéndose el eje de afinidad.

Hay que tener en cuenta que para ello, la afinidad debe convertir el ángulo α en un ángulo de 90º y la diagonal dividirá dicho ángulo en dos de 45º.

Se prolongan los lados del cuadrilátero DA y DC hasta el eje de afinidad, y también la diagonal DB del cuadrilátero.
El futuro punto D', afín de D, tendrá que formar un ángulo de 90º con $P \equiv P'$ y $Q \equiv Q'$, y un ángulo de 45º con $P \equiv P'$ y con $R \equiv R'$. Por ello, para situar D', recurrimos a los arcos capaces de 90º respecto al segmento PQ y de 45º respecto al segmento PR. Y dónde se corten ambos arcos capaces tendremos el punto D'.
Y la recta que une D y D' nos da la dirección de afinidad d para hallar el resto de los puntos homólogos para poder trazar el cuadrado.


d
D
α
A
C
B
P = P'
45°
45°
O₁
R = R'
e
Q = Q'
45°
B'
O₂
A'
C'
D'