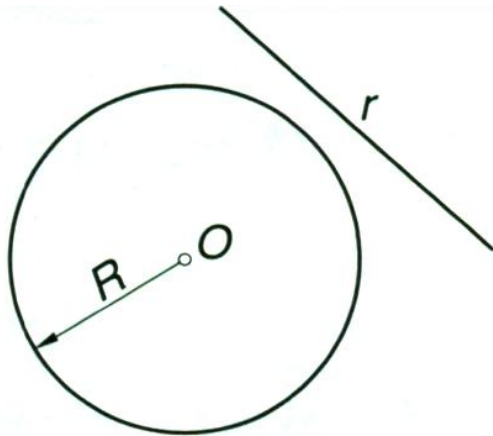


TANGENCIAS

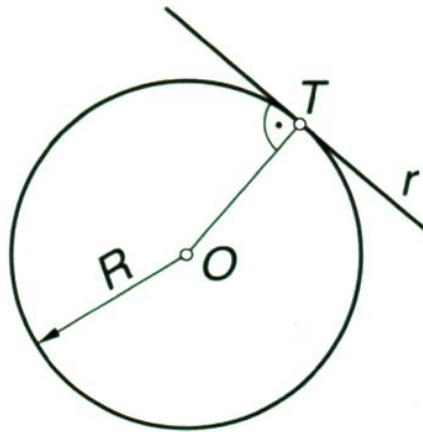


1º BACH

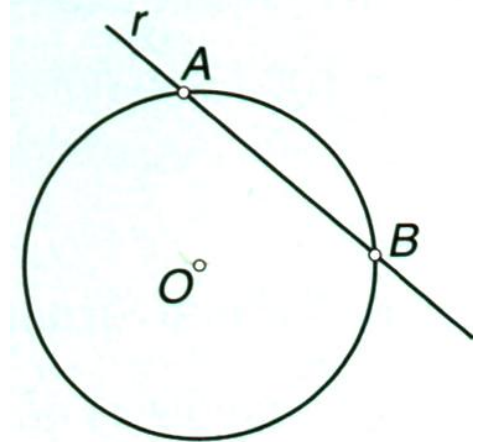
POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA



Exteriores

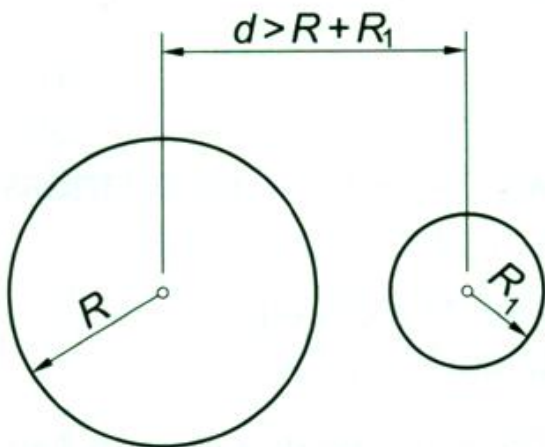


Tangentes

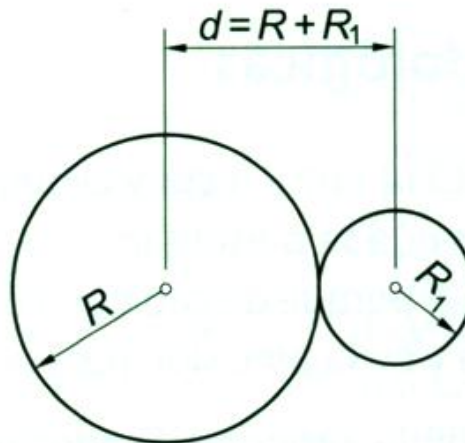


Secantes

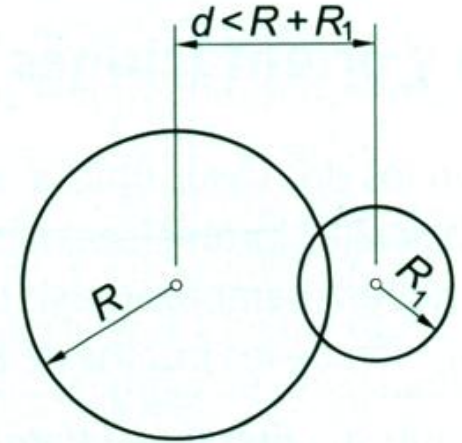
POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS (A)



Exteriores

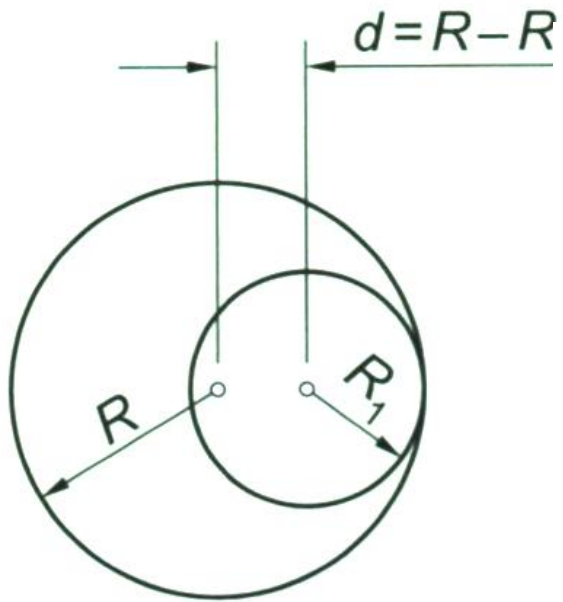


Tangentes exteriores

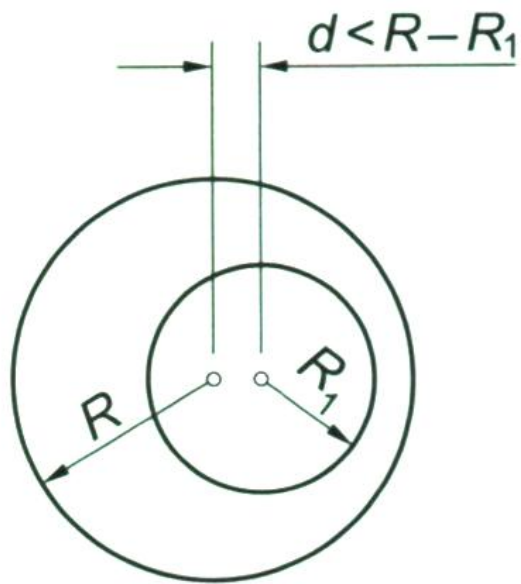


Secantes

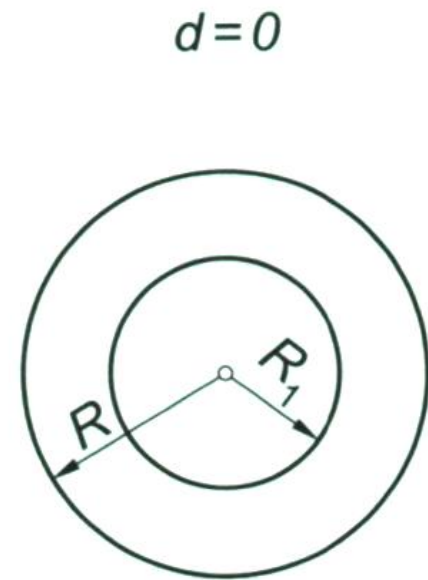
POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS (B)



Tangentes interiores

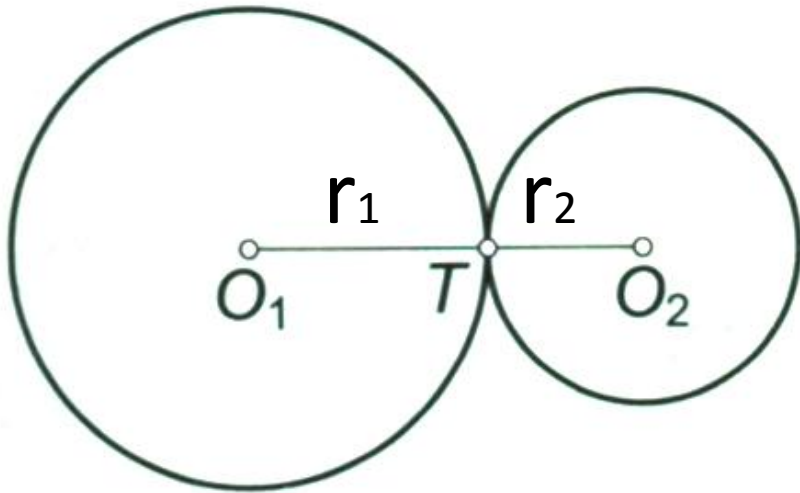


Interiores



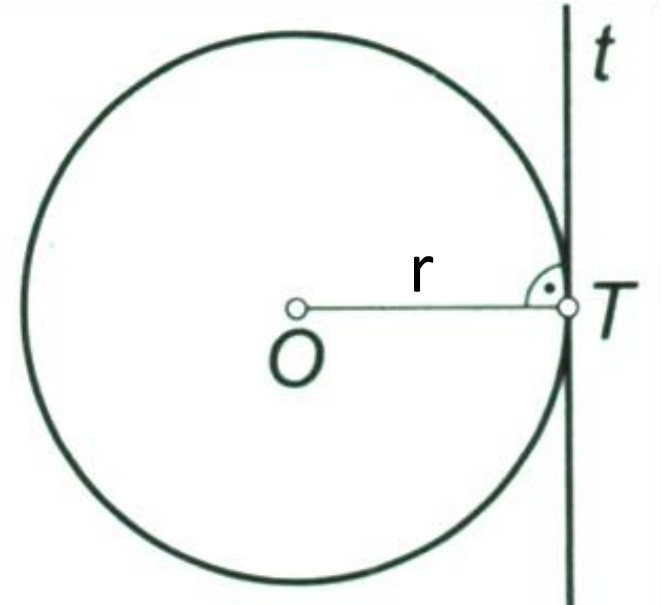
Concéntricas

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS TANGENCIAS

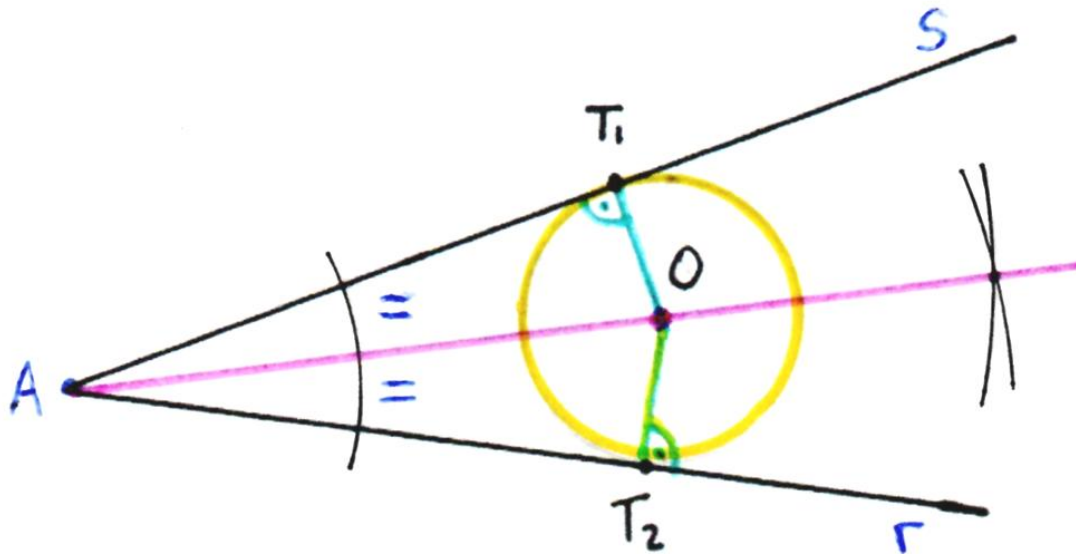
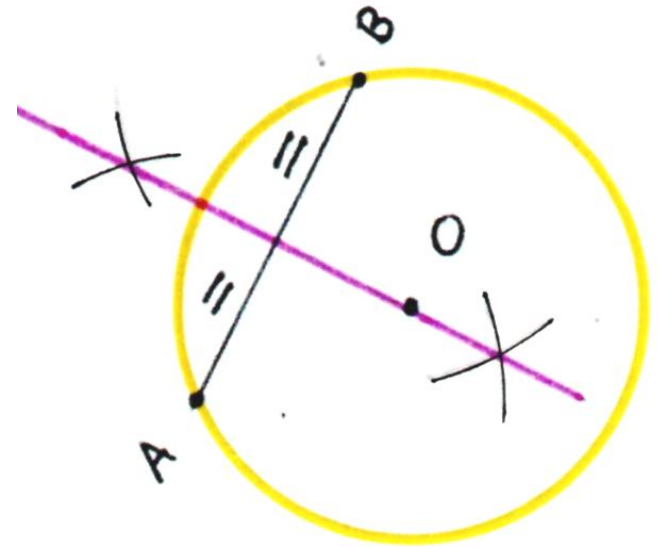


Si dos circunferencias son tangentes, su punto de tangencia T se encuentra siempre en la recta que une sus centros, que es la suma de sus radios.

Una recta es tangente a una circunferencia si el radio de la misma es perpendicular a dicha recta en el punto de tangencia T .

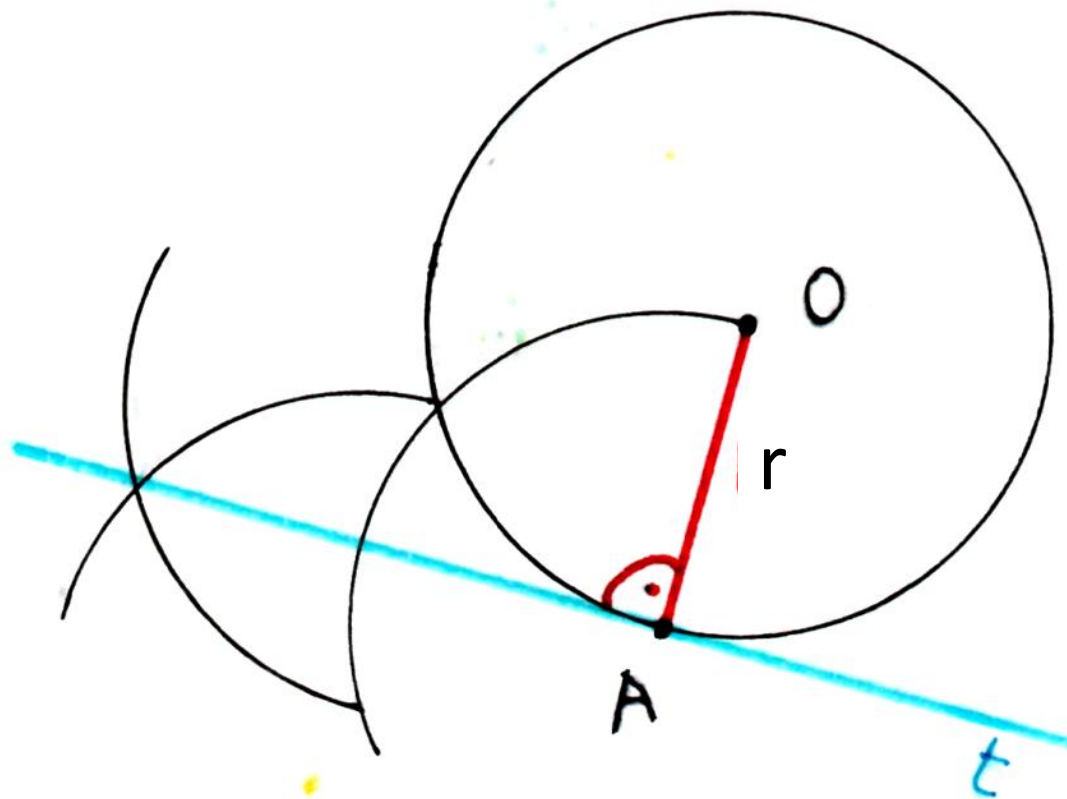


El centro de una circunferencia que pasa por dos puntos se encuentra en la mediatriz del segmento que los une.



El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas que se cortan o convergen, se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman.

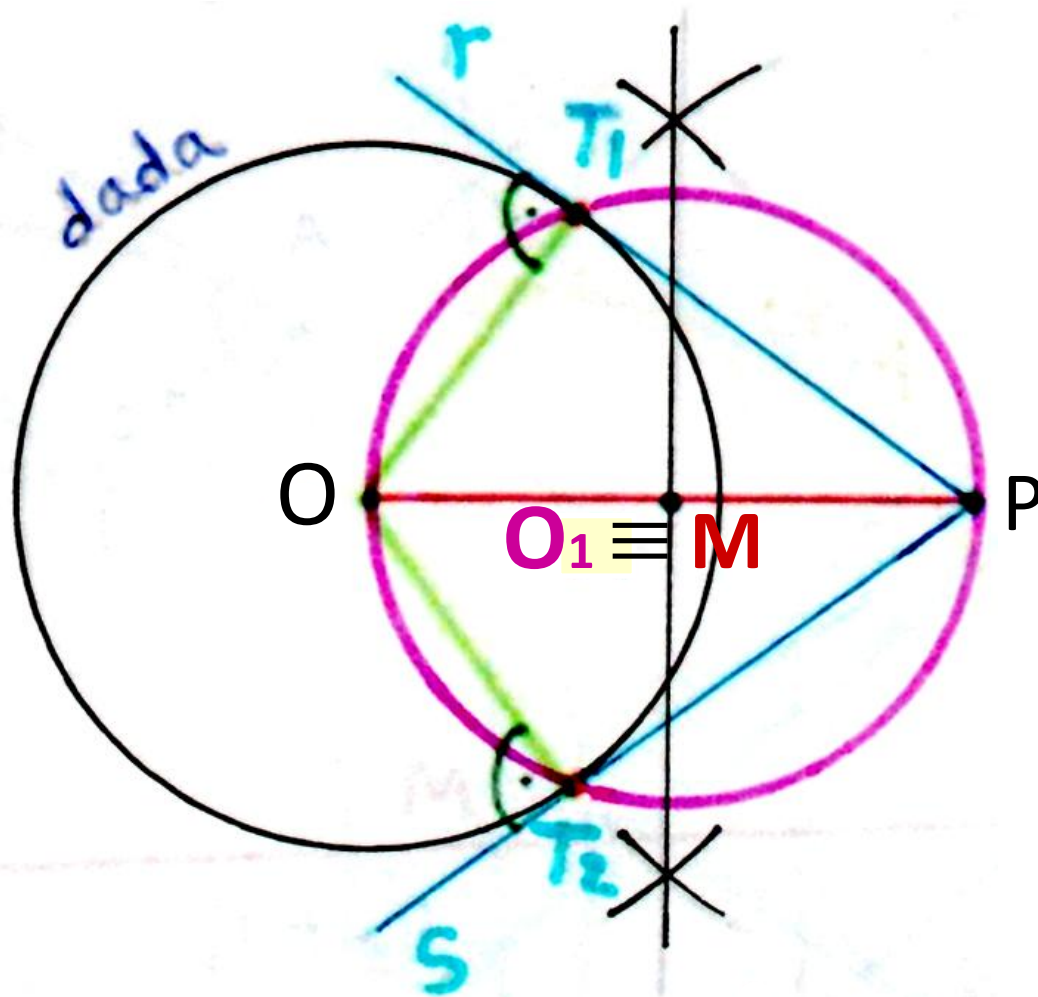
TANGENCIAS CONOCIENDO CIRCUNFERENCIAS O RECTAS



Recordemos cómo trazar una recta perpendicular a otra.

Así trazamos una recta tangente a una circunferencia dada.

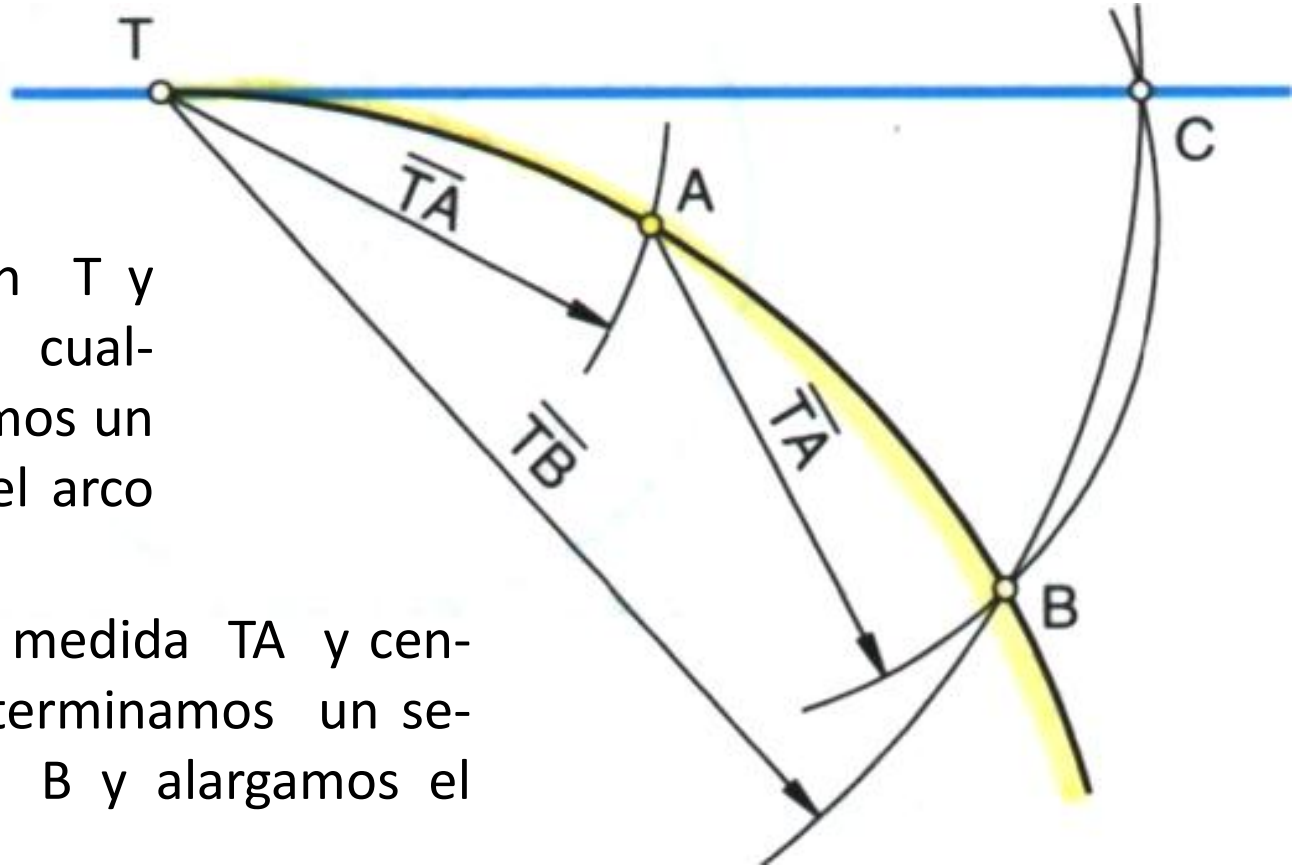
1. Construcción de las dos rectas tangentes desde un punto P exterior a la circunferencia dada.



La circunferencia que pase por O y P cortará a la dada en los puntos de tangencia T_1 y T_2 entre la circunferencia dada y las rectas tangentes que parten del punto exterior P .

El centro O_1 de esa circunferencia se encuentra en la mediatriz del segmento OP .

2. Trazar una recta tangente a un arco de circunferencia, de centro desconocido, dado el punto de tangencia T .



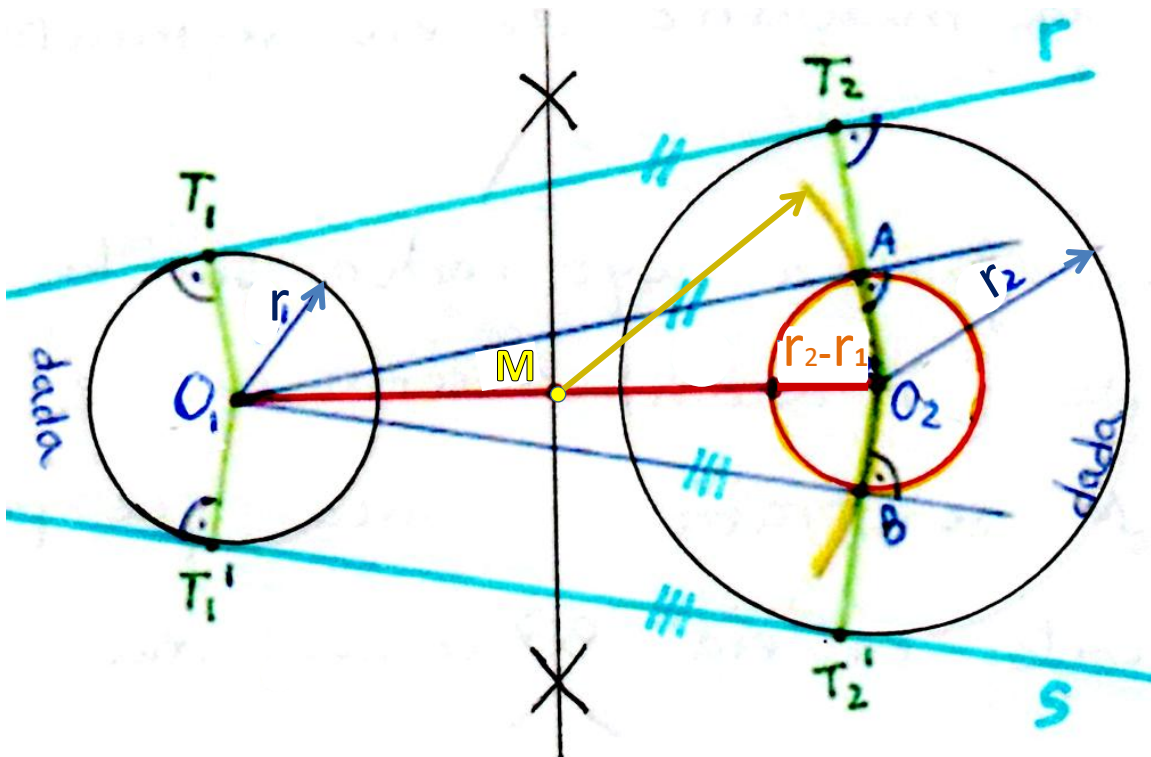
Con centro en T y una abertura cualquiera marcamos un punto A en el arco dado.

Con la misma medida TA y centro en A , determinamos un segundo punto B y alargamos el arco.

Luego, con centro en T y radio TB cortamos al arco anterior en el punto C . La recta tangente buscada pasará por T y por C .

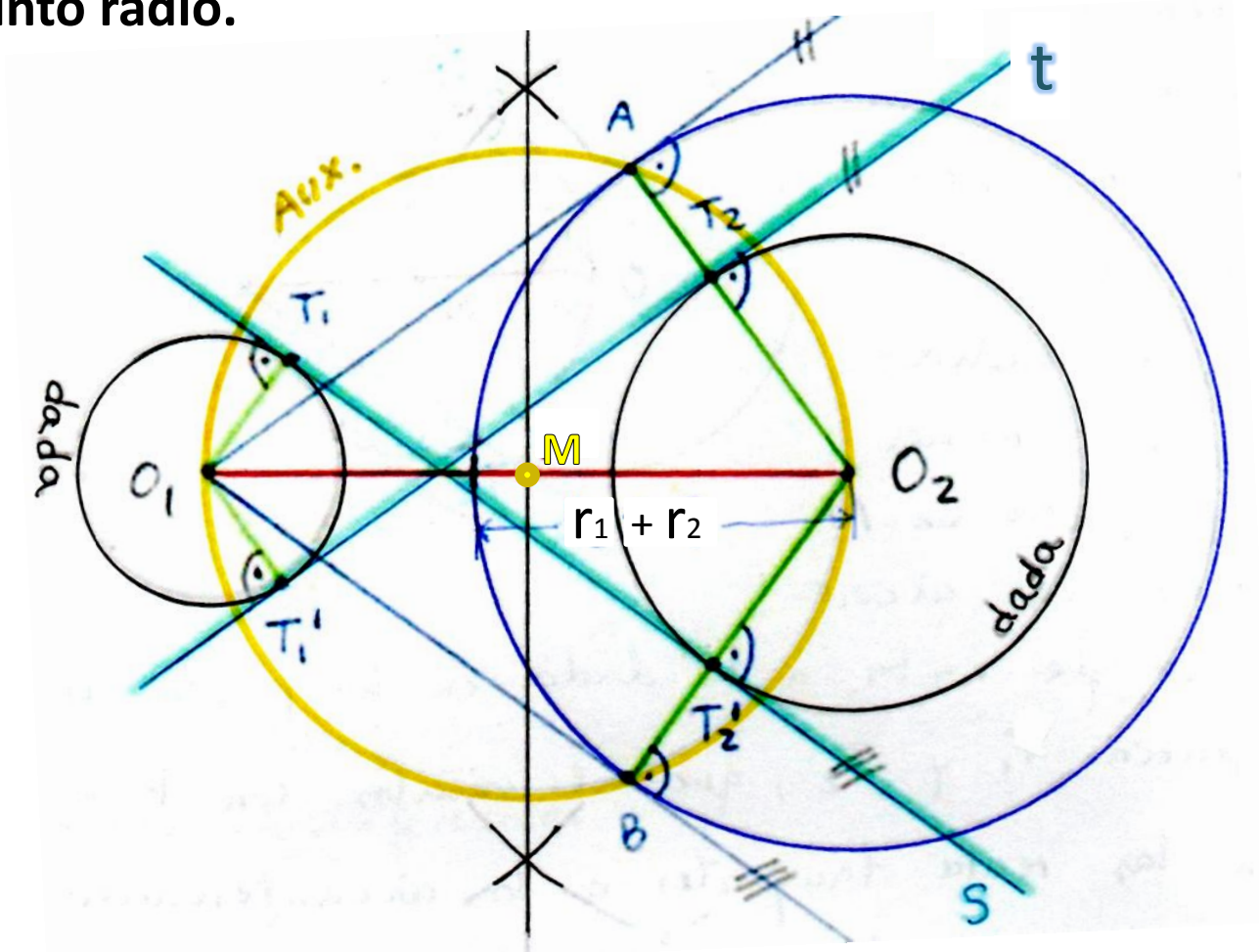
3. Construcción de dos rectas tangentes exteriores a dos circunferencias de distinto radio.

La estrategia es tomar uno de los centros de las circunferencias dadas (la de menor radio: O_1) para resolver el problema como en el caso anterior (tangentes desde un punto exterior a una circunferencia), y trazar desde él unas tangentes auxiliares a una circunferencia concéntrica a la otra circunferencia dada (O_2) cuyo radio sea la diferencia de los radios de las circunferencias iniciales: $r_2 - r_1$.



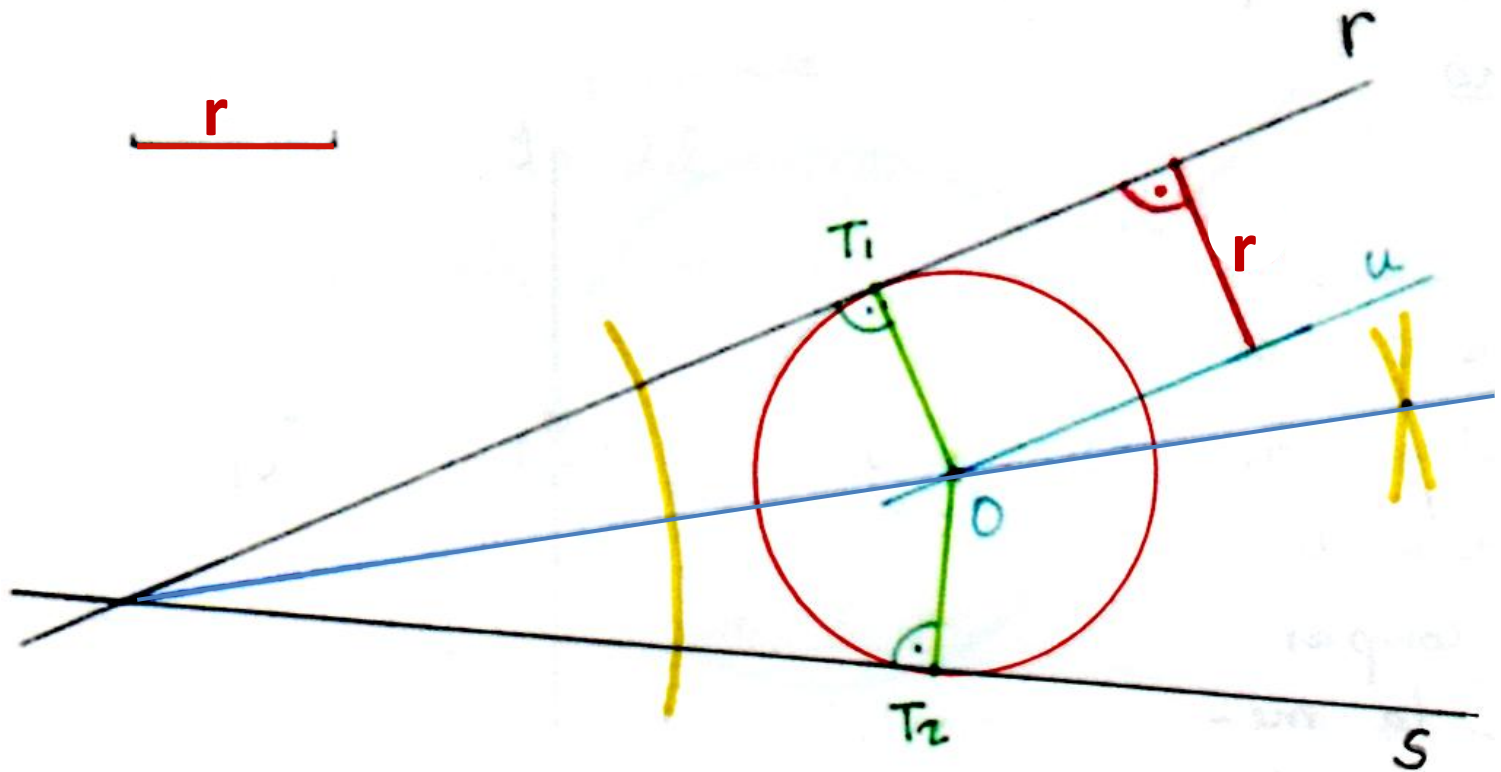
Como en el caso anterior unimos el punto O_1 con el centro O_2 de las circunferencias concéntricas y trazamos su mediatriz para fijar el centro M de la circunferencia que pasa por ambos centros. Nos basta trazar sólo el arco que nos da los puntos de tangencia A y B . Trazamos las tangentes desde O_1 a A y B . Y las tangentes r y s que buscamos serán paralelas a esas.

4. Construcción de dos rectas tangentes interiores a dos circunferencias de distinto radio.



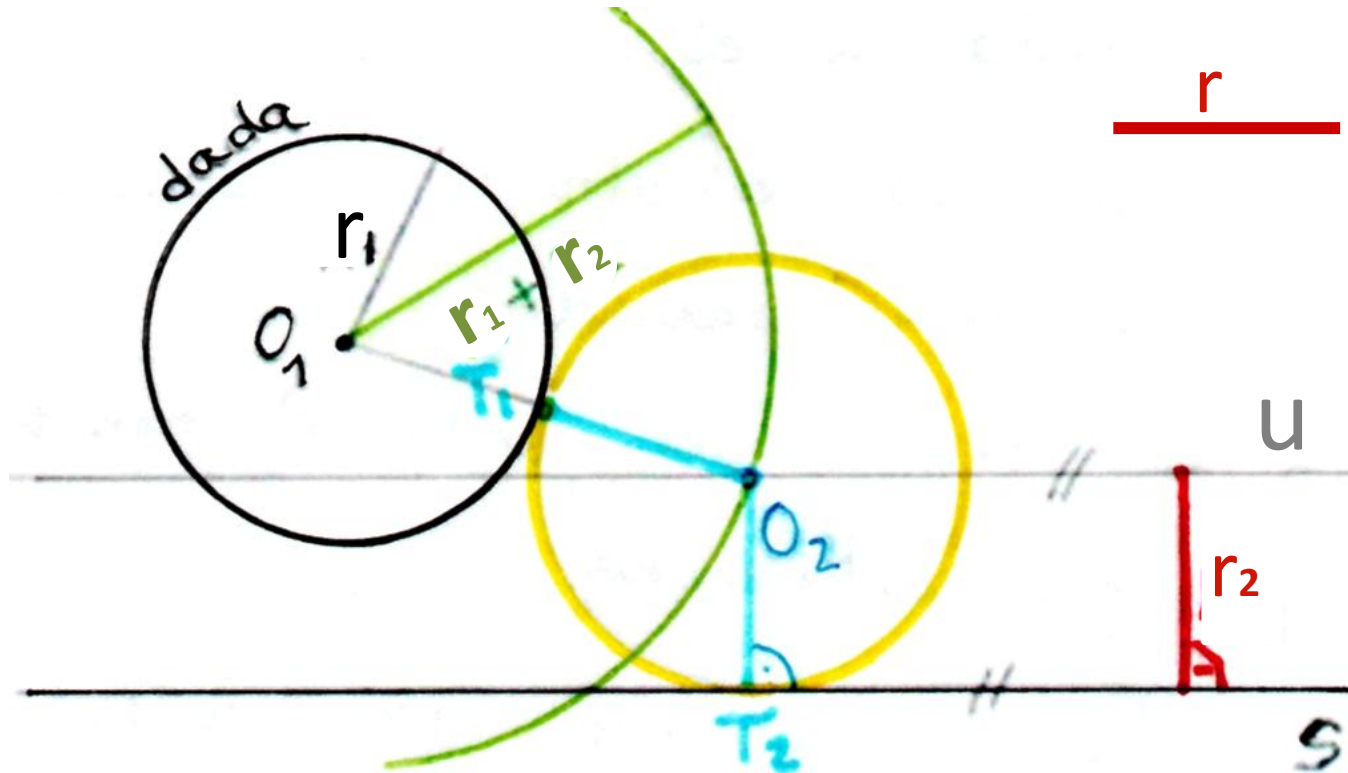
Es similar al caso anterior. Aquí la circunf. concéntrica tendrá un radio que es la suma de los radios de las circunf. dadas. Y las rectas tangentes buscadas t y s se cortarán en el segmento que une los centros.

5. Hallar la circunferencia tangente a dos rectas concurrentes, conocido su radio.



El centro de la circunferencia buscada se encontrará en la bisectriz del ángulo que forman las rectas dada r y s . Presentamos el radio dado perpendicular a una de ellas y trazamos una paralela u , la cual cortará a dicha bisectriz en un punto que será el centro O de la circunferencia solución.

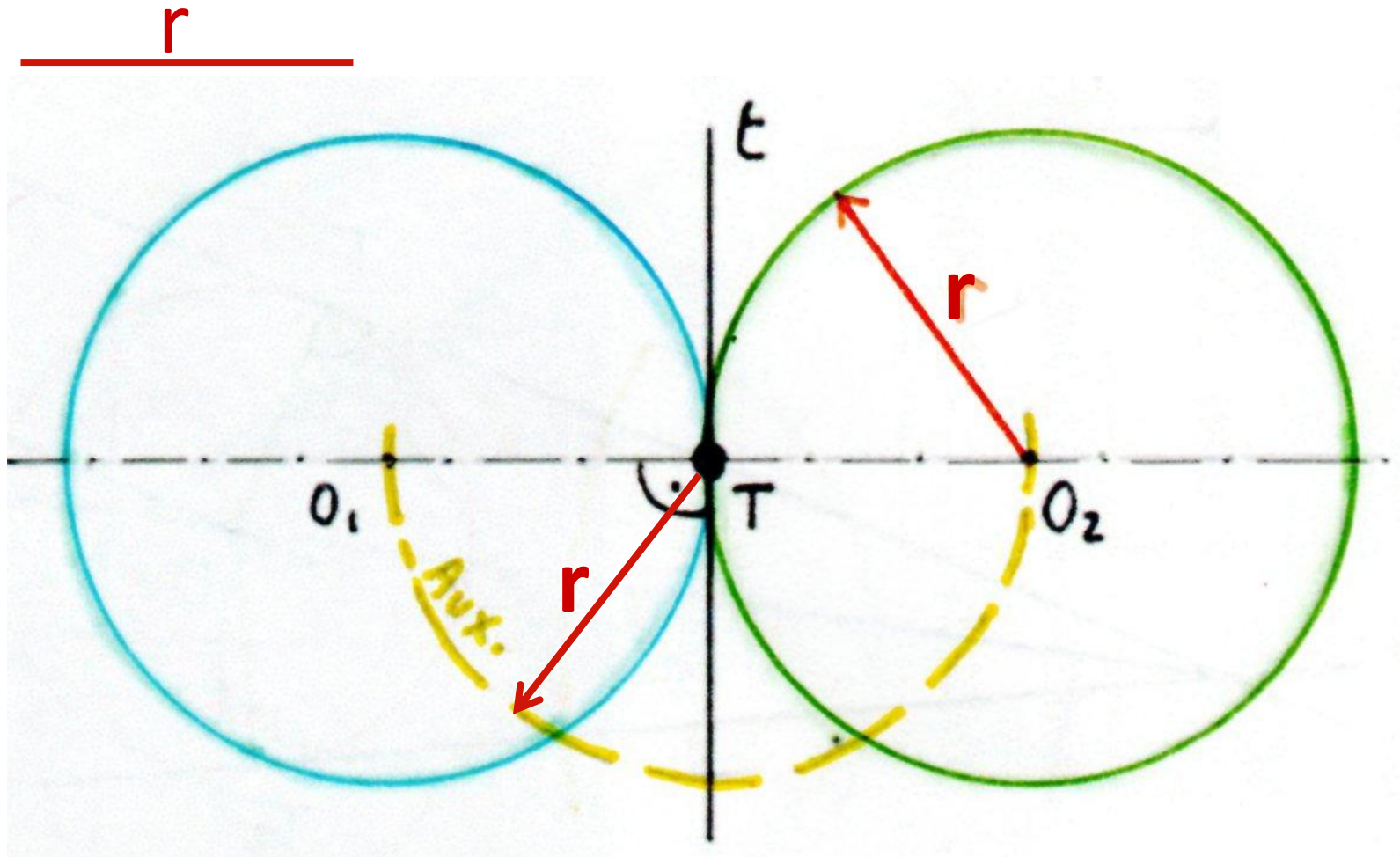
6. Hallar la circunferencia tangente a otra circunferencia y recta dadas, conocido su radio.



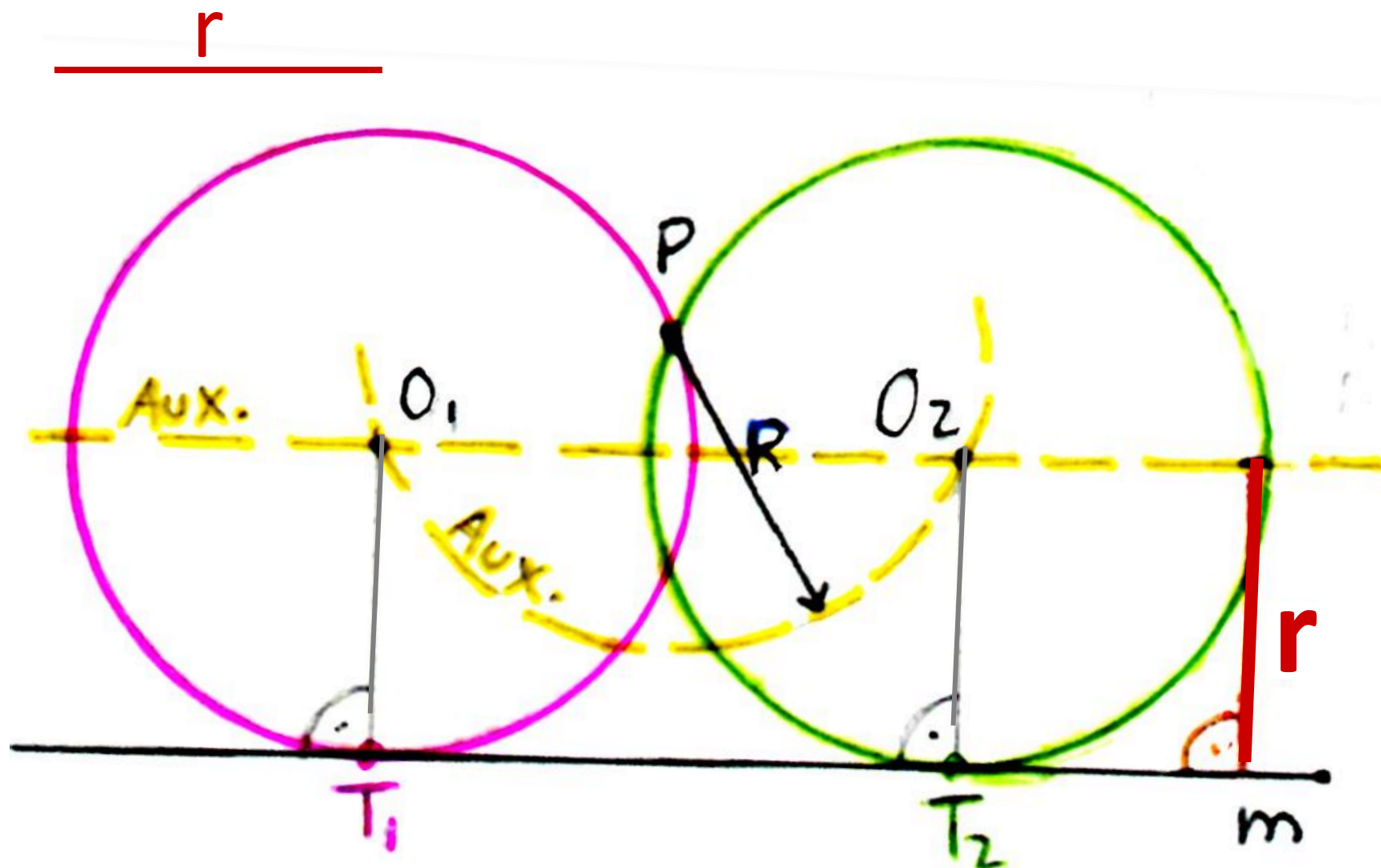
El centro de dicha circunferencia se encontrará en la recta paralela a la dada s y su distancia al punto de tangencia será su radio dado. Por otro lado recordemos que el punto de tangencia entre dos circunferencias se encuentra en el segmento que une sus dos centros.

HALLAR CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DADO EL RADIO

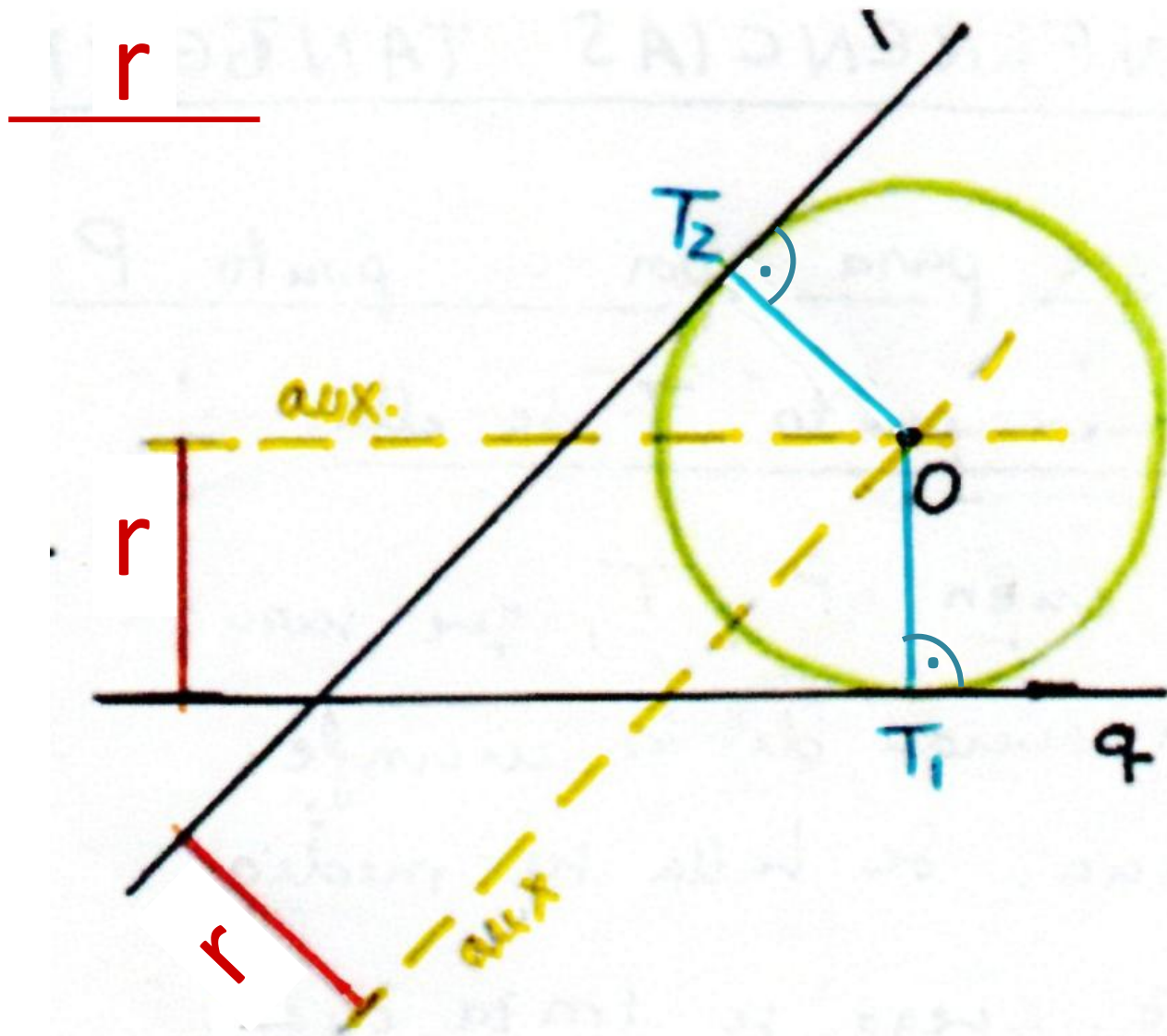
1. Hallar las circunferencias tangentes conocido su radio y dada la recta t tangente a ambas y el punto de tangencia T .



2. Hallar las circunferencias tangentes a una recta m y que pasen por un punto P , no perteneciente a dicha recta, conociendo su radio.

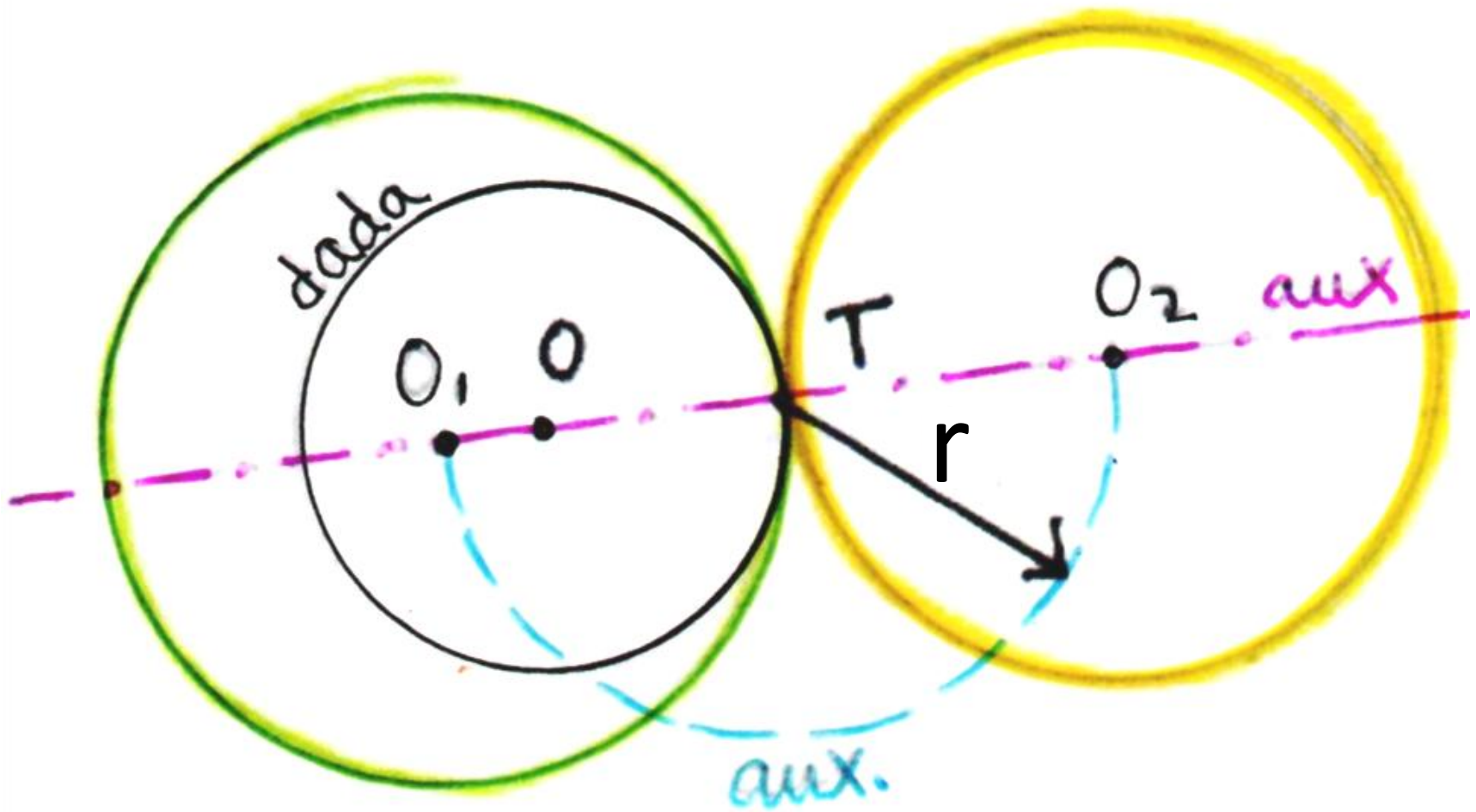


3. Hallar la circunferencia tangente a dos rectas que se cortan, dado su radio.



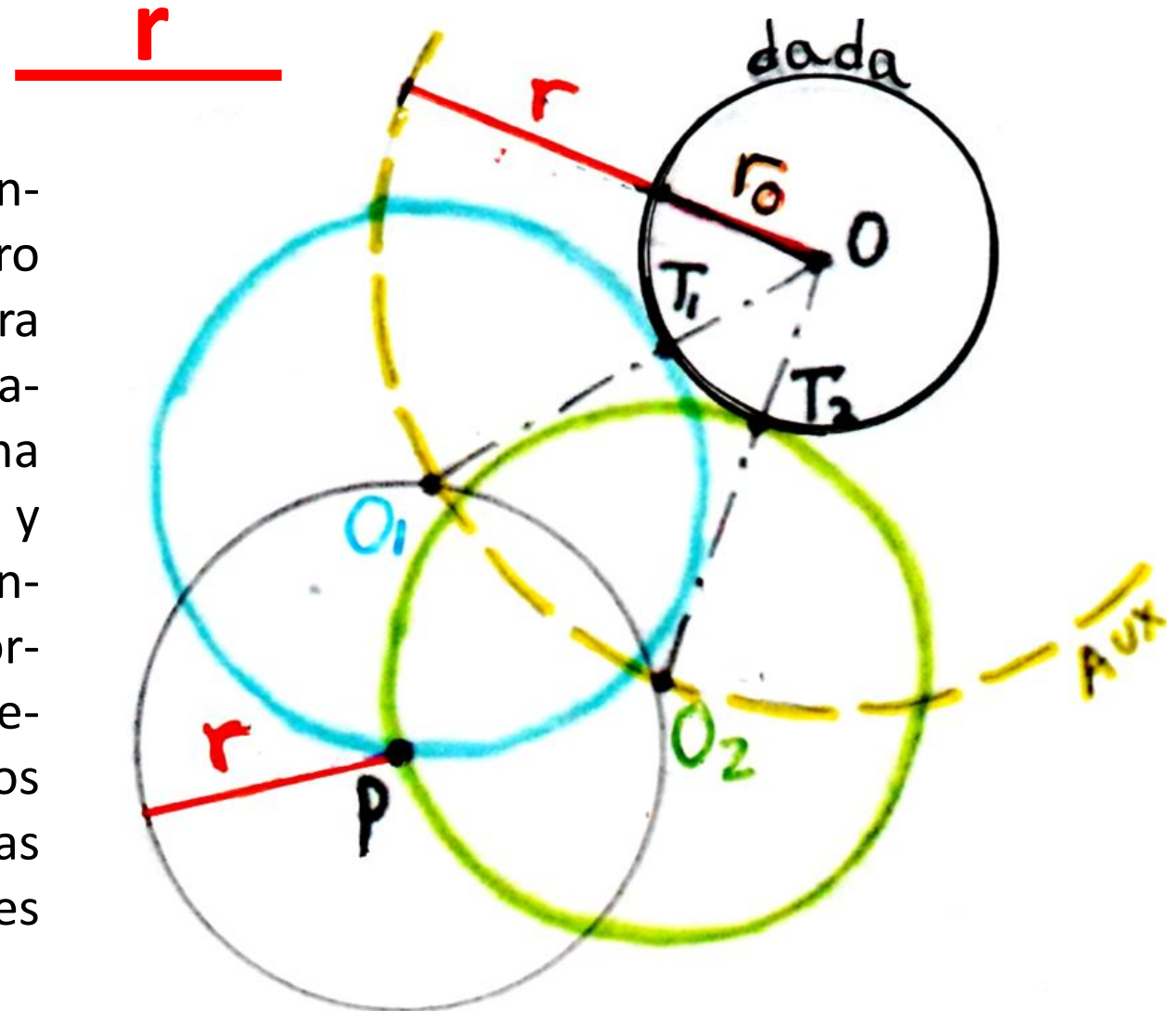
4. Hallar las circunferencias tangentes en un punto T de una circunferencia dada, conociendo el radio de las mismas.

r



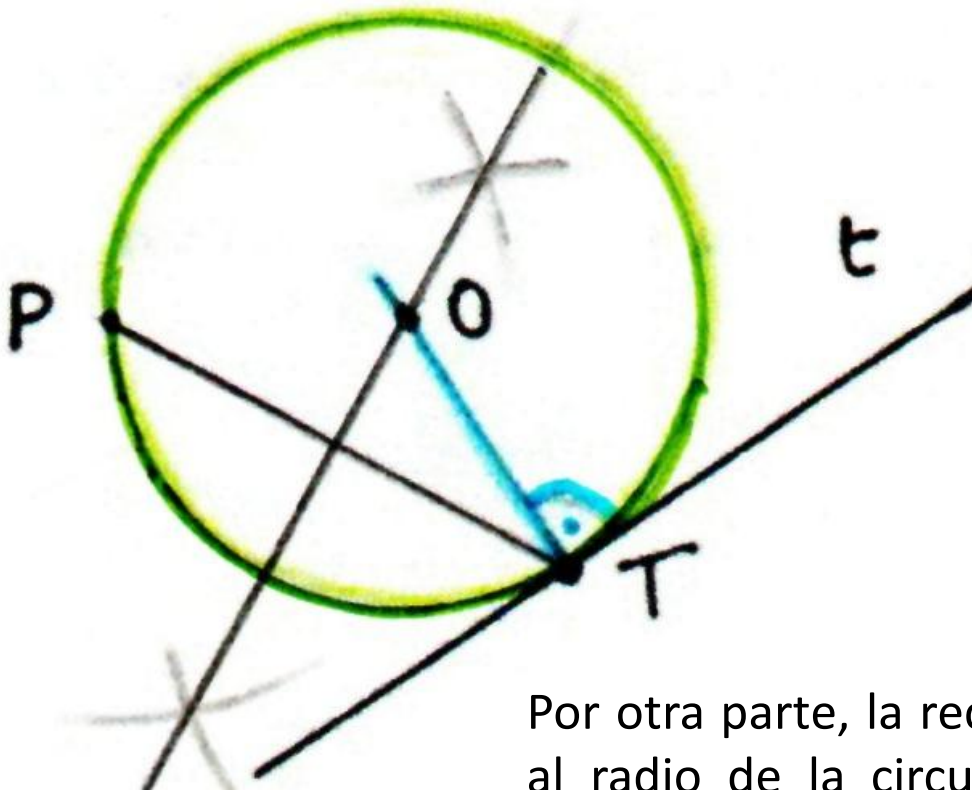
5. Hallar las circunferencias tangentes a una circunferencia dada pasando por un punto P exterior a ella, conociendo el radio de las mismas.

Trazamos la circunferencia de centro P y radio r . Y otra concéntrica a la dada y radio la suma del radio de ésta y el dado. En los puntos en que se corten ambas circunferencias tendremos los centros de las circunferencias tangentes solución.



HALLAR CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DE RADIO DESCONOCIDO

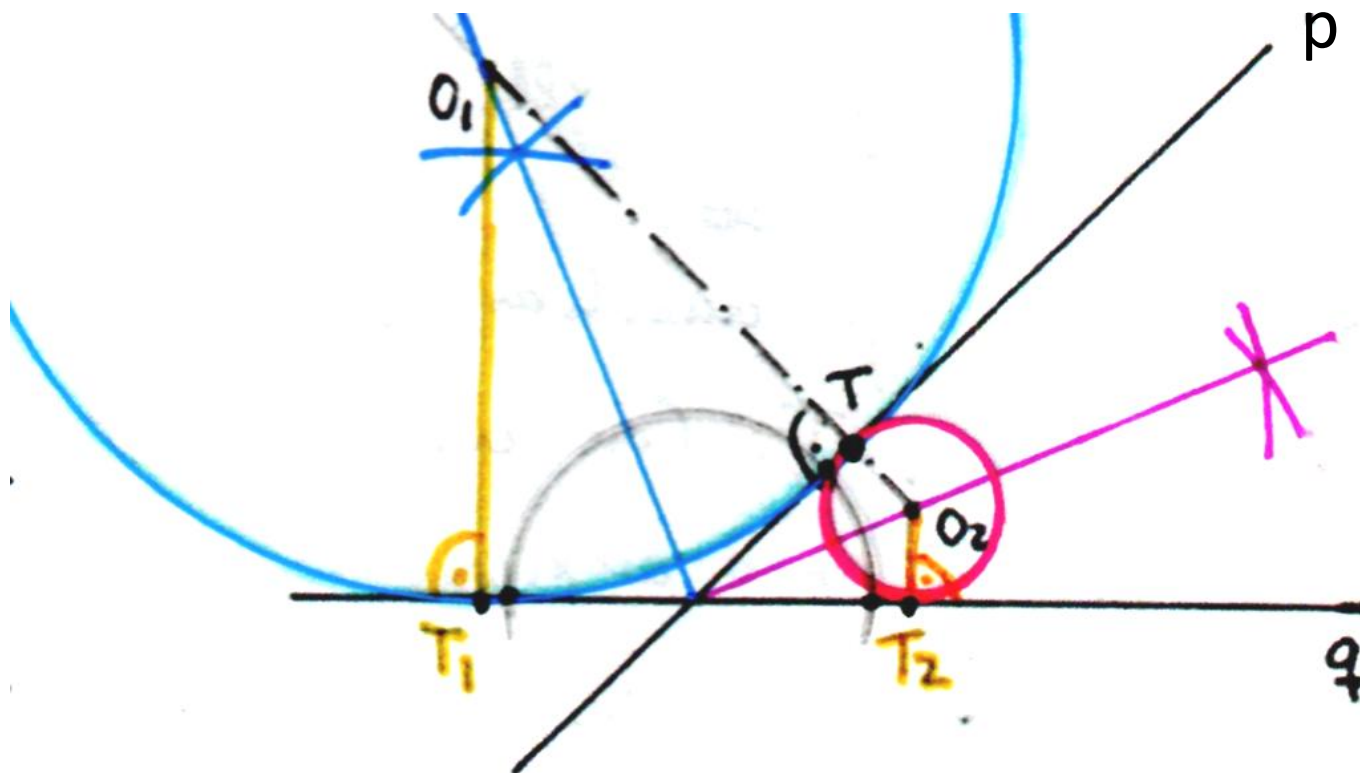
1. Hallar la circunferencia que pasa por el punto P y es tangente a una recta t en el punto de tangencia T .



La recta que une los puntos P y T es una cuerda de la circunferencia. Recordemos que el radio de una circunferencia siempre divide en dos partes iguales a cualquier cuerda de la misma. Por tanto, el centro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz de PT .

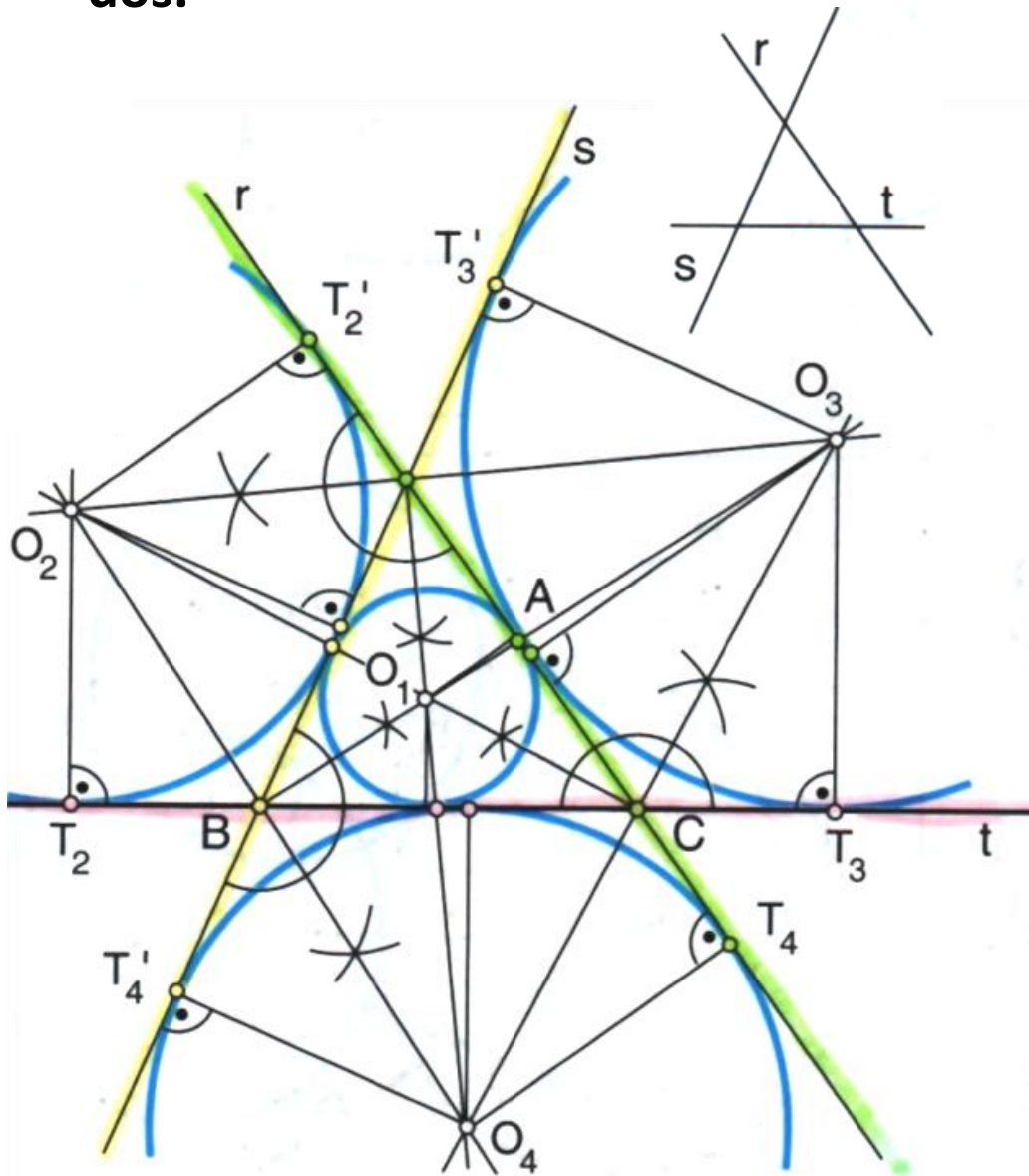
Por otra parte, la recta tangente t será perpendicular al radio de la circunferencia buscada. Sólo tenemos que levantar una perpendicular desde T hasta que corte a mediatriz de PT . Ahí tenemos el centro de la circunferencia.

3. Hallar las circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan, p y q , dado el punto de tangencia T en una de ellas.



El centro de cada circunferencia se encuentra en la bisectriz de cada ángulo que forman las rectas p y q . Por otra parte, los centros de dos circunferencias tangentes se encuentran en línea con el punto de tangencia T de ambas circunferencias y la recta p es tangente a ambas en ese punto, es decir, es perpendicular a sus radios.

4. Trazar una circunferencia tangente a tres rectas que se cortan dos a dos.



Hay cuatro posibles soluciones: la circunferencia interior al triángulo formado por las tres rectas (s , r , t) y las exinscristas al mismo.

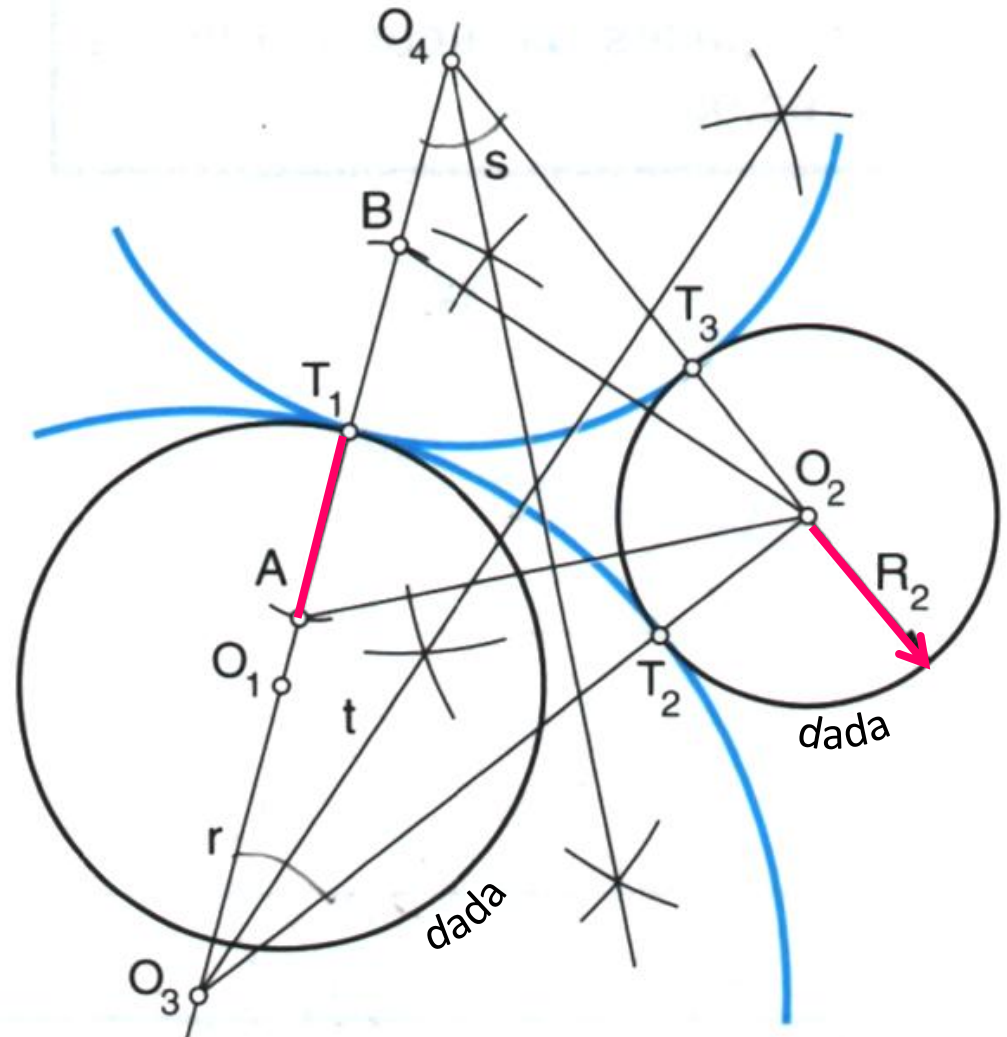
Trazamos las bisectrices de todos los ángulos formados por las rectas y donde se corten tendremos los centros de las circunferencias solución.

Trazando perpendiculares desde estos centros a las rectas, tenemos los puntos de tangencia.

5. Trazar una circunferencia tangente a otras dos dadas, conociendo un punto T_1 de tangencia.

Trazamos una recta r que pase por O_1 y T_1 . Con centro en T_1 y el radio R_2 de la otra circunferencia fijamos los puntos A y B .

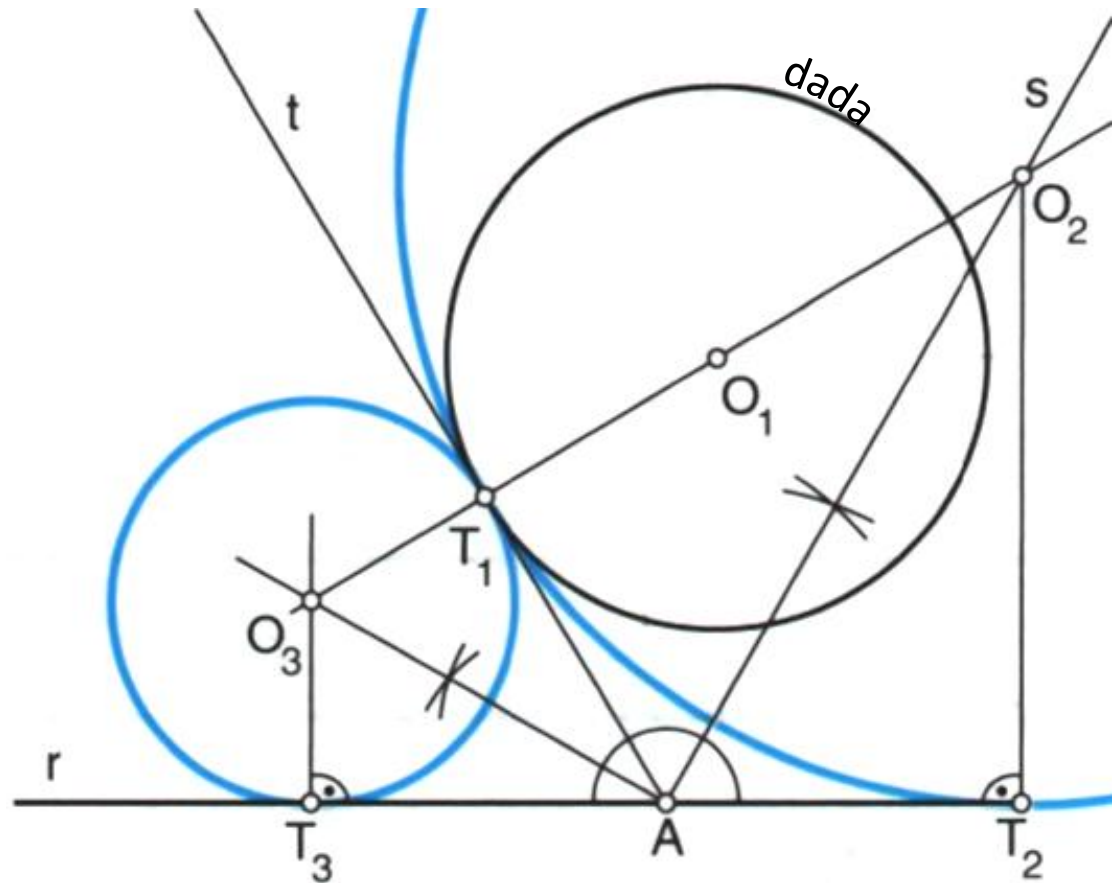
Unimos dichos puntos con el centro O_2 de esa circunferencia y trazamos las mediatrices s y t pudiendo encontrar en r los centros de las circunf. solución. Unimos esos centros O_3 y O_4 con O_2 y tenemos los puntos de tangencia. Y ya trazamos la circunf. Tangentes.



6. Trazar una circunferencia tangente a una recta r y a una circunferencia, conociendo un punto T_1 de tangencia con la circunferencia.

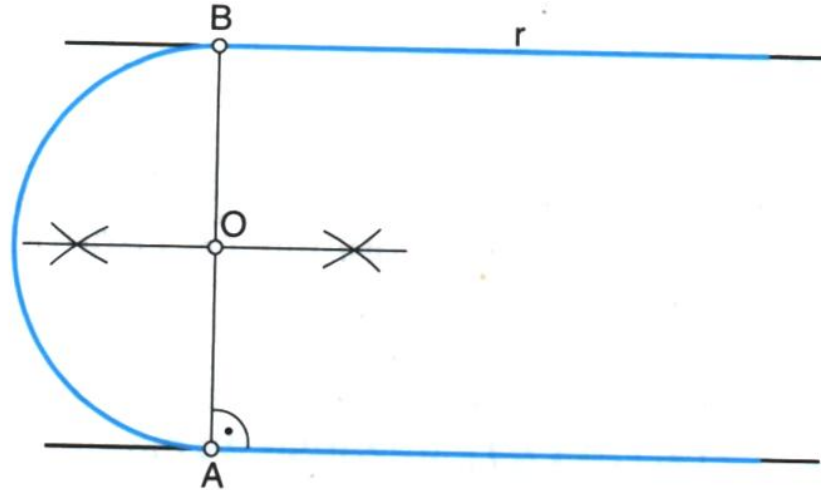
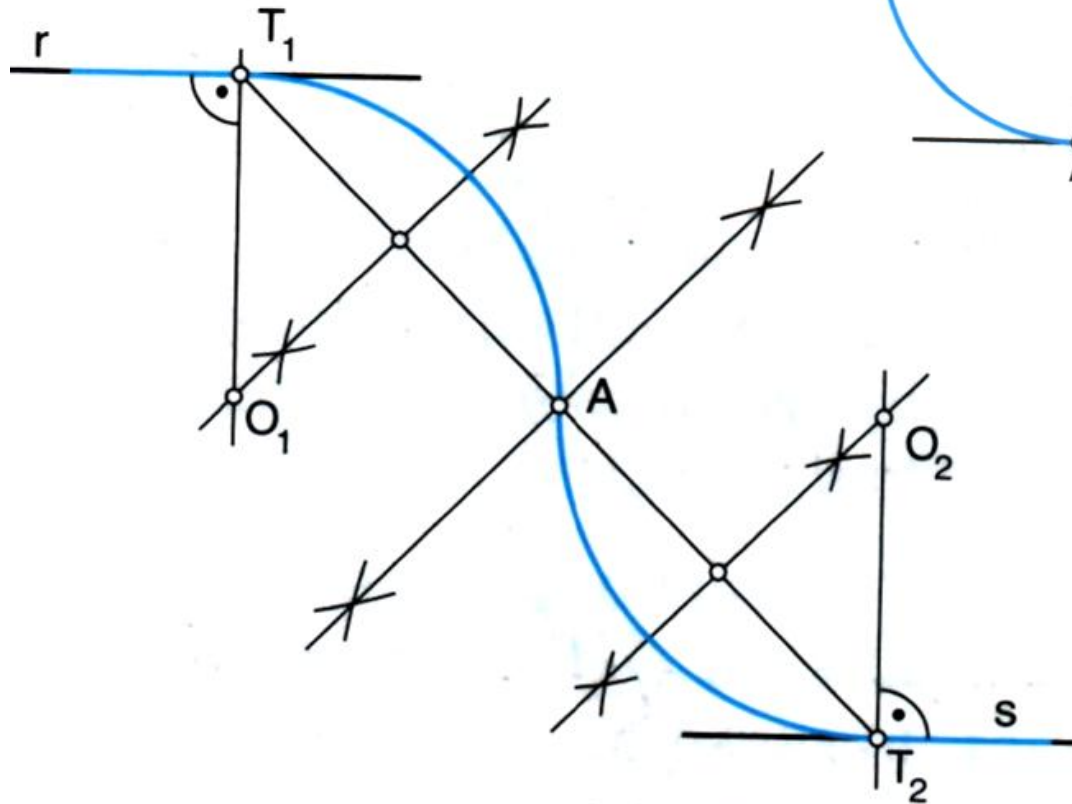
Trazamos una recta que pase por O_1 y T_1 , en la que se van a encontrar también los centros de las circunf. solución.

Trazamos la tangente t que corta a r en el punto A y hallamos las bisectrices de los ángulos que se forman entre ambas rectas, que cortan a la recta que une los centros, pudiendo determinar los de las circunf. solución.



ENLACES ENTRE CIRCUNFERENCIAS Y RECTAS

1. Enlace de dos rectas paralelas mediante un arco de circunferencia.



2. Enlace de dos rectas paralelas con dos arcos del mismo radio y sentido opuesto, dados T_1 y T_2 .

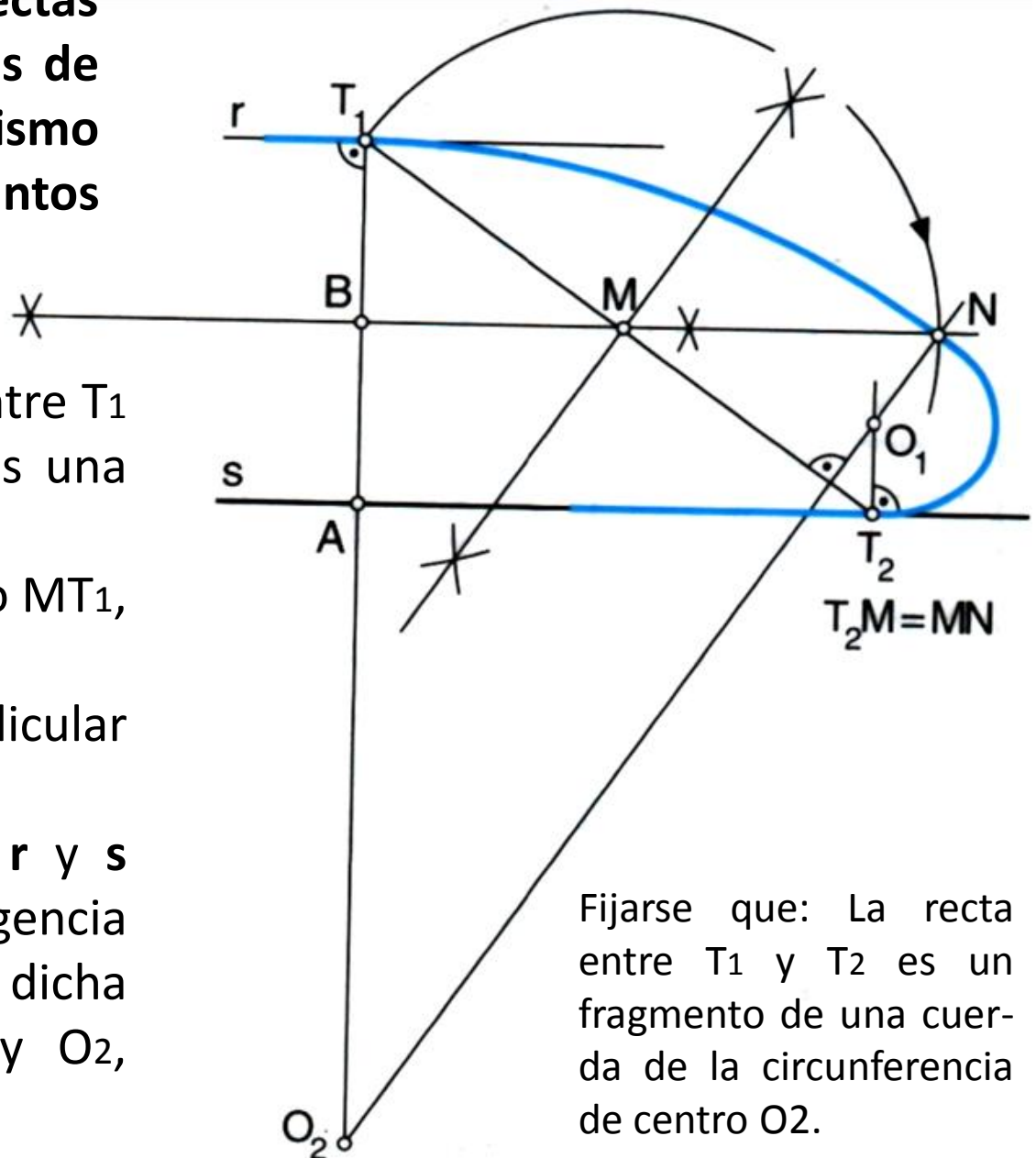
3. Enlace entre dos rectas paralelas con dos arcos de distinto radio y mismo sentido, dados los puntos de enlace T_1 y T_2 .

Mediatriz de la recta entre T_1 y T_2 , y por M trazamos una paralela a r y s .

Con centro en M y radio MT_1 , hallamos N .

Desde N , una perpendicular a la recta entre T_1 y T_2 .

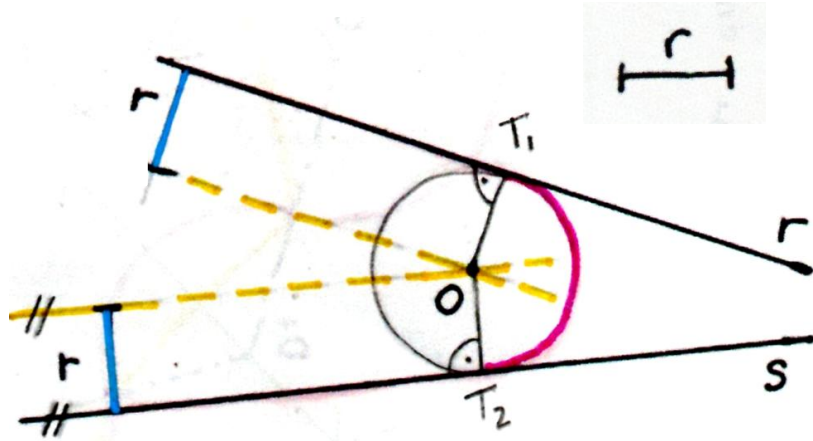
Las perpendiculares a r y s por los puntos de tangencia T_1 y T_2 cortarán a dicha perpendicular en O_1 y O_2 , centros de los arcos.



Fijarse que: La recta entre T_1 y T_2 es un fragmento de una cuerda de la circunferencia de centro O_2 .

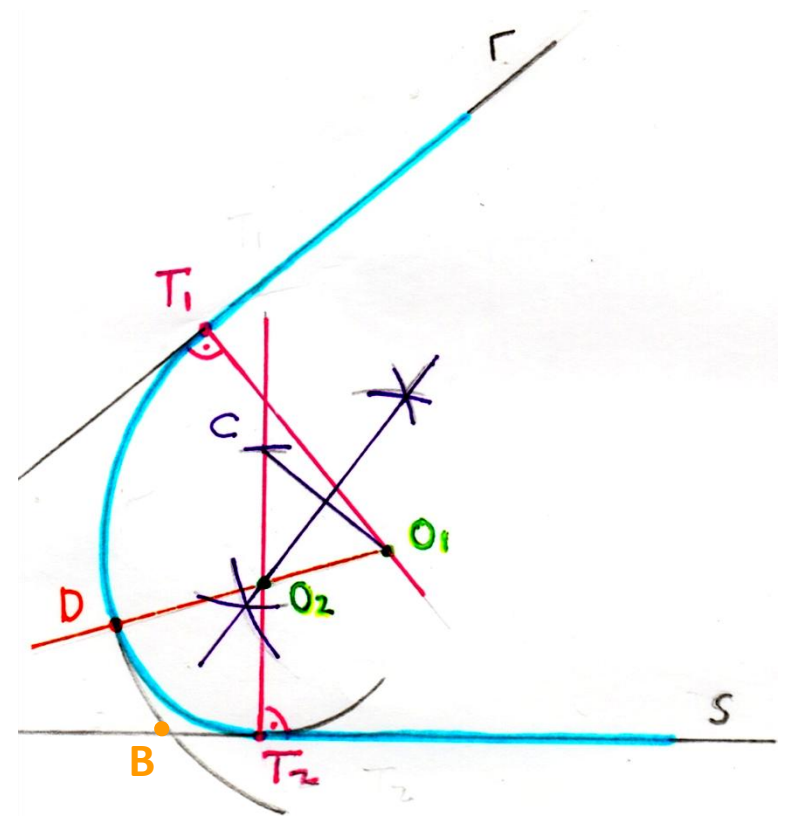
ENLACES ENTRE RECTAS CONVERGENTES

1. Mediante un arco de radio dado.

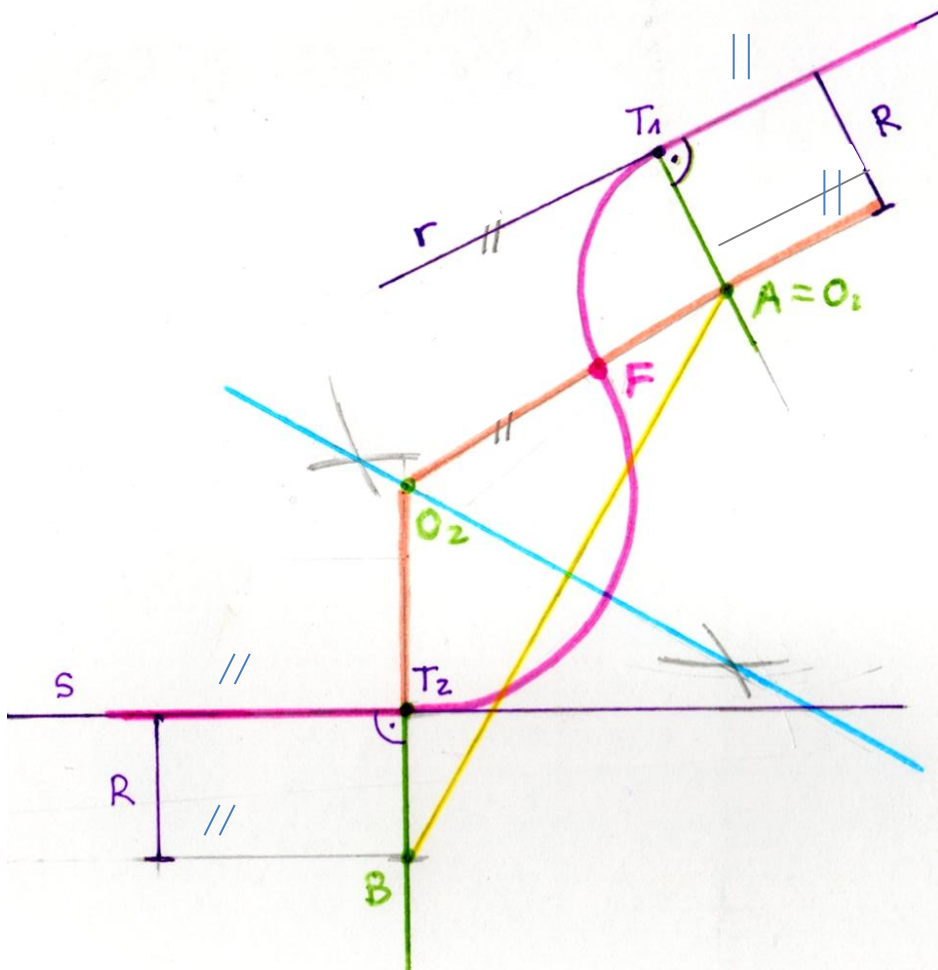


Sobre la perpendicular desde T_1 se sitúa un centro O_1 desde donde se traza un arco tangente a r y que corte a s en B . Desde T_2 se marca en su perpendicular la medida T_1O_1 , obteniéndose C . Haciendo la mediatriz de CO_1 obtenemos O_2 en la perpendicular a s por T_2 . Uniendo los centros y cortando al arco de circunferencia obtenemos D , punto desde el que se traza el arco de centro O_2 .

2. Mediante dos arcos de distinto radio e igual sentido, dados los puntos de enlace T_1 y T_2 .



3. Con dos arcos de sentido contrario, dados los puntos de enlace y el radio de uno de los arcos.



Por T_1 y T_2 se trazan unas perpendiculares a r y s .

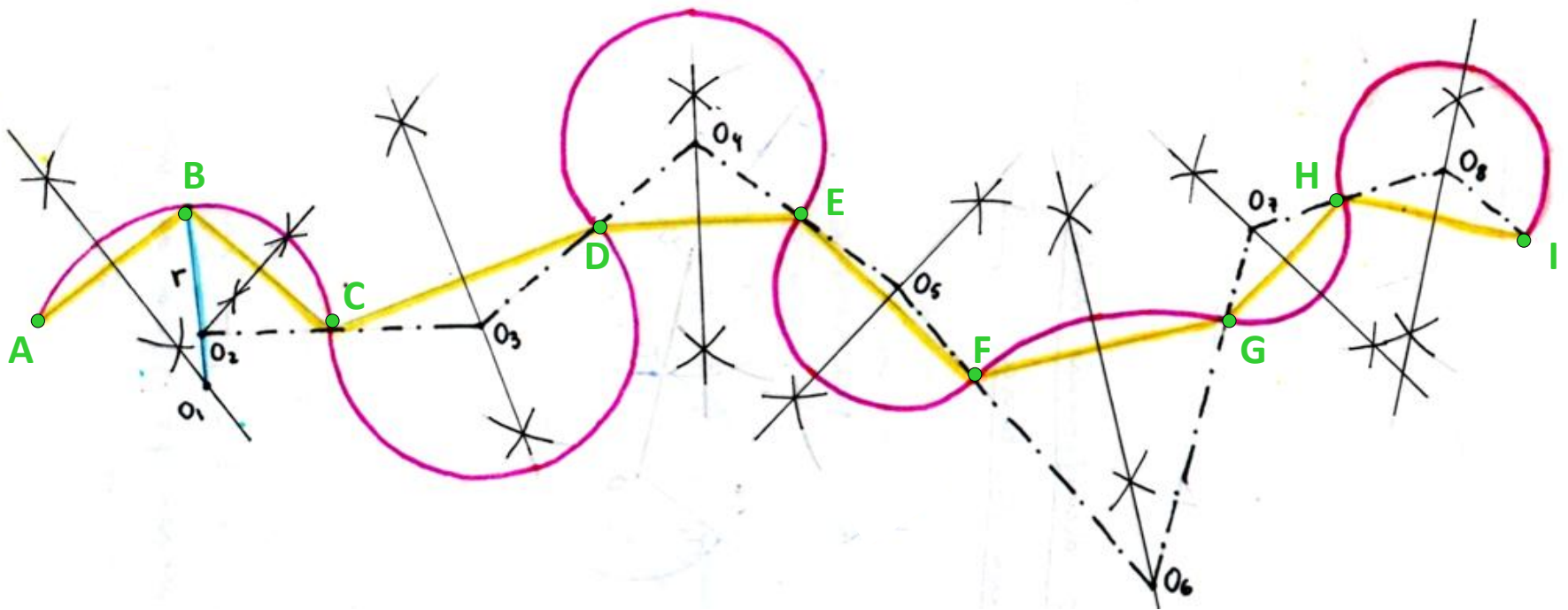
Llevamos la medida del radio dado sobre ellas obteniendo A y B .

Unimos ambos puntos y hallamos su mediatriz, que corta a la perpendicular por T_2 en O_2 , centro de la segunda circunferencia. El punto A es también el centro O_1 de la primera circunferencia.

En la recta que une ambos centros tendremos el punto F de enlace de ambos arcos.

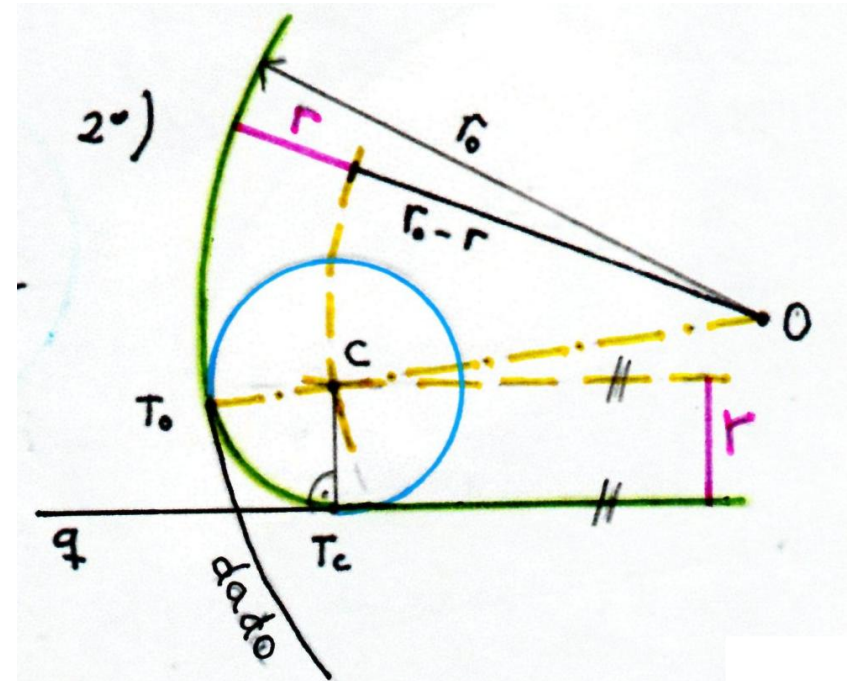
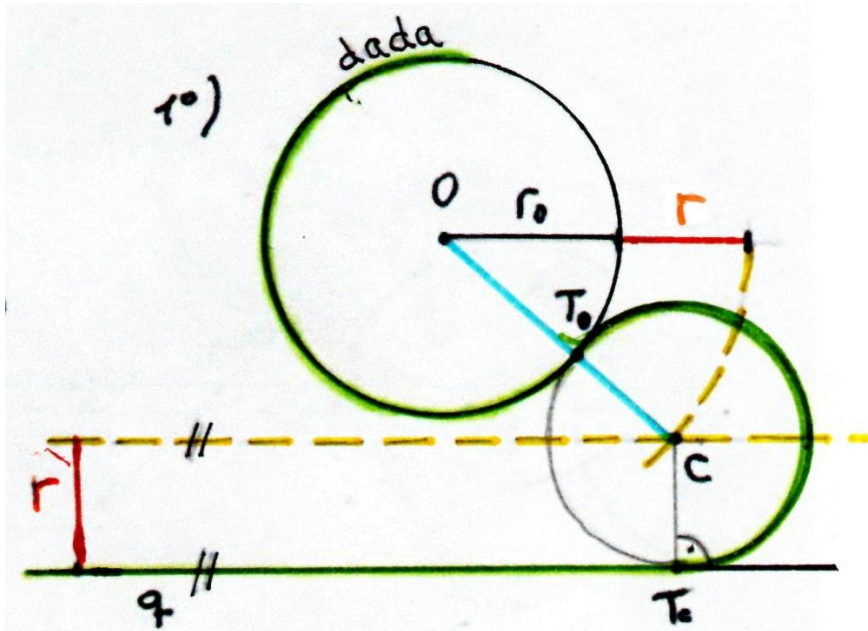
ENLACE ENTRE PUNTOS NO ALINEADOS

Mediante arcos de circunferencia, conociendo el radio de uno de ellos.



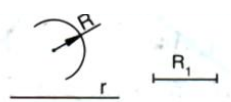
ENLACES ENTRE ARCO Y RECTA

1. Por medio de otro arco dado su radio.

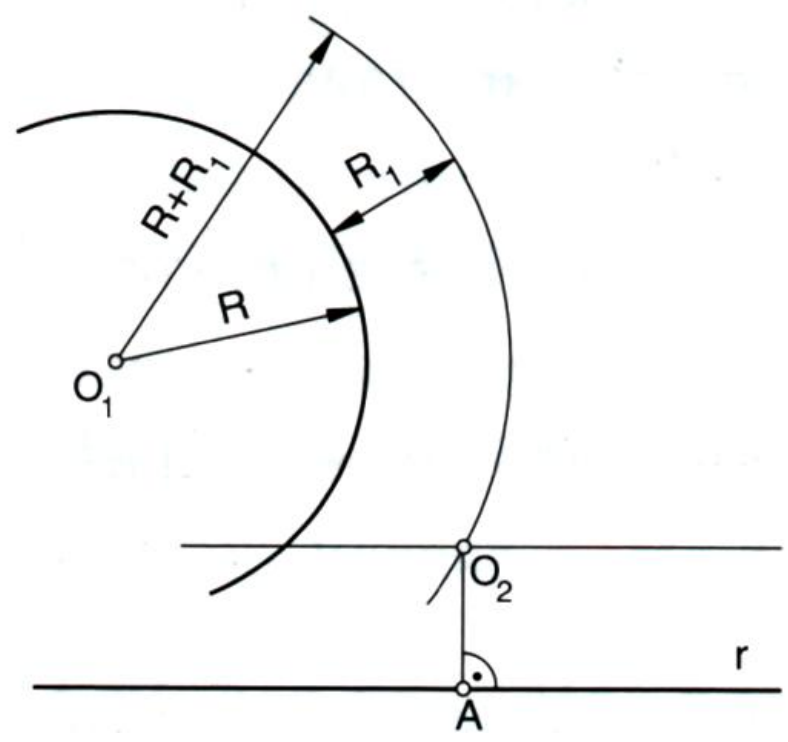
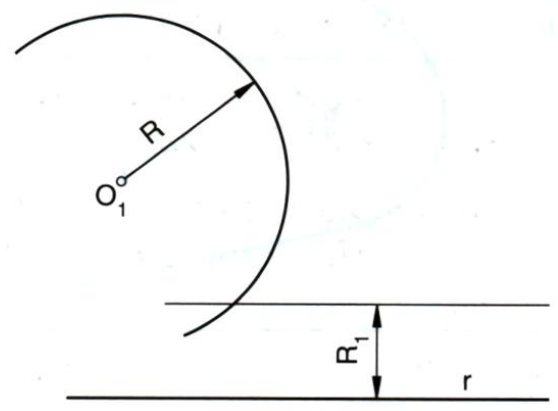


Dada la circunferencia de centro O y la recta q , puede darse que la circunferencia de enlace entre ambas (centro C) sea tangente exterior o interior a la circunferencia dada.

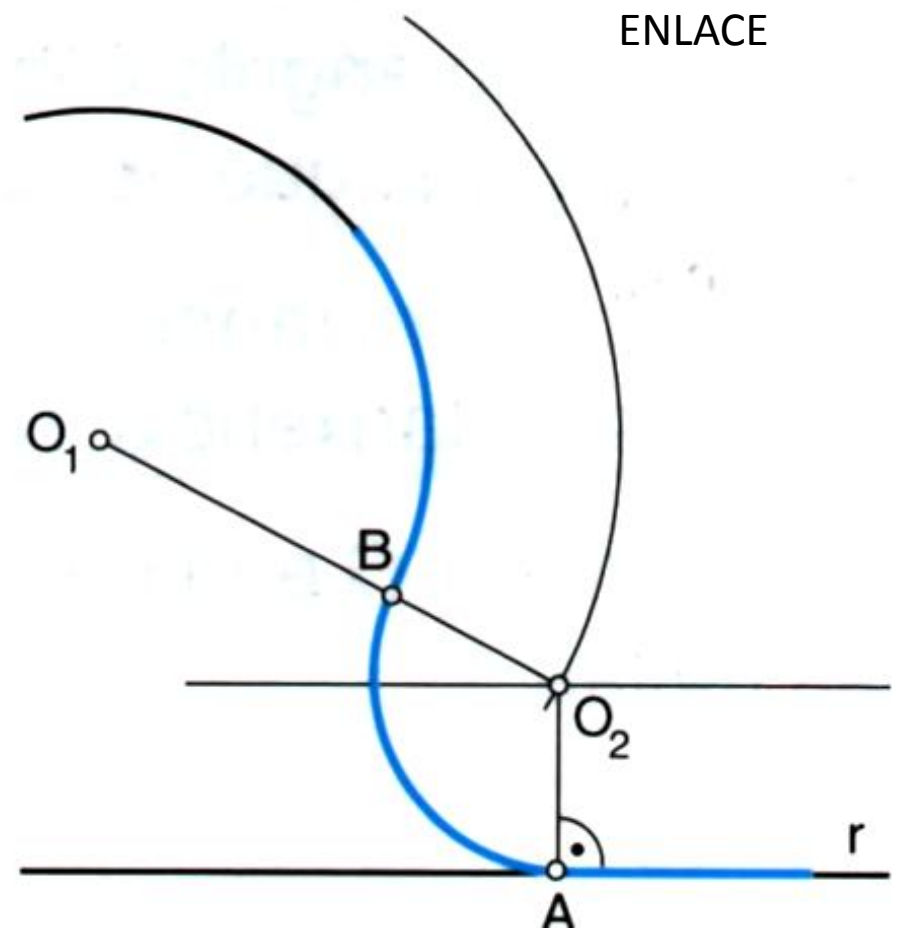
En el primer caso se suman los radios y en el segundo se restan.



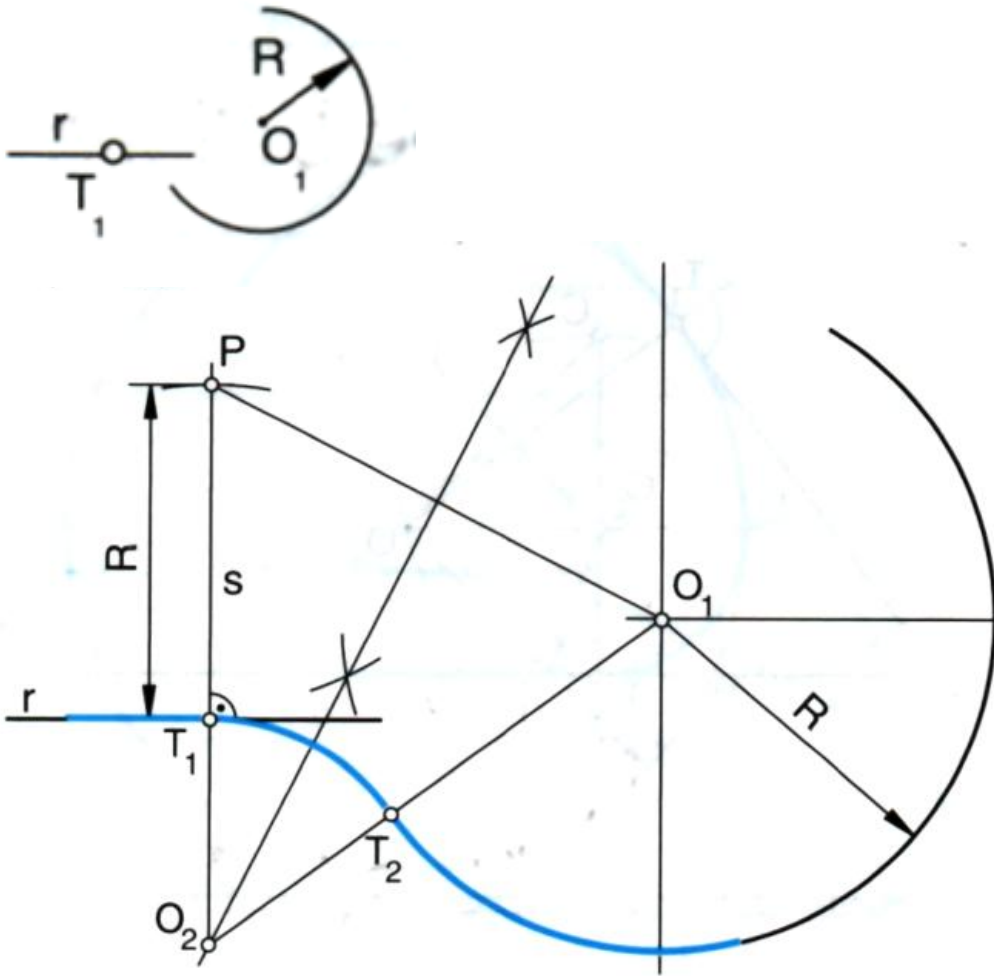
DATOS



ENLACE



2. Unión de un arco de centro O_1 y una recta r , dado el punto de enlace T_1 en la recta.

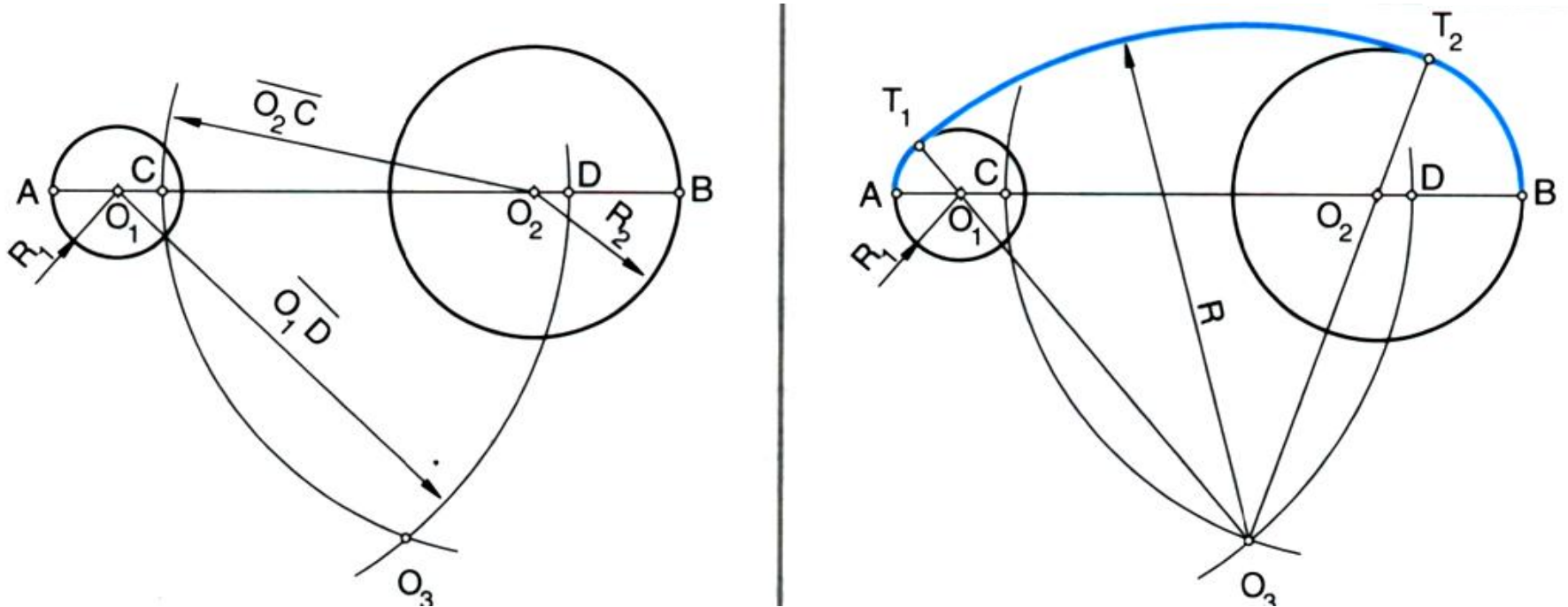


Por T_1 se traza una perpendicular s y se lleva la medida del radio del arco dado, obteniendo el punto P . Unimos P y O_1 trazando su mediatriz que cortará a la recta s en el punto O_2 que es el centro del arco de unión.

En la recta de unión de ambos centros estará en punto de enlace T_2 de los dos arcos.

ENLACE DE CIRCUNFERENCIAS

Unión de dos circunferencias mediante un arco, de radio dado R , tangente a ambas.



1. A recta que une os centros O_1 e O_2 corta as circunferencias en A e en B .

Con raio R , sendo $R > \frac{AB}{2}$, e centro en A e en B , descríbense dous arcos que determinan C e D .

2. Con centro en O_1 e raio $\overline{O_1D}$ trázase un arco.

Con centro en O_2 e raio $\overline{O_2C}$ trázase outro arco, que corta o anterior en O_3 .

3. As rectas que unen O_3 con O_1 e con O_2 determinan sobre cada unha das circunferencias os puntos de tanxencia T_1 e T_2 .

Con centro en O_3 e raio $\overline{O_3T_1}$ trázase o arco tanxente.

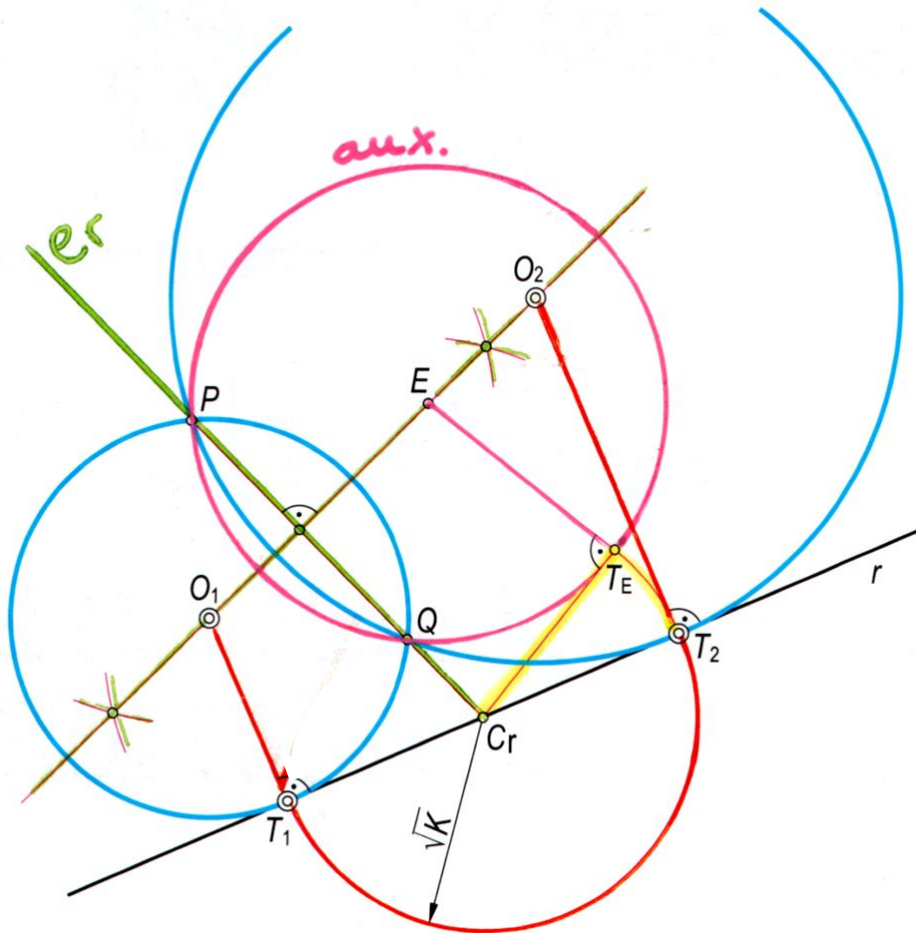
TANGENCIAS



2º BACH

APLICANDO EL CONCEPTO DE POTENCIA

1. Circunferencias tangentes a una recta r y que pasan por dos puntos P y Q .



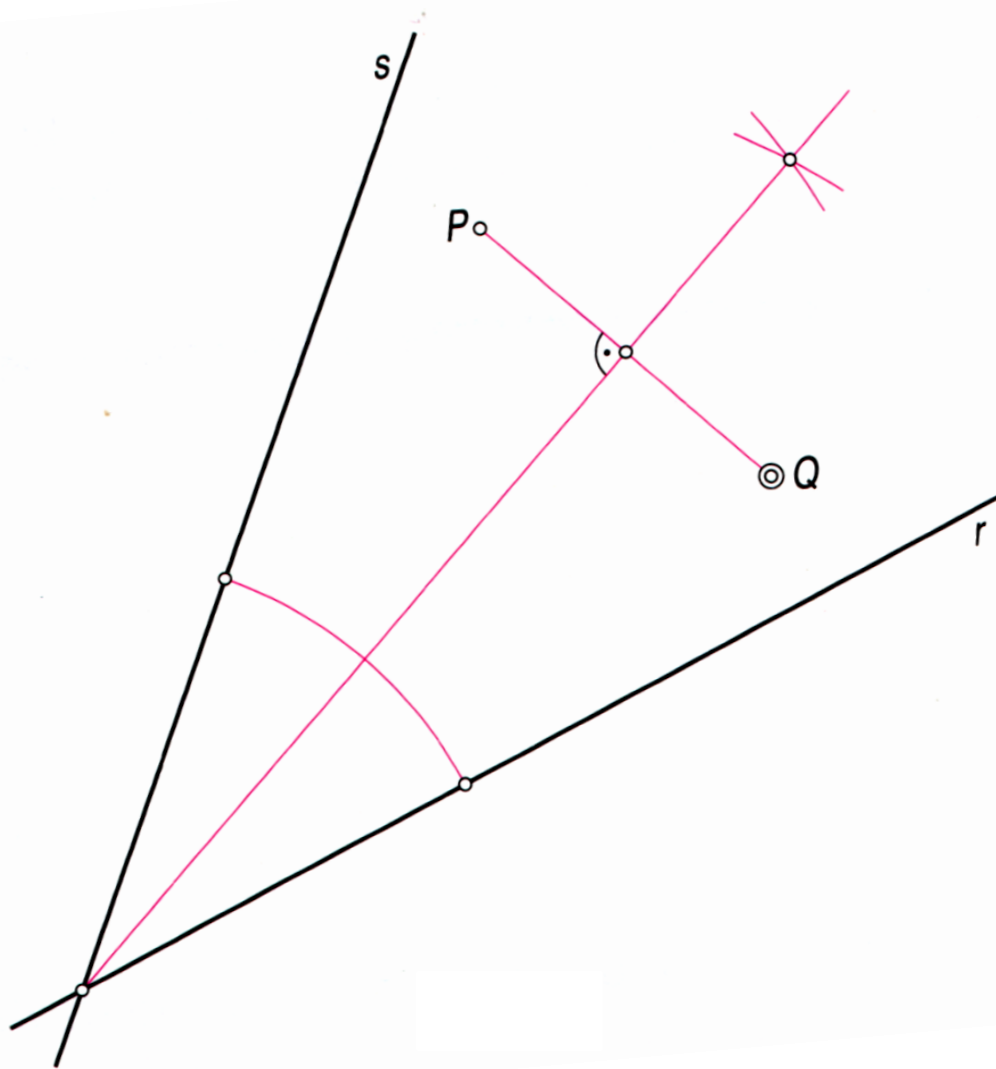
La recta r se considera como una circunferencia de radio infinito.

Todas las circunferencias que pasen por los puntos P y Q tienen como eje radical er la recta que pasa por éstos y tendrán su centro en la mediatriz del segmento PQ .

Como se vio en el tema de **potencia**, el eje radical entre una circunferencia y una recta es la propia recta. Y el centro radical Cr de las mismas será el punto de corte entre el eje radical y la recta r .

Para hallar los puntos de tangencia, nos valemos de una circunferencia auxiliar que pase por P y Q y desde Cr trazamos una tangente a ésta y trasladamos ese punto T_E a la recta r que es el valor de la potencia \sqrt{K} .

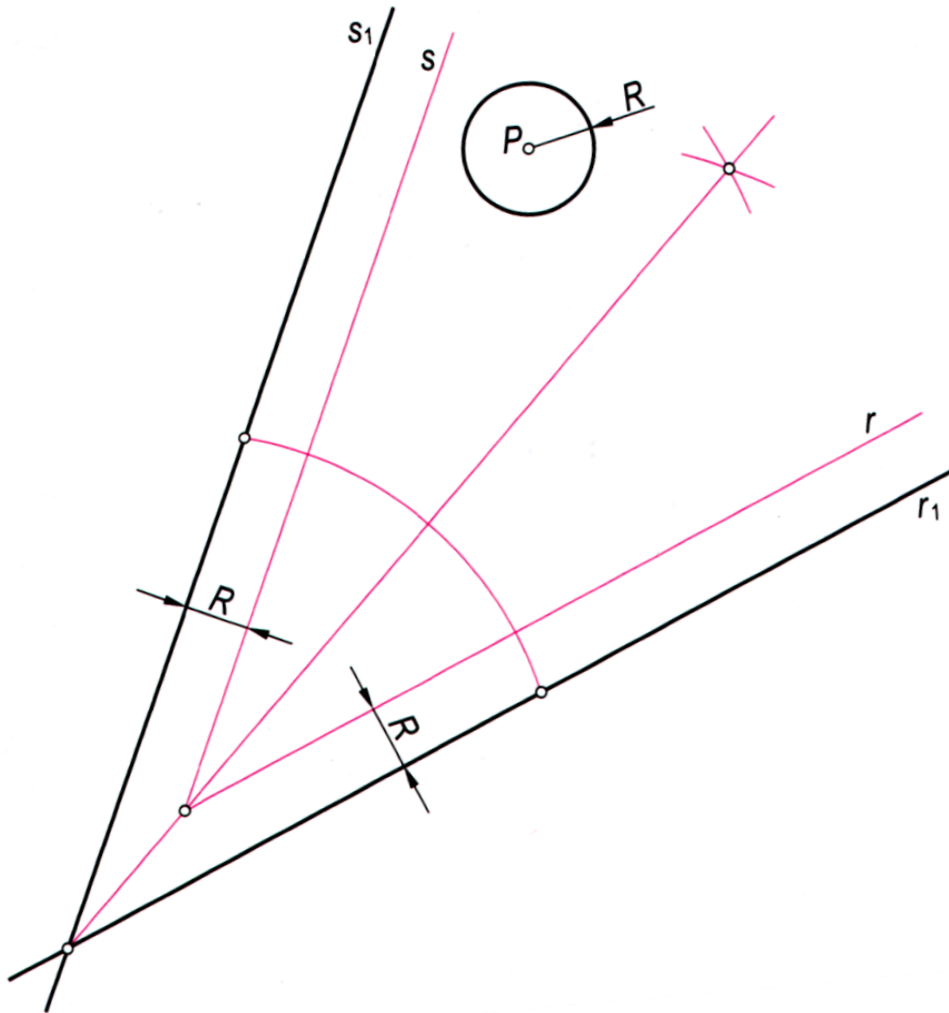
2. Circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan y que pasan por un punto P dado.



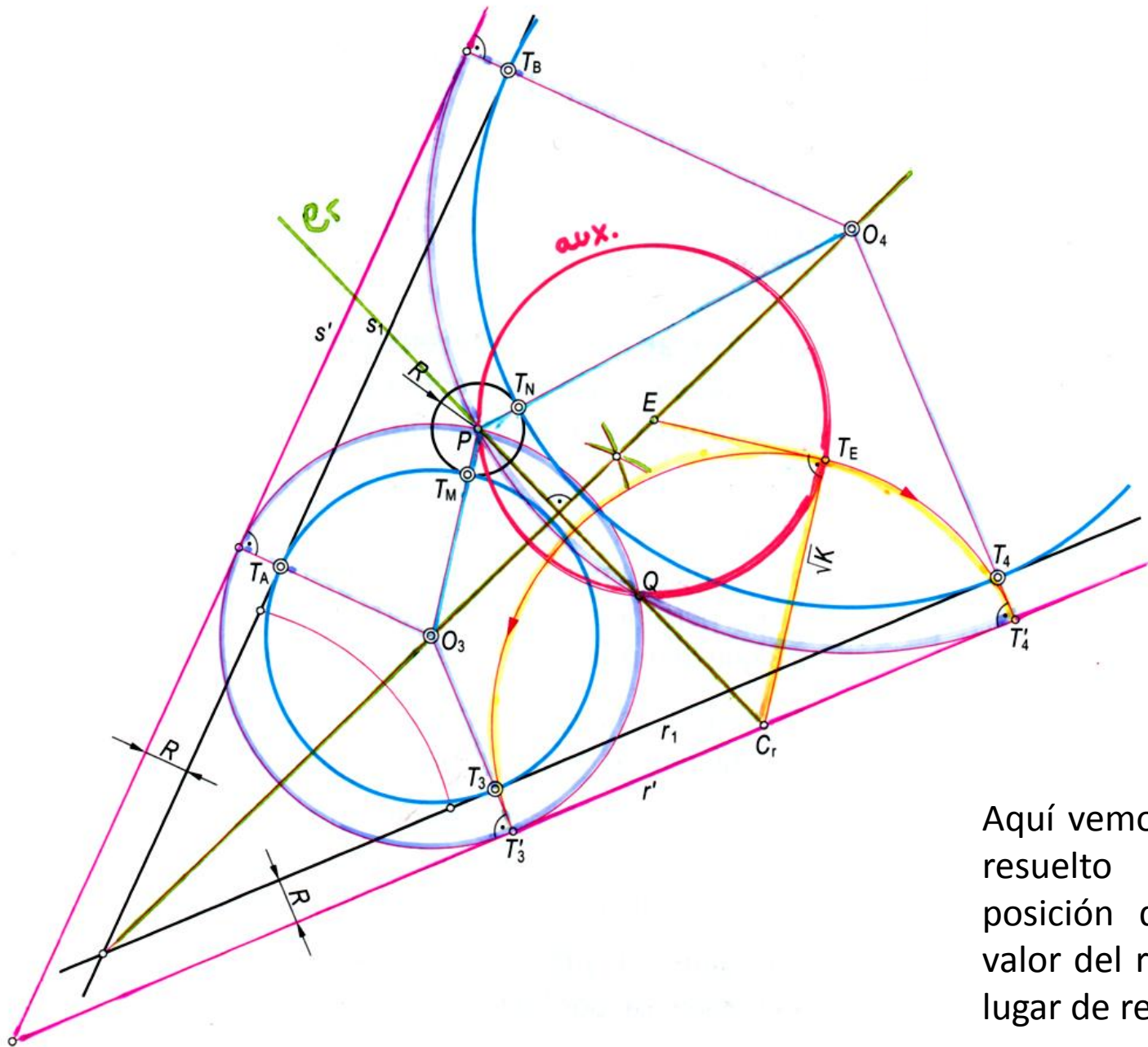
Los centros de esas circunferencias estarán en la bisectriz del ángulo que forman las rectas. Y si pasan por P también pasarán por el punto simétrico Q . Por PQ pasa el eje radical y en la bisectriz (perpendicular al mismo) se encontrarán los centros de las circunferencias buscadas.

En este punto el problema se resuelve igual que en el caso anterior.

3. Circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan y a una circunferencia de centro P .



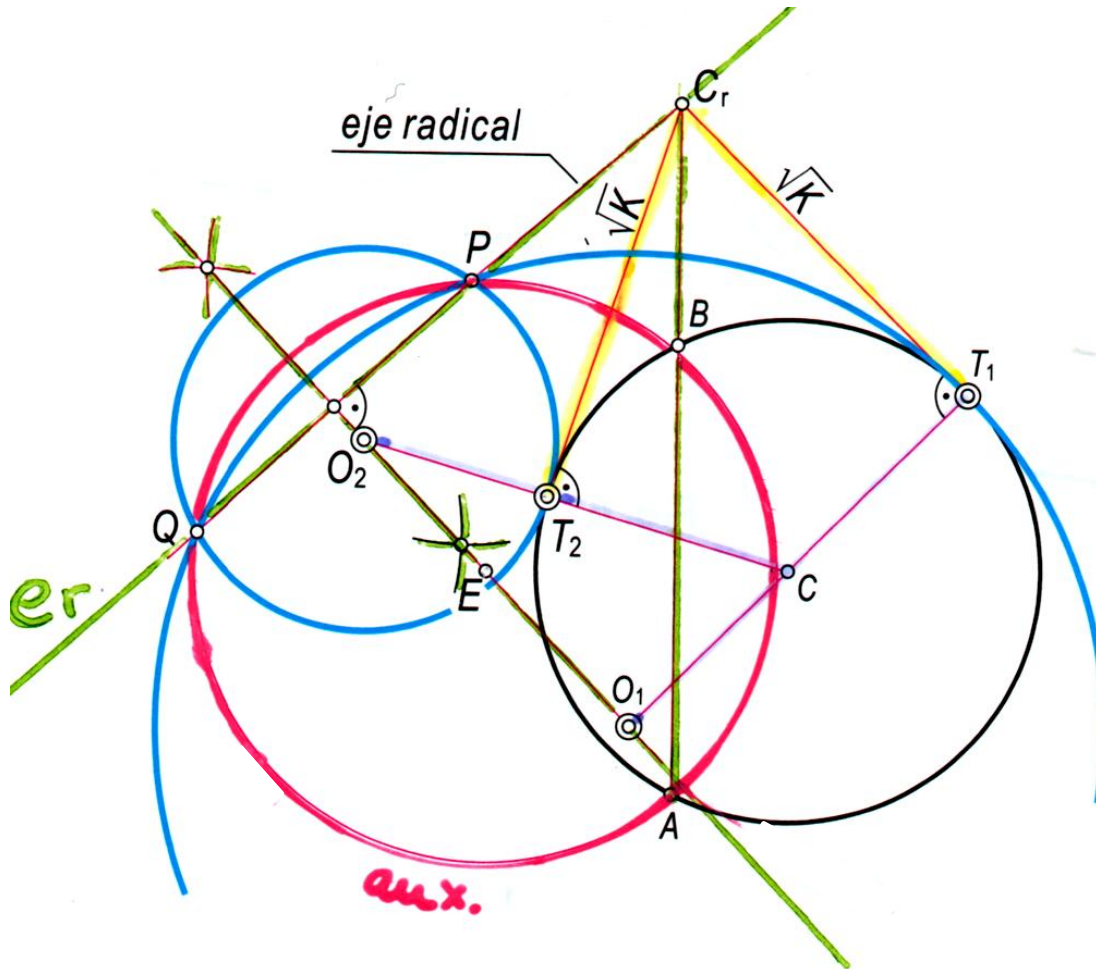
Si reducimos la posición de las rectas el valor del radio R de la circunferencia dada, podremos obrar como en el caso anterior, hallando unas circunferencias que después debemos dilatar añadiendo a su radio la magnitud de ese radio de la circunferencia dada.



Aquí vemos el mismo caso resuelto aumentando la posición de las rectas el valor del radio R dado, en lugar de reducirlo.

4. Circunferencias tangentes a otra de centro C y que pasan por los puntos P y Q .

Las circunferencias que pasarán por P y Q tienen como e_r la recta que pasa por estos puntos, y sus centros se encontrarán en la mediatriz del segmento PQ .



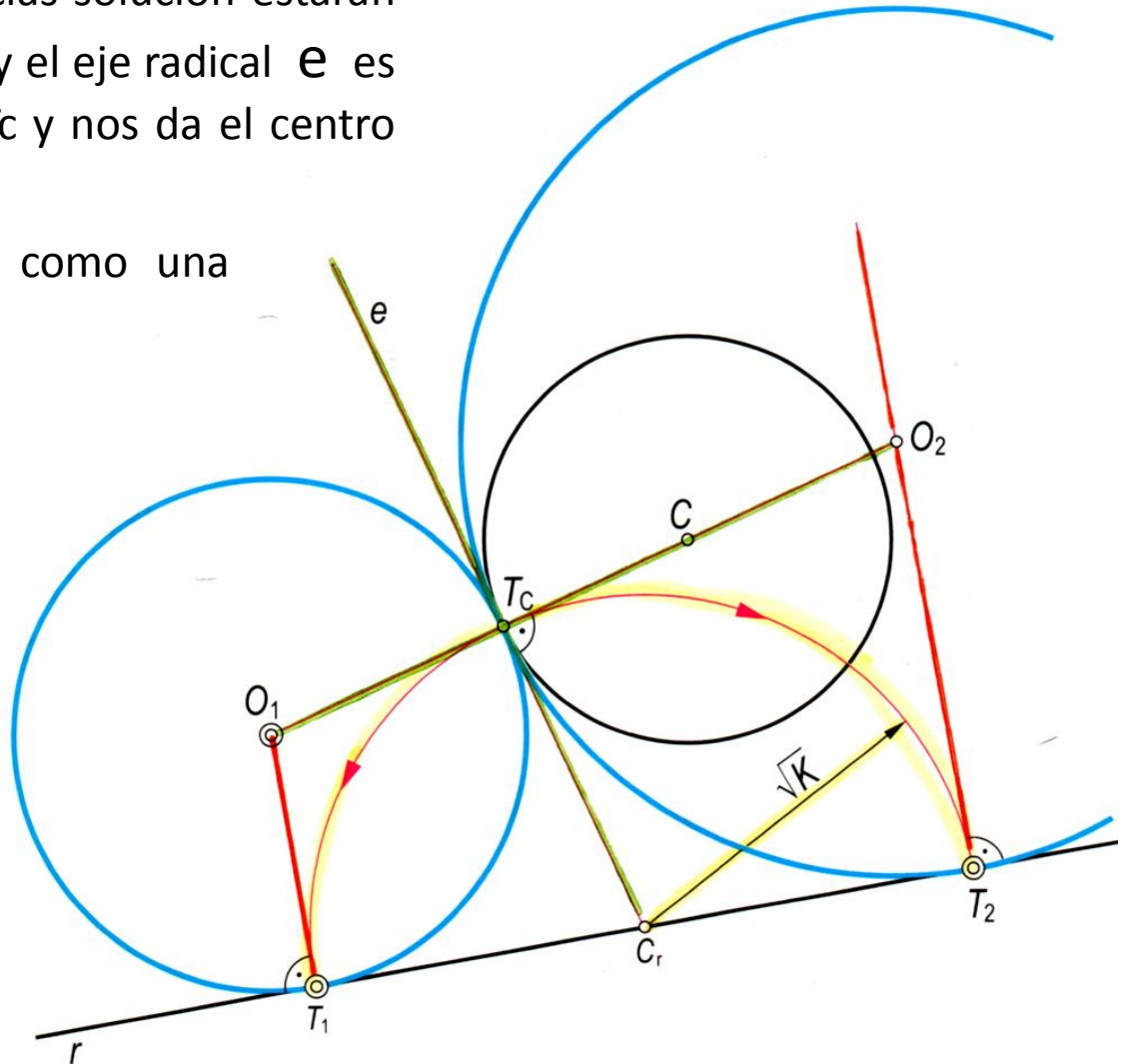
Trazamos una circunferencia auxiliar que tenga su centro E también en la mediatriz que pase por P y Q . Cortará a la circunferencia dada de centro C en A y B por los que pasa el eje radical de ambas. Donde se cortan los dos ejes radicales tendremos el centro radical C_r de todas la circunferencias que pasan por P y Q . La potencia del punto C_r a ellas es la misma \sqrt{K} pudiendo encontrar los puntos de tangencia en la circunferencia dada, a partir de los cuales podemos obtener los centros O_1 y O_2 de las circunferencias solución en la mediatriz.

5. Circunferencias tangentes a otra de centro C y a una recta r conociendo el punto de tangencia T_c en dicha circunferencia .

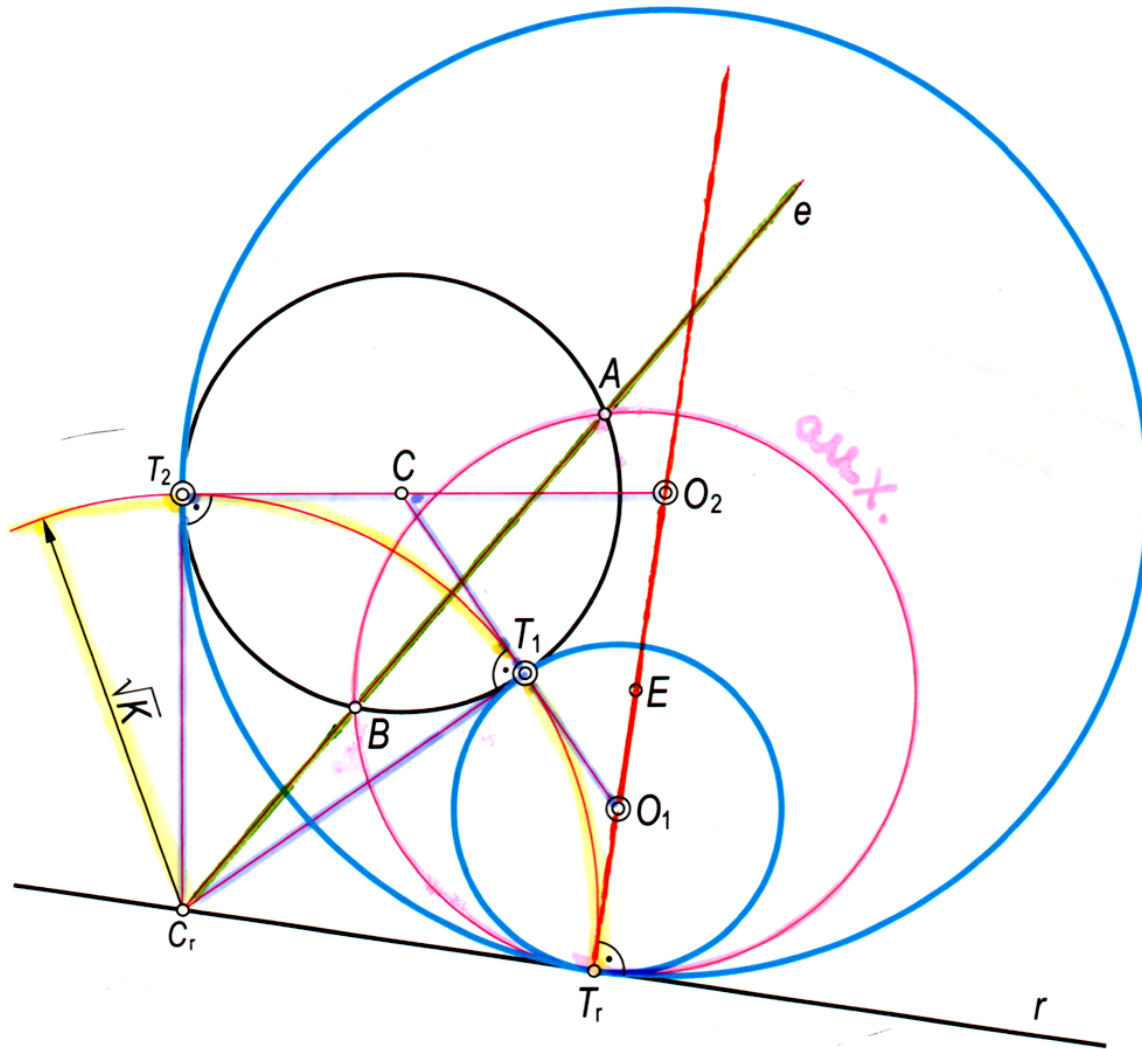
Los centros de las circunferencias solución estarán en la recta que une C con T_c , y el eje radical e es perpendicular a la misma en T_c y nos da el centro radical C_r en la recta r .

Recordemos que la recta es como una circunferencia de radio infinito.

El segmento \sqrt{K} (raíz cuadrada de la potencia de C_r respecto de todas las circunferencias del haz, es la distancia al punto de tangencia T_c . Esta distancia nos dará los otros puntos de tangencia con la recta r , T_1 y T_2 , de los que trazamos perpendiculares para encontrar los centros solución en la recta que pasa por C y T_c .



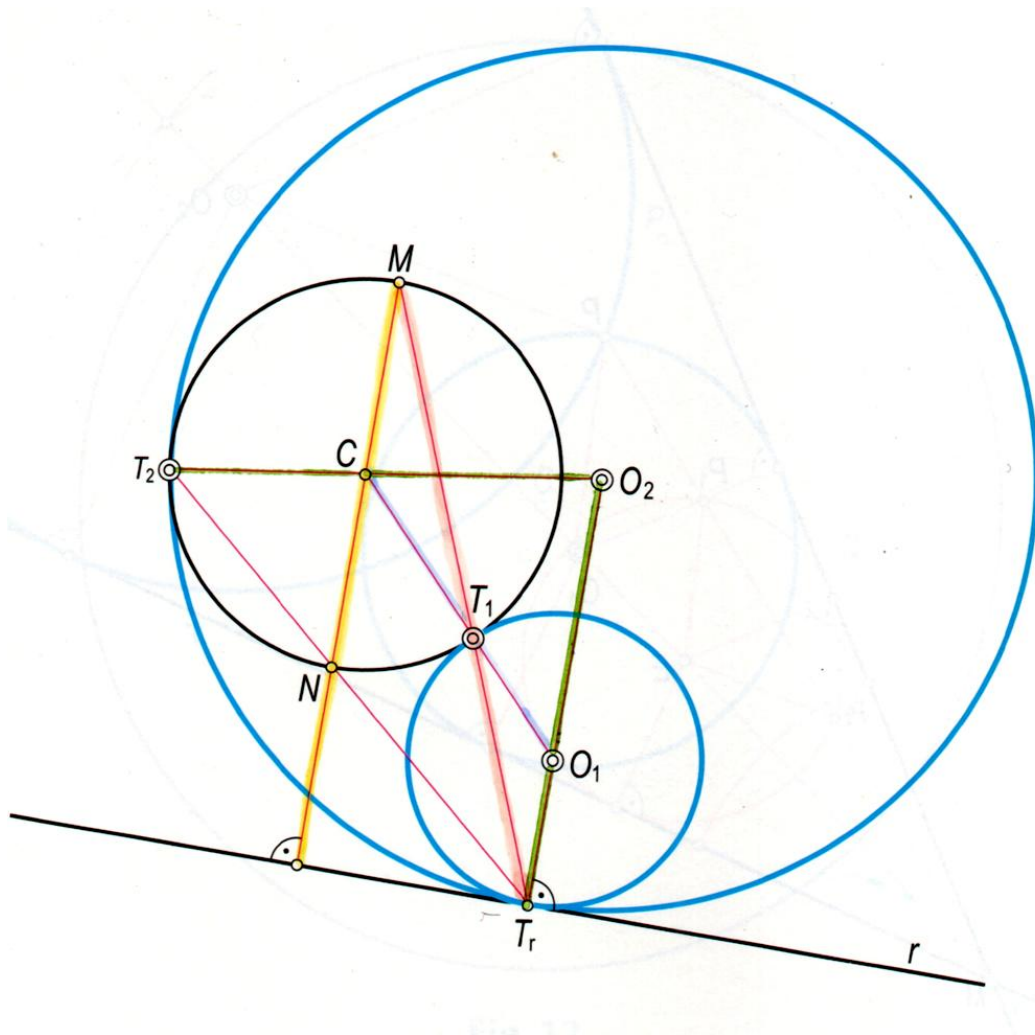
6. Circunferencias tangentes a otra de centro C y a una recta r conociendo el punto de tangencia T_r en dicha recta .



Los centros de dichas circunferencias van a estar en la perpendicular que parte de T_r . Para hallar los otros puntos de tangencia necesitamos encontrar el centro radical, por medio de una circunferencia auxiliar de centro E que corta a la dada en A y B, por los que pasa el eje radical de ambas que corta a la recta r en C_r . La distancia $C_r T_r (\sqrt{K})$ nos dará T_1 y T_2 , que uniendo con C nos da los centros O_1 y O_2 en la perpendicular por T_r .

APLICANDO EL CONCEPTO DE INVERSIÓN

1. Circunferencias tangentes a otra de centro C y a una recta r conociendo el punto de tangencia T_r en dicha recta .



Es el caso 6 anterior por potencia, pero por inversión.

M y N son los centros de inversión positiva y negativa, en la perpendicular a r por C , que transforman la circunferencia dada en su inversa la recta r , y viceversa.

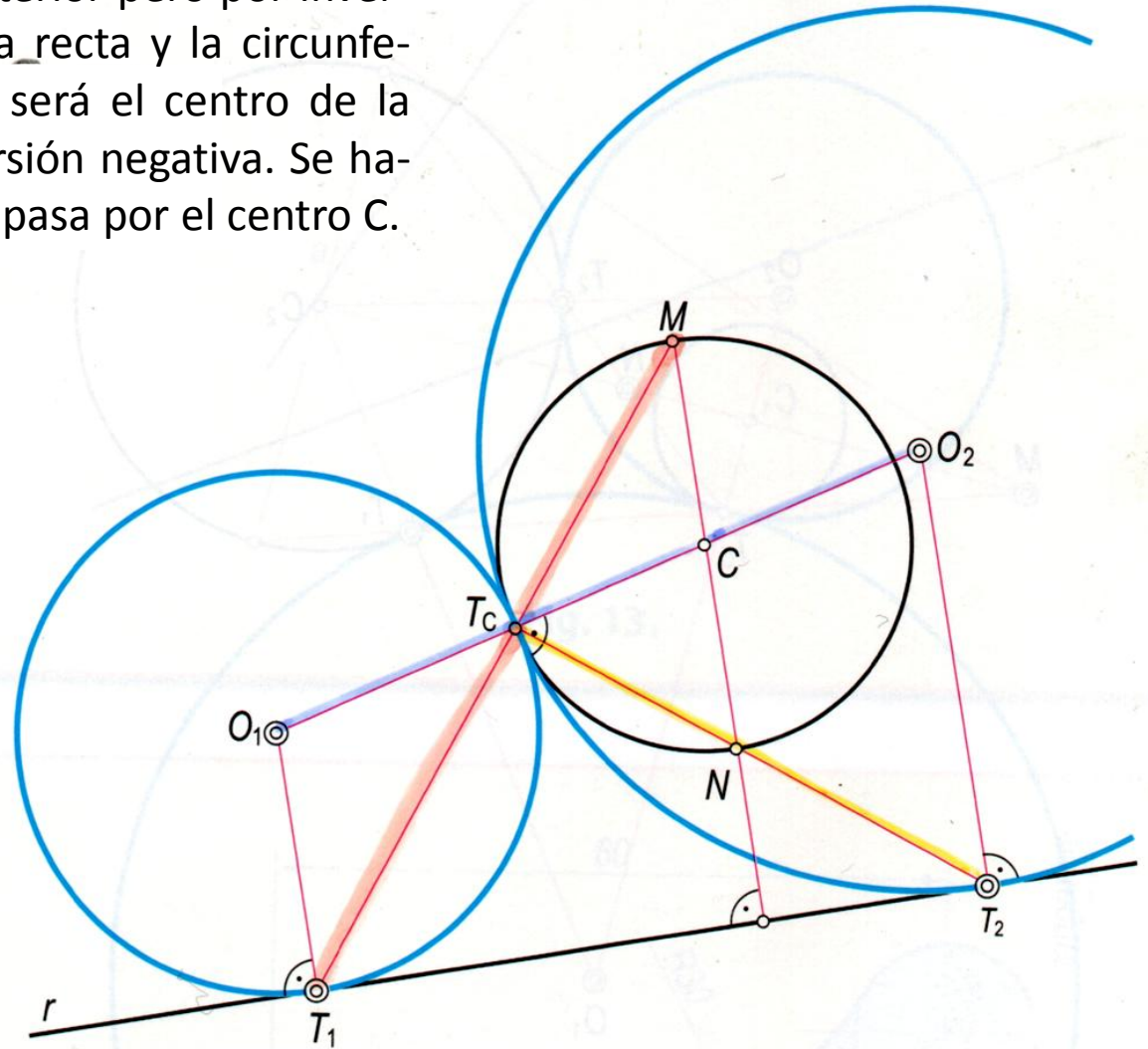
Uniéndolo el punto de tangencia T_r dado con cada uno encontramos los otros puntos de tangencia de las circunferencias solución. Y los centros de las mismas se encuentran en la intersección entre la perpendicular a r por T_r y las rectas que pasan por esos puntos de tangencia y el centro C .

2. Circunferencias tangentes a otra de centro C y a una recta r conociendo el punto de tangencia T_c en dicha circunferencia.

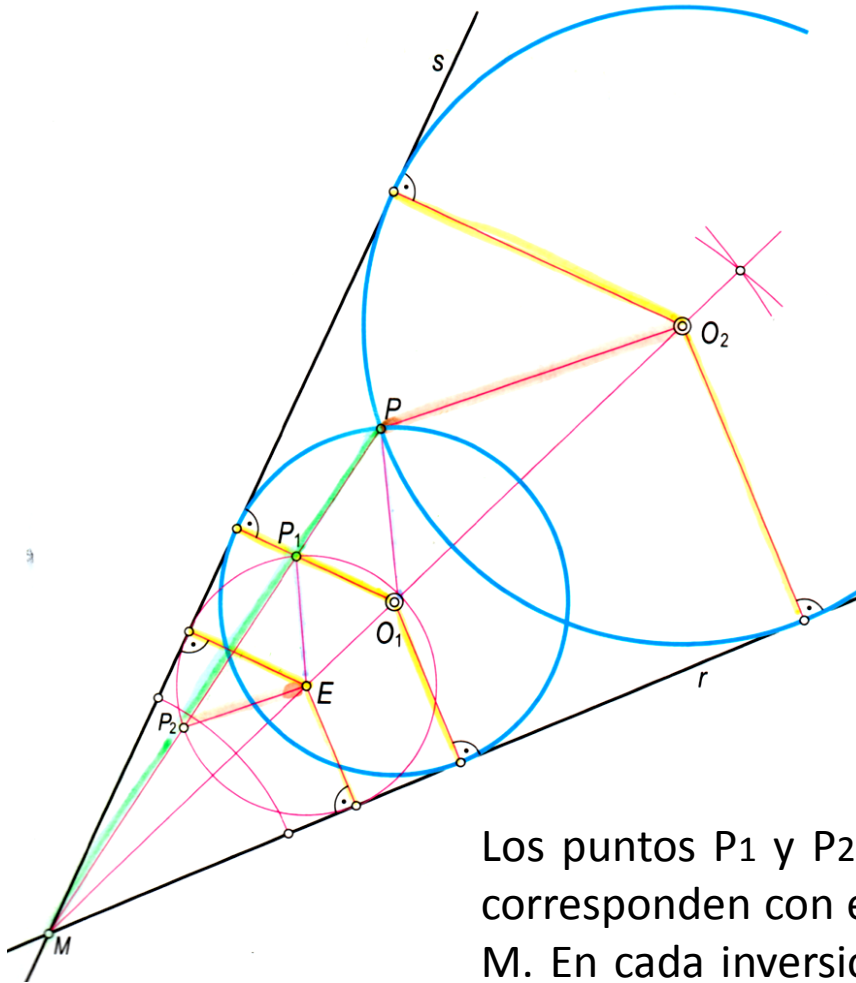
Es el mismo caso del punto 5 anterior pero por inversión. Teniendo en cuenta que la recta y la circunferencia son inversas entre sí, M será el centro de la inversión positiva y N de la inversión negativa. Se hallan con la perpendicular a r que pasa por el centro C .

Uniéndolo el punto de tangencia dado con M y N obtenemos los otros puntos de tangencia de las circunferencias solución.

Sus centros se encontrarán en el cruce de las perpendiculares a r desde esos puntos de tangencia con la recta que unen T_c con C .



3. Circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan y que pasan por un punto P dado.

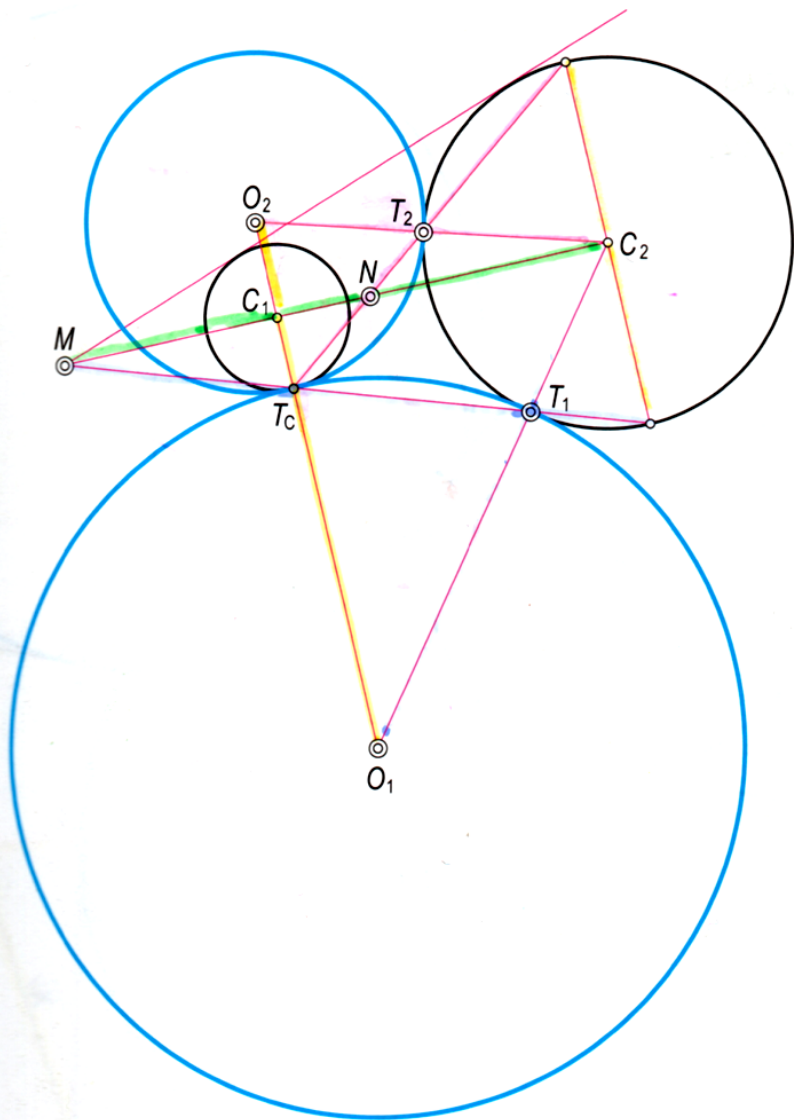


Es el caso 2 del apartado resuelto por potencia, pero por inversión.

Sabemos que la inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por él, estando los centros de ambas alineados con el centro de inversión. Partiendo de esto, una circunferencia cualquiera de centro E tangente a ambas rectas se puede transformar en otras también tangentes a ellas, por inversiones de distinta potencia de inversión y centro de inversión común en M , donde se cortan r y s .

Los puntos P_1 y P_2 , donde la recta PM corta a la circ. auxiliar, se corresponden con el punto P en dos inversiones positivas de centro M . En cada inversión, los centros de las circ. solución, se hallan en las intersecciones de la bisectriz de las rectas con las paralelas por P a las rectas P_1E y P_2E .

4. Circunferencias tangentes a otras dos de centros C_1 y C_2 conociendo el punto de tangencia T_c en una de ellas.



La inversión positiva de centro M que permite transformar la circunferencia C_1 en la C_2 , permite calcular el punto T_1 , inverso de T_c y punto de tangencia de una de las circ. Solución con la circ. C_2 .

El centro O_1 de una de las soluciones es la intersección de las rectas C_1T_c y C_2T_1 .

La otra parte se resuelve por inversión negativa de centro N , obteniéndose el punto T_2 , inverso de T_c , y punto de tangencia de la segunda solución con la circ. C_2 . Su centro O_2 está en la intersección de las rectas C_1T_c y C_2T_2 .