

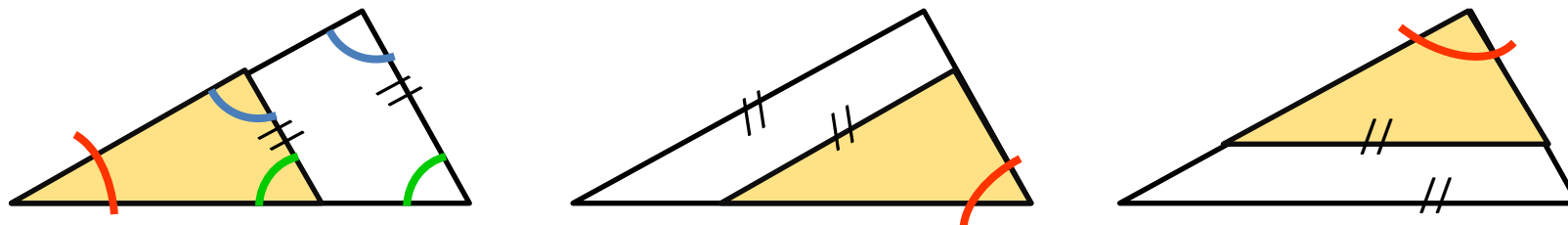
# POTENCIA POLARIDAD INVERSIÓN

2º Bach

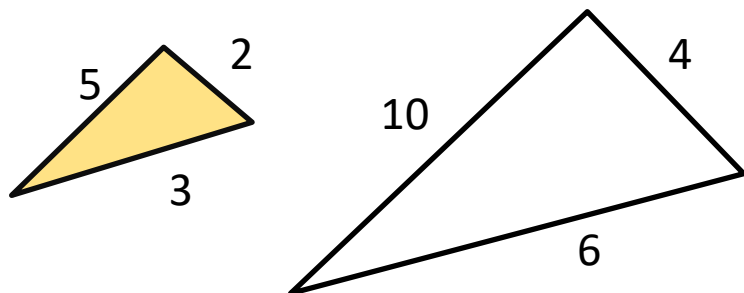
# INTRODUCCIÓN

## TEOREMA DE LA PROPORCIONALIDAD DE THALES

“ Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado”



Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales. Son proporcionales porque aunque su tamaño es distinto la forma es igual, por lo que la razón de proporcionalidad entre sus lados es la misma.



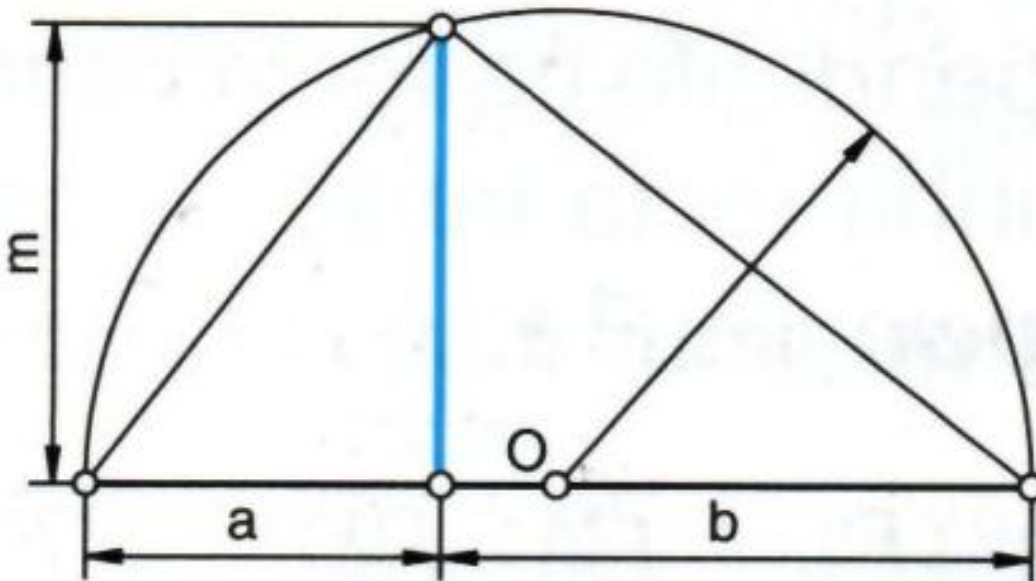
$$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{10}{5} = 2$$

La razón de proporcionalidad es 2.

## TEOREMAS DE EUCLIDES

- **Teorema de la altura:** “En todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa”.

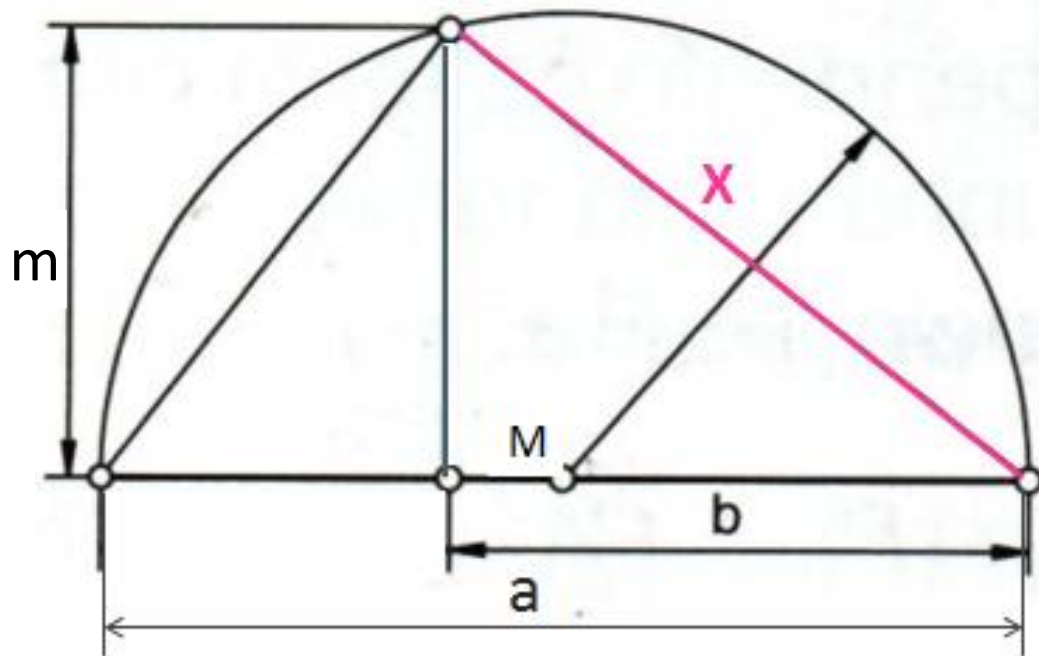
Este teorema es la aplicación directa de la construcción de la media proporcional entre dos segmentos.



$$\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

$$m^2 = a \cdot b$$

- **Teorema del cateto:** “En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella”.



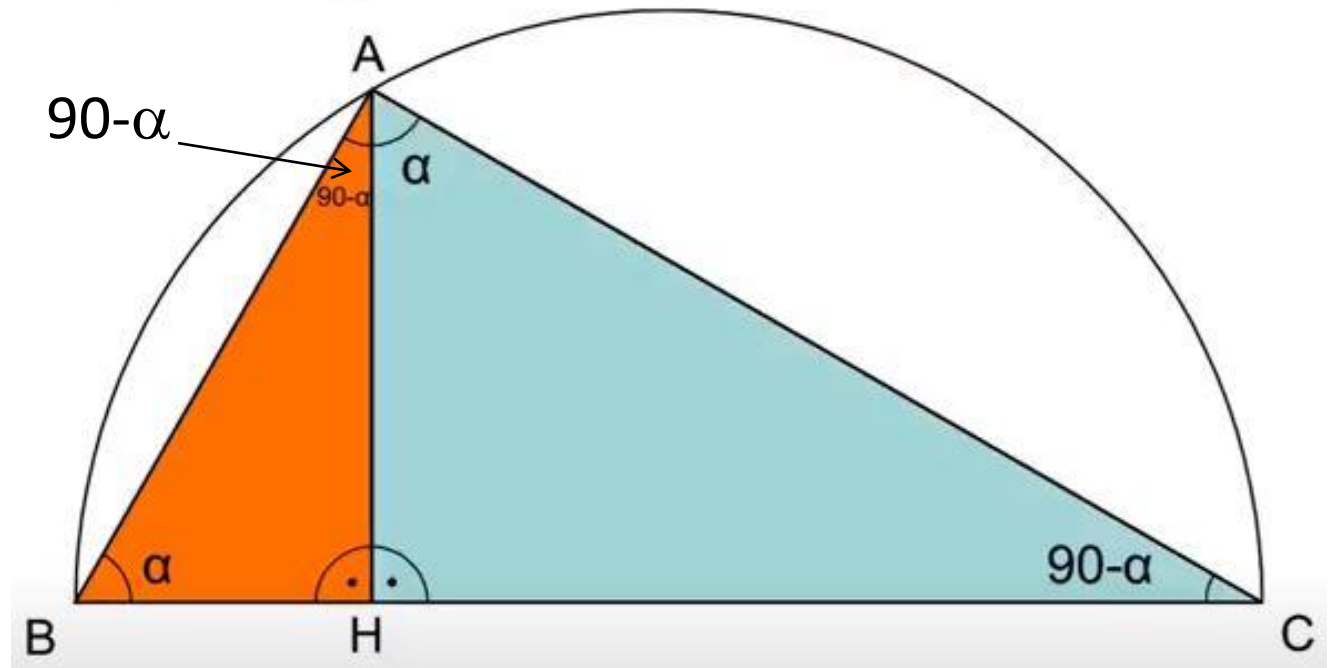
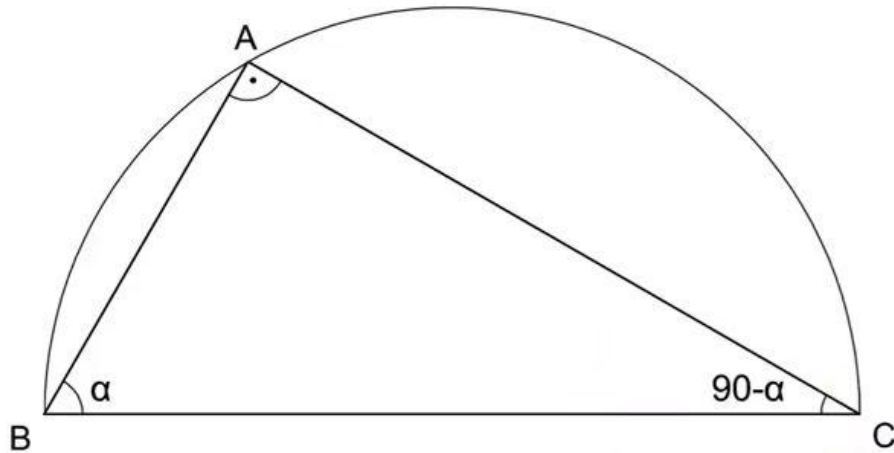
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$$x^2 = a \cdot b$$

$$x = \sqrt{a \cdot b}$$

EXPLICACIÓN: Teorema de la altura de Euclides  
Teorema de la proporcionalidad de Thales

Triángulos rectángulos





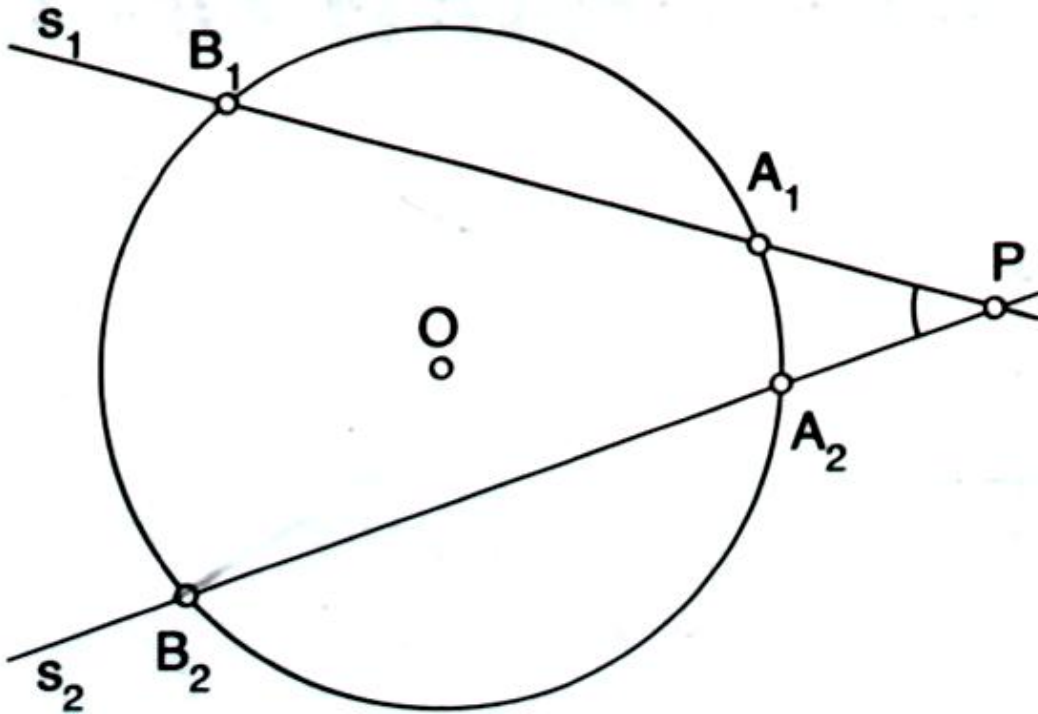
Dos magnitudes son **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES** cuando si aumenta una la otra también lo hace, o si una disminuye la otra también disminuye.

Contrariamente, dos magnitudes son **INVERSAMENTE PROPORCIONALES** si el aumento de una de ellas supone la disminución de la otra, y viceversa.

De este modo el concepto de **POTENCIA** se basa en la **PROPORCIONALIDAD INVERSA** ; es un tipo de proporcionalidad inversa.

# POTENCIA

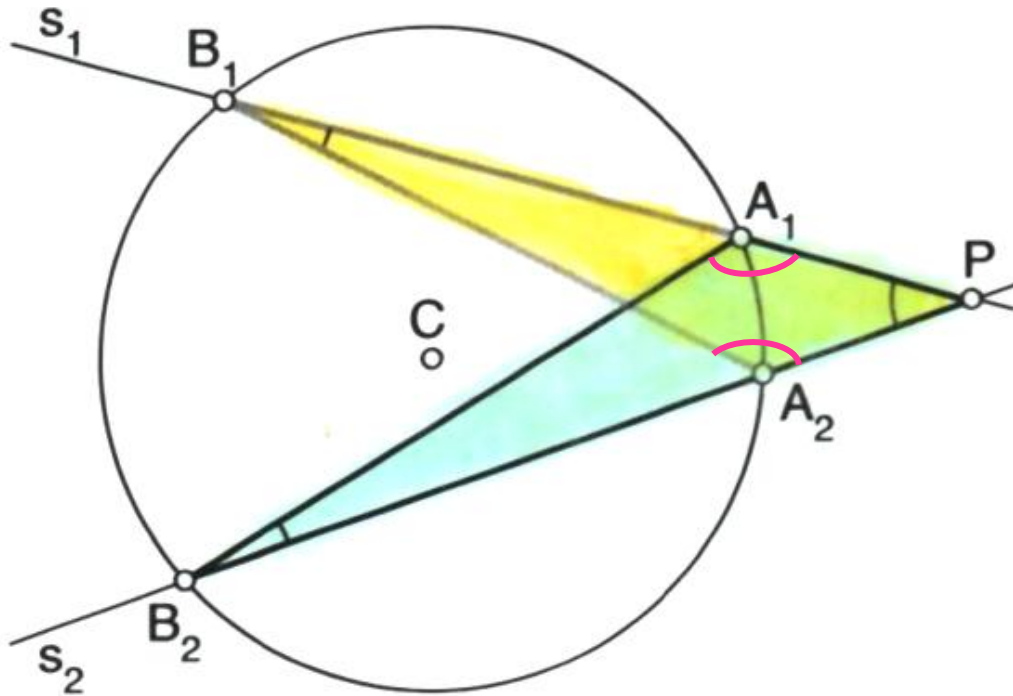
(de un punto  $P$  respecto de una circunferencia)



Es el valor constante que resulta del producto de las distancias de  $P$  a los dos puntos de intersección de la circunferencia con la recta que los une y pasa por  $P$ . El valor de esta constante se llama potencia del punto  $P$  respecto a la circunferencia :

$$p(P) = PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = PA_3 \cdot PB_3 = K \text{ (constante)}$$

## Demostración:



En efecto, los triángulos que se forman :

$$\triangle PA_1B_2 \quad \text{y} \quad \triangle PA_2B_1$$

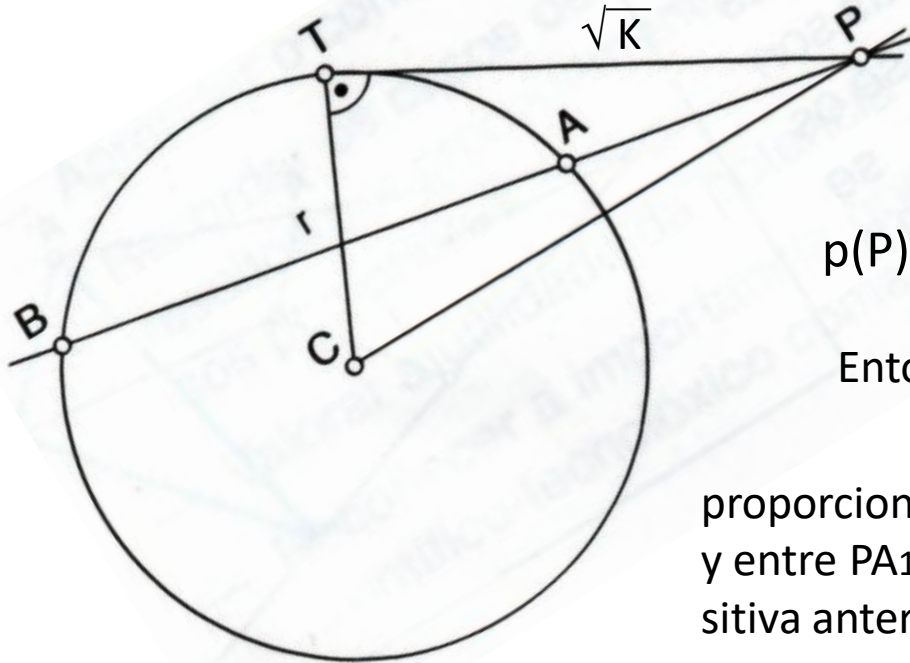
son semejantes, puesto que sus tres ángulos son iguales y, por tanto, sus lados son proporcionales, de manera que:

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_2}} = \frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_1}} \Rightarrow \overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PA_2} \cdot \overline{PB_2} = K$$

De todo lo visto se deduce:  $p(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

# POTENCIA DEL SEGMENTO DE TANGENTE

Como vimos, la potencia de un punto respecto a una circunferencia es un valor constante independientemente de la recta secante que tracemos.



Si consideramos una recta tangente como la posición límite de una secante, podemos determinar que:

$$p(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT} \cdot \overline{PT} = \overline{PT}^2 = K \Rightarrow \overline{PT} = \sqrt{K}$$

Entonces:  $\frac{\overline{PA}}{\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{\overline{PB}}$  De donde resulta que el segmento  $\sqrt{K}$  es media

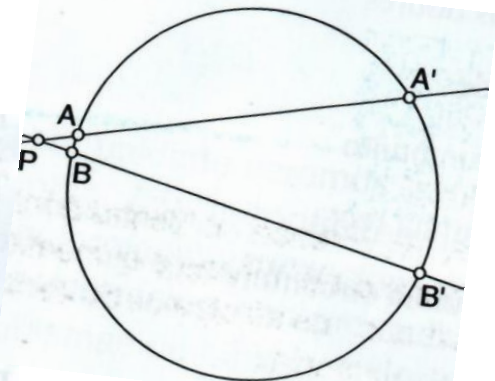
proporcional entre los segmentos PA y PB en este caso, y entre PA<sub>1</sub> y PB<sub>1</sub> así como entre PA<sub>2</sub> y PB<sub>2</sub> en la diapositiva anterior.

## Puntos concíclicos

Da definición de potencia obtenemos un criterio para determinar se catro puntos son *concíclicos*, é decir, se pertencen a unha circunferencia.

Dous pares de puntos A, A' e B, B', situados sobre dúas rectas concorrentes nun punto P, son concíclicos se se cumpre que:

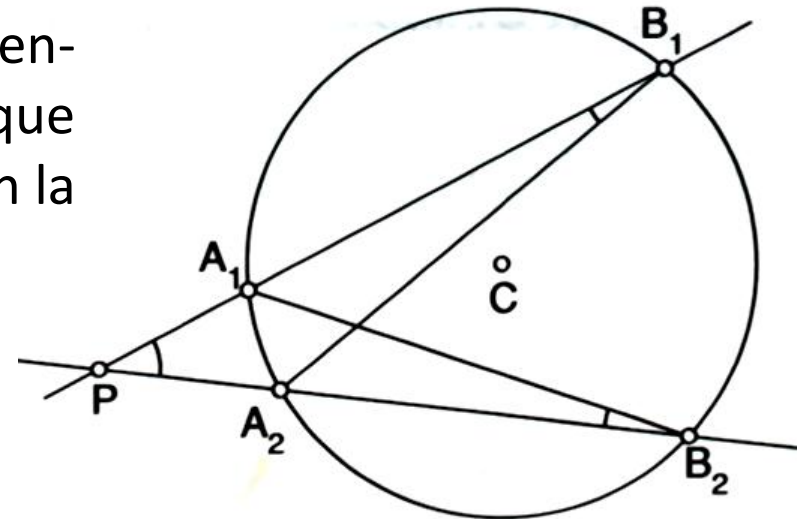
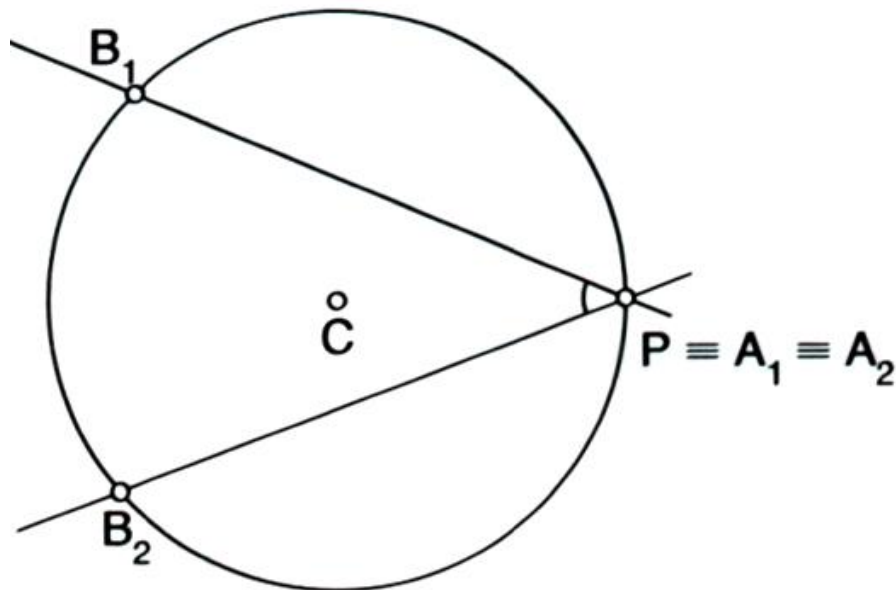
$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$$



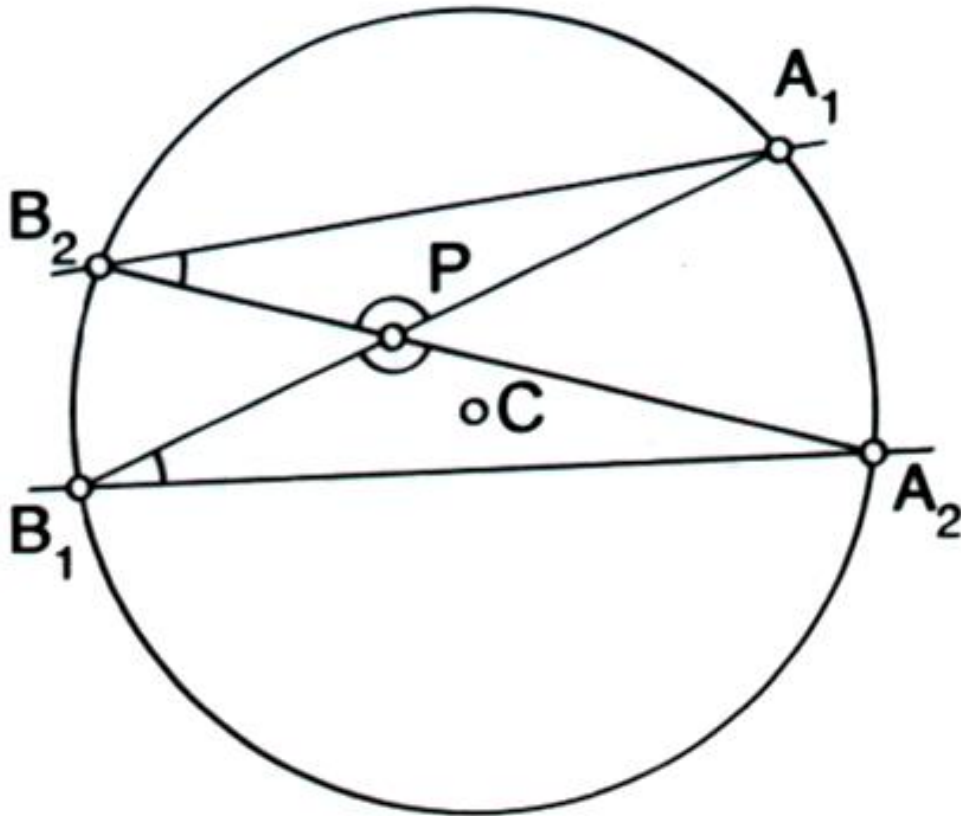
## SIGNO DE LA POTENCIA

Existe una relación entre la situación del punto  $P$  respecto a una circunferencia y el signo de su potencia.

- Si  $P$  es **EXTERIOR** a la circunferencia, la potencia es **positiva**, ya que los segmentos  $PA_1$  y  $PB_1$  están en la misma semirrecta con origen en  $P$ .



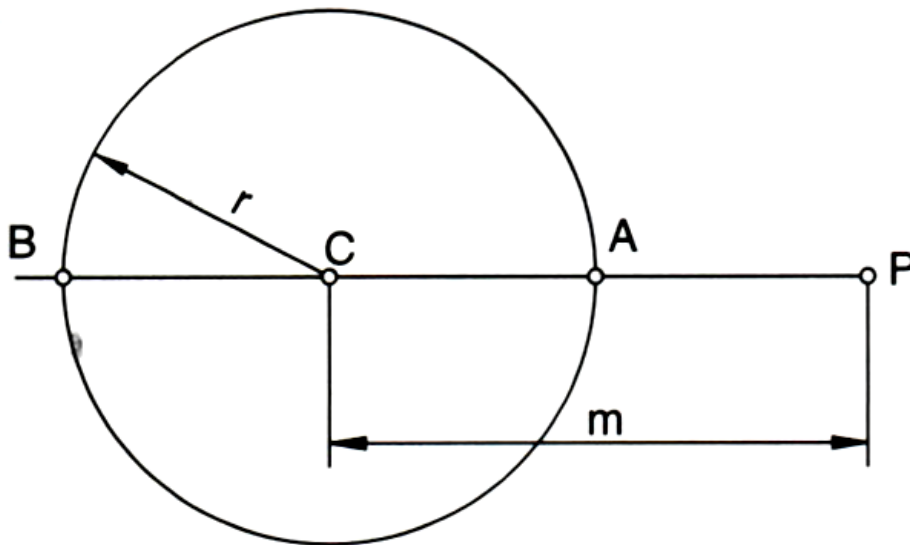
- Si  $P$  está **SOBRE** la circunferencia, la potencia es **nula**, ya que coincide con uno de los puntos de intersección.



- Si  $P$  está en el **INTERIOR** de la circunferencia, la potencia es **negativa**, ya que los segmentos  $\overline{PA_1}$  y  $\overline{PB_1}$  están sobre distinta semirrecta con origen en  $P$ .

## CÁLCULO DE LA POTENCIA

Veamos el caso de la recta secante que pasa por el centro de la circunferencia de radio  $r$ . Y llamaremos  $m$  a la distancia del punto  $P$  al centro  $C$  de la circunferencia.



- Si  $P$  es exterior a la circunferencia.

$$p(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (m - r) \cdot (m + r) = m^2 - r^2$$

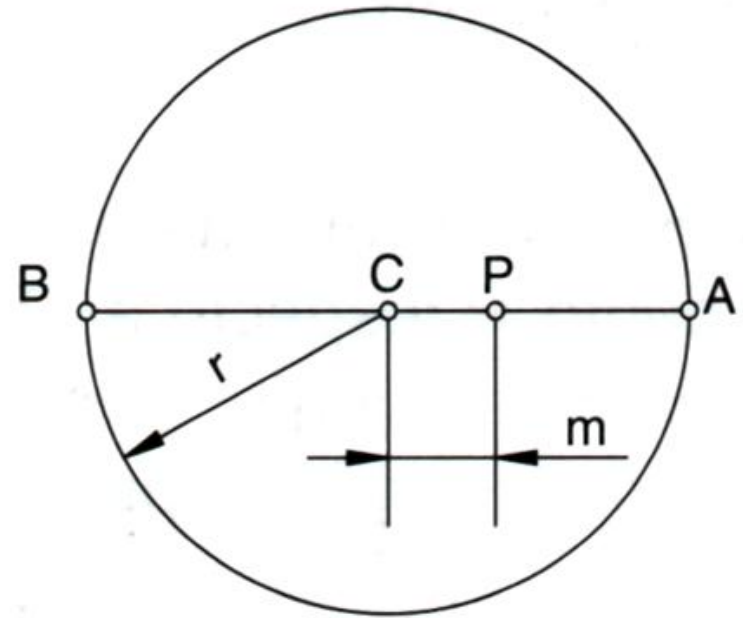
$$p(P) = m^2 - r^2$$

- Si  $P$  es interior a la circunferencia.

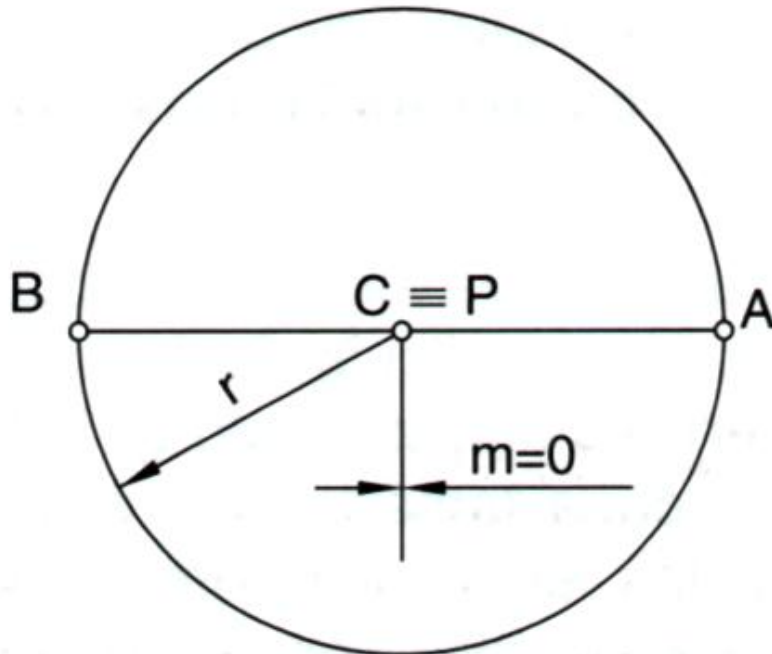
$$p(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = -(r - m) \cdot (r + m) =$$

$$= -(r^2 - m^2) = m^2 - r^2$$

$$p(P) = m^2 - r^2$$



- Si  $P$  coincide con el centro de la circunferencia.



$$p(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = m^2 - r^2$$

e posto que  $m = 0$ , resulta:

$$p(P) = -r^2$$

## TENIENDO EN CUENTA QUE :

- Si  $P$  es exterior a la circunferencia  $m > 0$  .
- Si  $P$  pertenece a la circunferencia  $m = 0$  .
- Si  $P$  se encuentra en el interior de la circunferencia  $m < 0$  .

Podemos determinar la posición de un punto respecto a una circunferencia a partir del valor de su potencia:

- Si  $m > r$  ,  $p(P) > 0$  : el punto es exterior a la circunferencia.
- Si  $m = r$  ,  $p(P) = 0$  : el punto pertenece a la circunferencia.
- Si  $m < r$  ,  $p(P) < 0$  : el punto es interior a la circunferencia.

## **CONCLUSIÓN:**

El valor de la potencia en el centro de una circunferencia es mínimo y aumenta a medida que nos alejamos de su centro.

Y es 0 para los puntos que forman la circunferencia.

Y tiende a más infinito cuanto más se aleja el punto hacia el infinito.

## EJE RADICAL

Dadas las circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ , y un punto  $P$  del plano. El eje radical es la recta cuya particularidad es ser el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto a dos o más circunferencias.

Esta recta será siempre perpendicular al segmento que une los centros de las circunferencias.

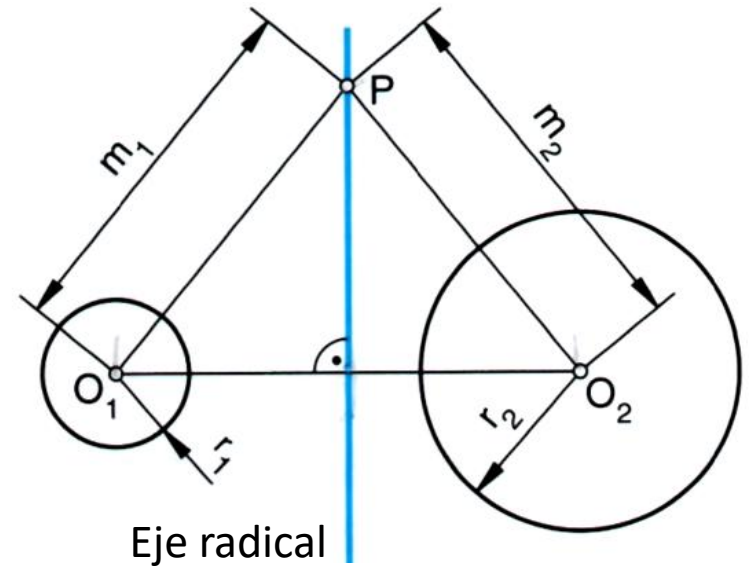
La potencia del punto  $P$  respecto a cada una de las circunferencias es:

$$p(P) = m_1^2 - r_1^2 \quad \text{y} \quad p(P) = m_2^2 - r_2^2$$

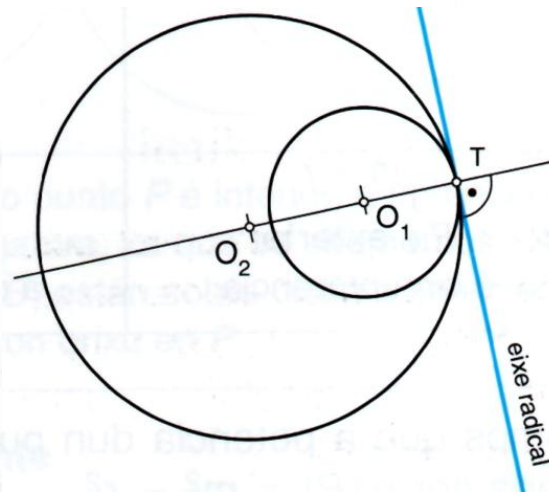
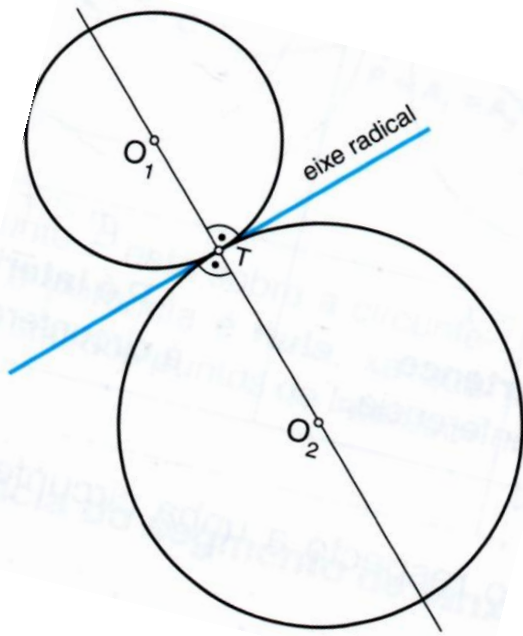
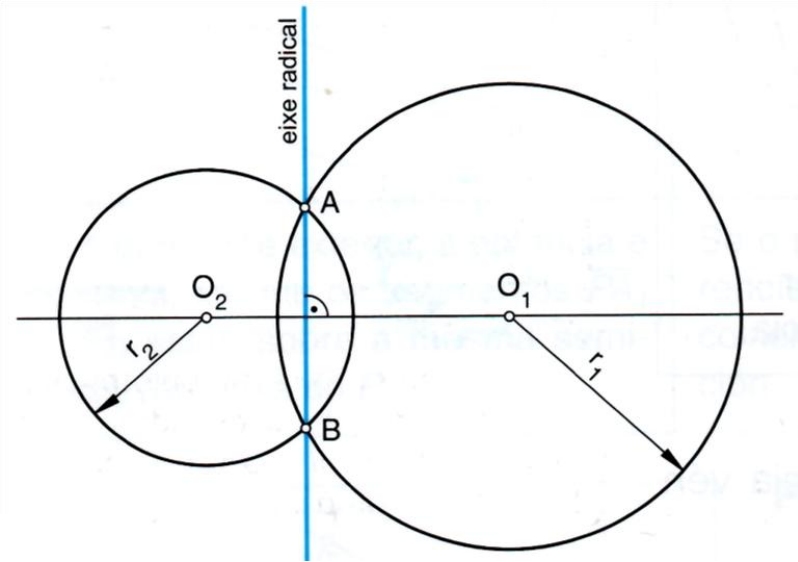
Como, según lo dicho, ambas potencias son iguales, tenemos que:

$$m_1^2 - r_1^2 = m_2^2 - r_2^2 \Rightarrow m_1^2 - m_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = K$$

Puesto que los dos centros de las circunferencias son fijos, esta recta, en la que la diferencia entre las dos distancias de  $P$  a los centros es constante, será siempre perpendicular a  $\overline{O_1O_2}$ .



- Si las circunferencias son **secantes**: los puntos de intersección tienen potencia cero respecto a las dos circunferencias, ya que pertenecen a ambas. Entonces, el eje radical ( $e_r$ ) es la recta que pasa por ambos puntos de intersección.



- Si las circunferencias son **tangentes** exteriores o interiores, el punto común de tangencia tendrá potencia cero respecto a ellas.

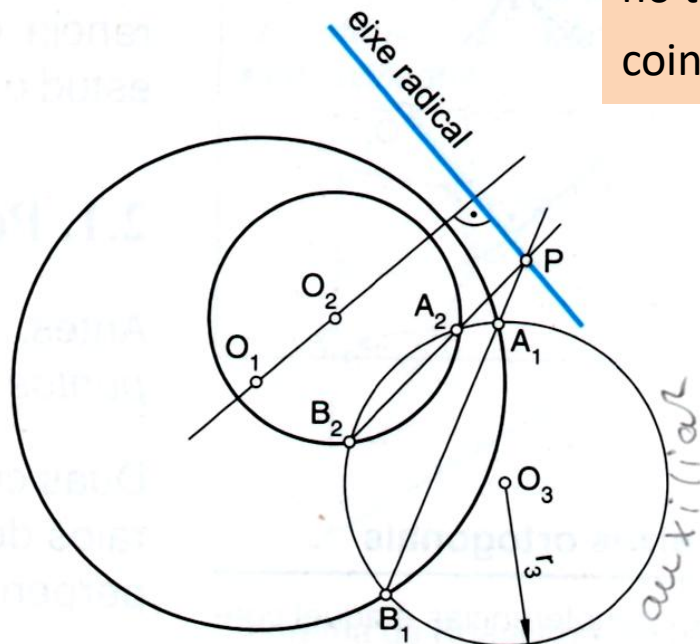
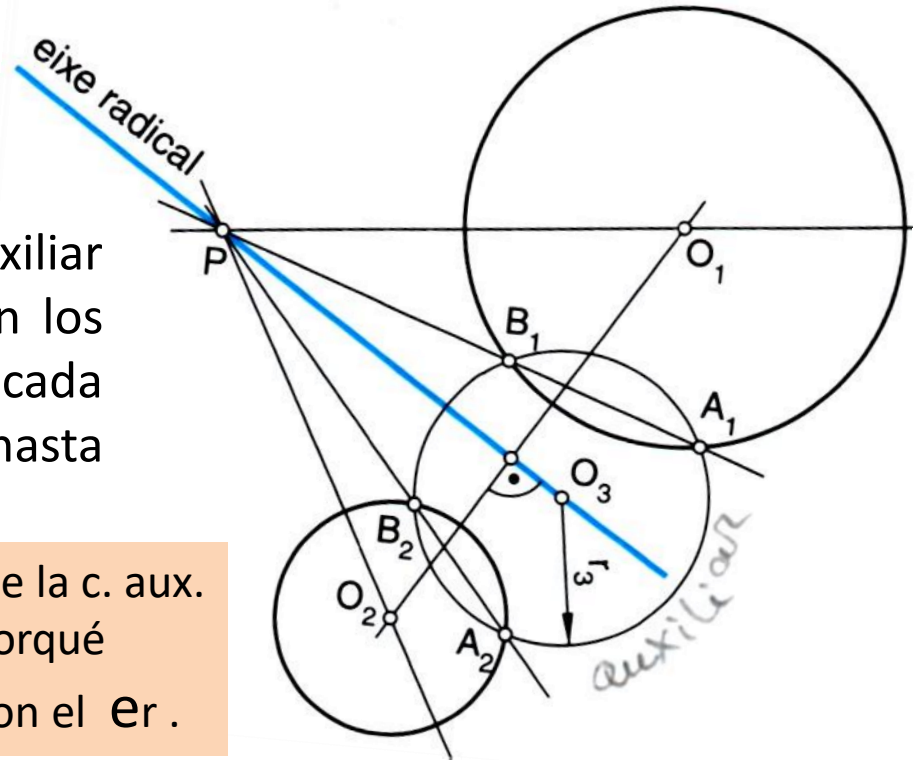
El eje radical será entonces perpendicular por T a la recta que une los centros. El  $e_r$  es la tangente común a las dos circunferencias.

- Circunferencias exteriores e interiores **no tangentes**.

El procedimiento es el mismo:

- Se traza una circunferencia auxiliar que corte a las dadas y se trazan los ejes radicales de la auxiliar con cada una de aquellas, y se alargan hasta cortarse en el punto P.

El centro de la c. aux. no tiene porqué coincidir con el  $e_r$ .

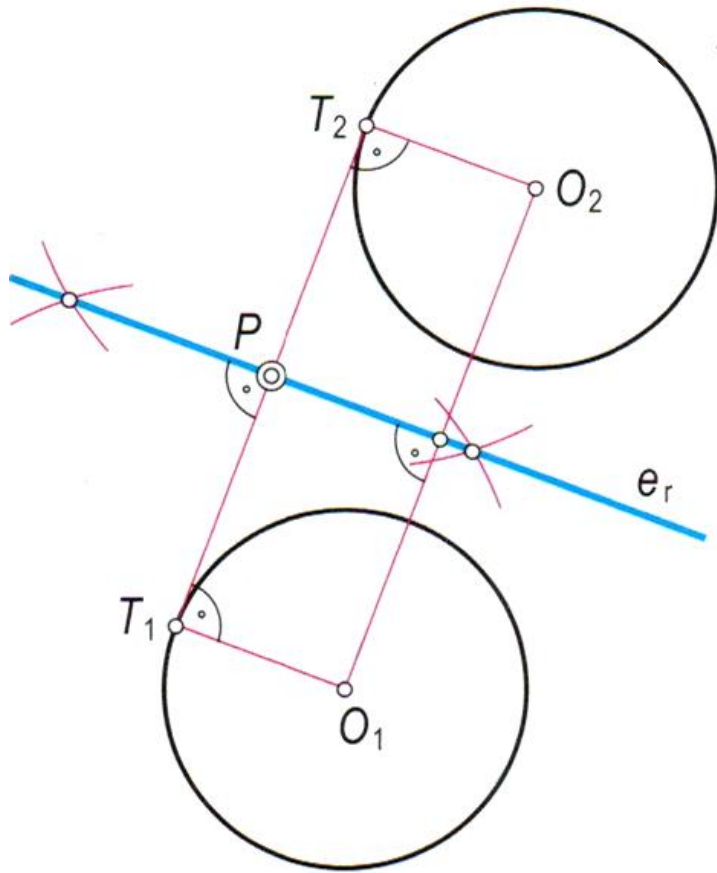


- El punto P tendrá la misma potencia respecto a las dos circunferencias.
- Se traza una recta que una los centros de las c. dadas.
  - El  $e_r$  será la perpendicular a esa recta que pase por el punto P.

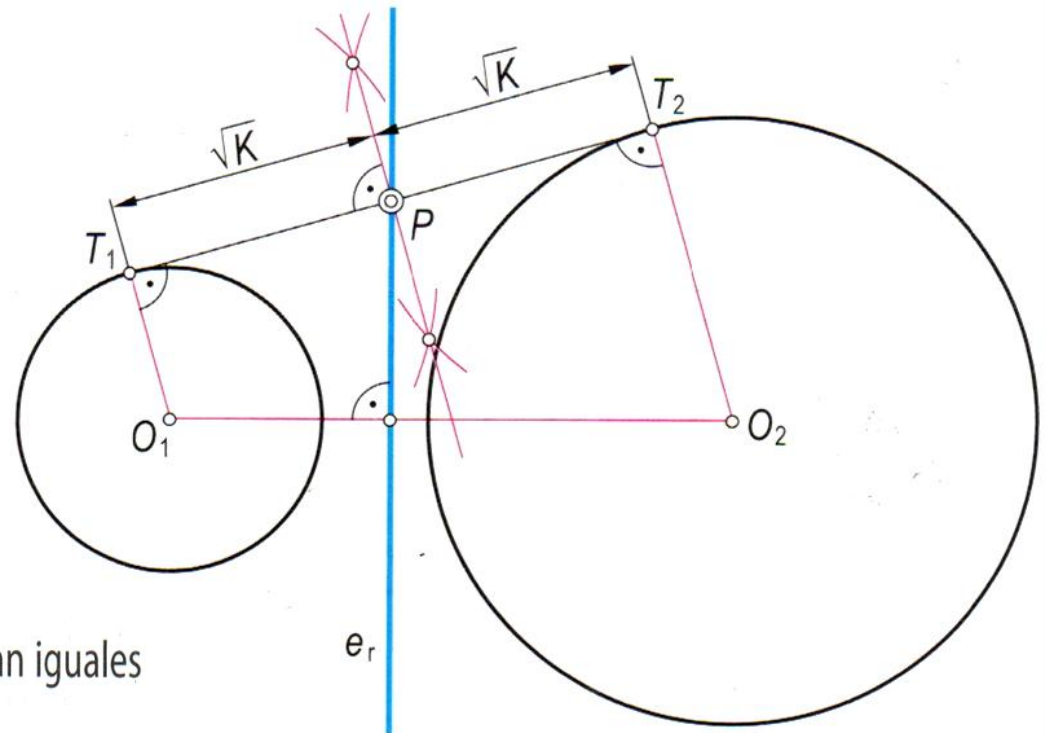
- **Circunferencias exteriores no tangentes. (2º procedimiento).**

El punto medio,  $P$ , del segmento  $T_1T_2$ , perteneciente a una de las tangentes comunes a las circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ , está a la misma distancia,  $\sqrt{K}$ , de los puntos  $T_1$  y

$T_2$ . Se puede afirmar, por tanto, que el punto  $P$  tiene la misma potencia,  $K$ , respecto de las dos circunferencias y, en consecuencia, el eje radical,  $e_r$ , de ambas es la perpendicular por  $P$  a la recta  $O_1O_2$ .



En la **fig. 13** puede apreciarse que el eje radical  $e_r$  no coincide con la mediatriz del segmento  $\overline{T_1T_2}$ .



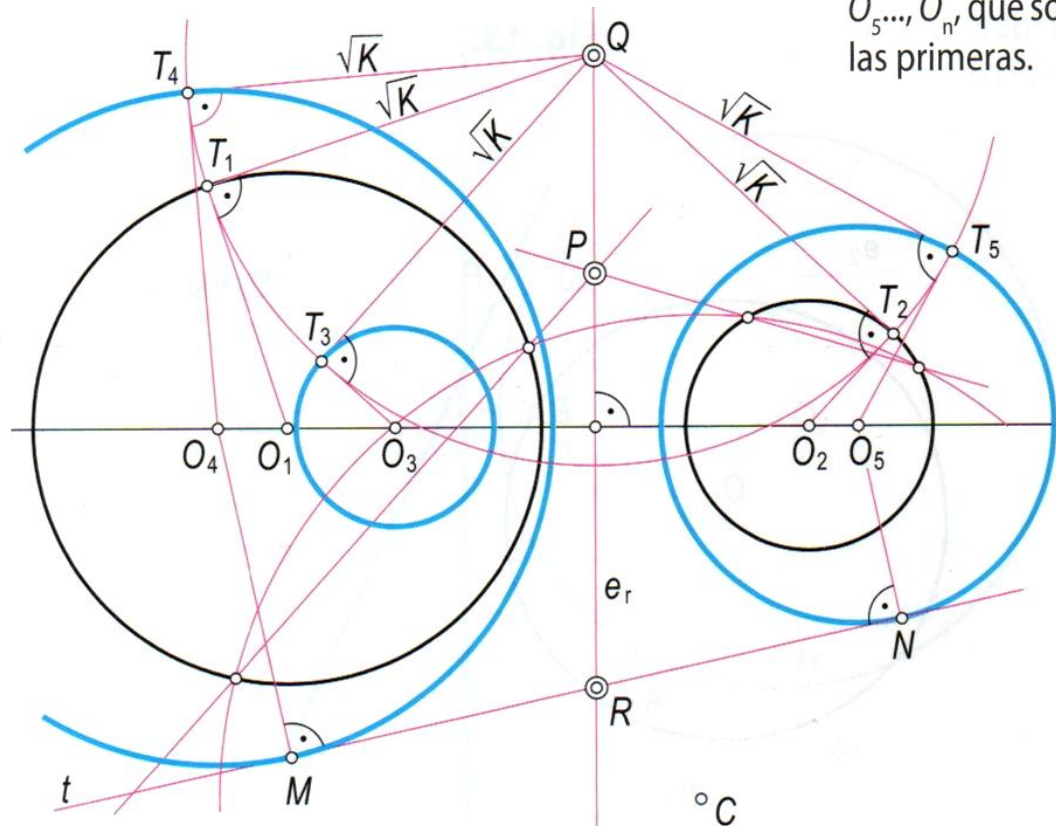
• Sólo en el caso de que ambas circunferencias sean iguales coincidirán las dos rectas (**fig. 14**).

- **Circunferencias coaxiales.**

En el apartado anterior hemos hallado el eje radical de dos circunferencias, pero pueden ser más de dos las que tengan un eje radical común a todas ellas. Al conjunto de circunferencias que tienen el mismo eje radical se les denominan circunferencias coaxiales y se dice que forman un haz. Los centros de todas las circunferencias del haz pertenecen a una recta perpendicular al eje radical común a todas ellas.

En la **fig. 20** se determina un haz de circunferencias coaxiales con otras dos exteriores dadas de centros  $O_1$  y  $O_2$ .

Con ayuda de la circunferencia auxiliar de centro  $C$  se calcula el eje radical,  $e_r$ , de ambas. Con centro en un punto cualquiera,  $Q$ , de  $e_r$  y radio  $\overline{QT}_1 = \overline{QT}_2 = \sqrt{K}$  se traza la circunferencia que contendrá a todos los puntos,  $T_3, T_4, T_5, \dots, T_n$ , de tangencia de las circunferencias del haz con las rectas tangentes a ellas que pasan por el punto  $Q$ . Las perpendiculares a éstas por los citados puntos cortan a la recta  $O_1O_2$  en los puntos  $O_3, O_4, O_5, \dots, O_n$ , que son centros de las circunferencias coaxiales con las primeras.



Una recta  $t$ , tangente común a dos circunferencias cualesquiera de este haz, corta al eje radical en un punto  $R$  que equidista de los puntos  $M$  y  $N$ , ya que se ha de cumplir:

$$RM = RN = \sqrt{K}$$

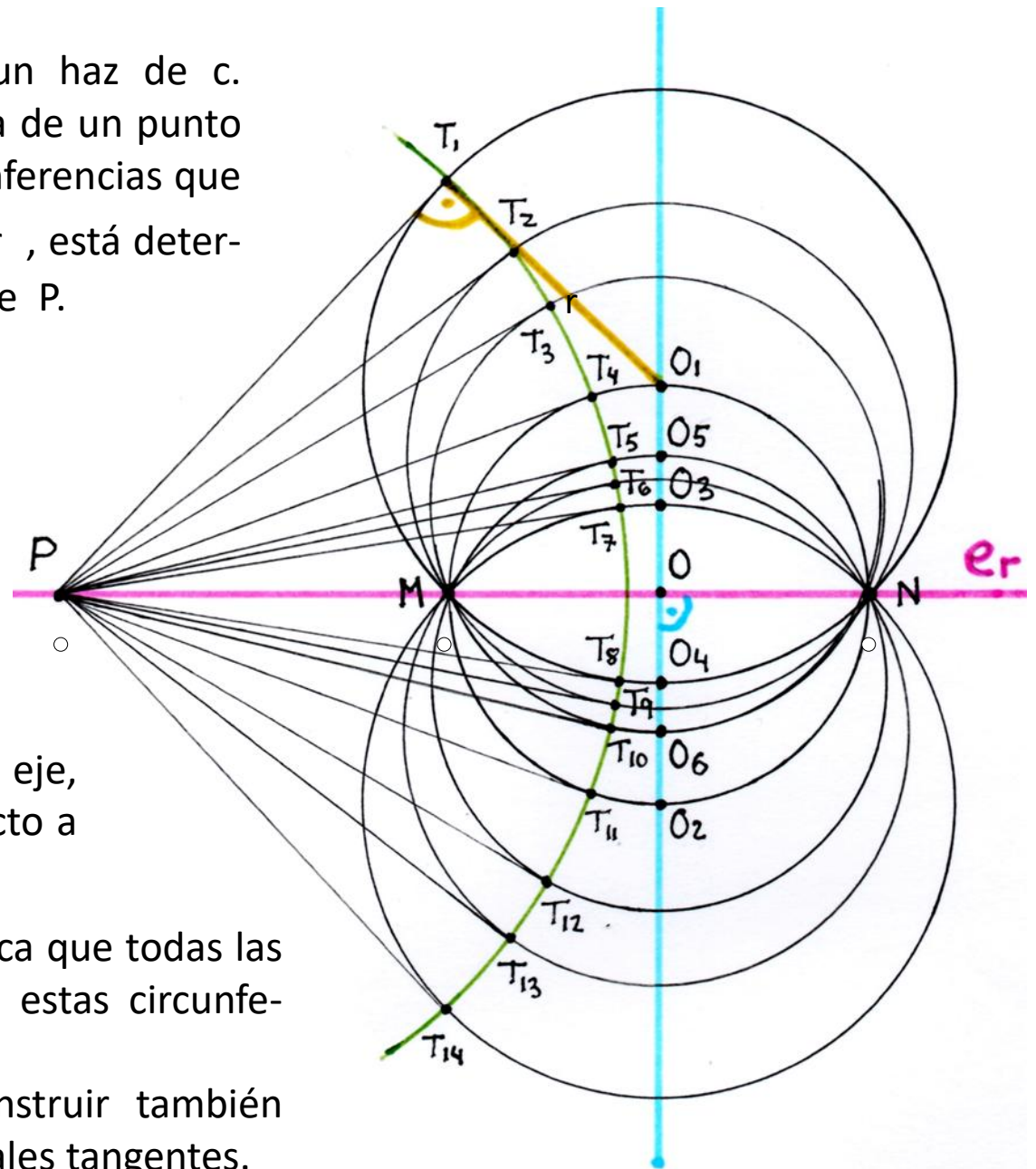
En este dibujo se presenta un haz de **c. coaxiales secantes**. La potencia de un punto  $P$  respecto de un haz de circunferencias que tienen en común el mismo  $e_r$ , está determinada por las tangentes desde  $P$ .

El  $e_r$  es la secante que las corta en los puntos  $N$  y  $M$ . En la mediatriz de la secante  $MN$  se encuentran alineados todos los centros de dichas circunferencias. Es perpendicular al eje.

Desde cualquier punto  $P$  del eje, la potencia es la misma respecto a todas las circunferencias.

$\overline{PT}$  es constante, lo que significa que todas las tangentes trazadas desde  $P$  a estas circunferencias van a ser idénticas.

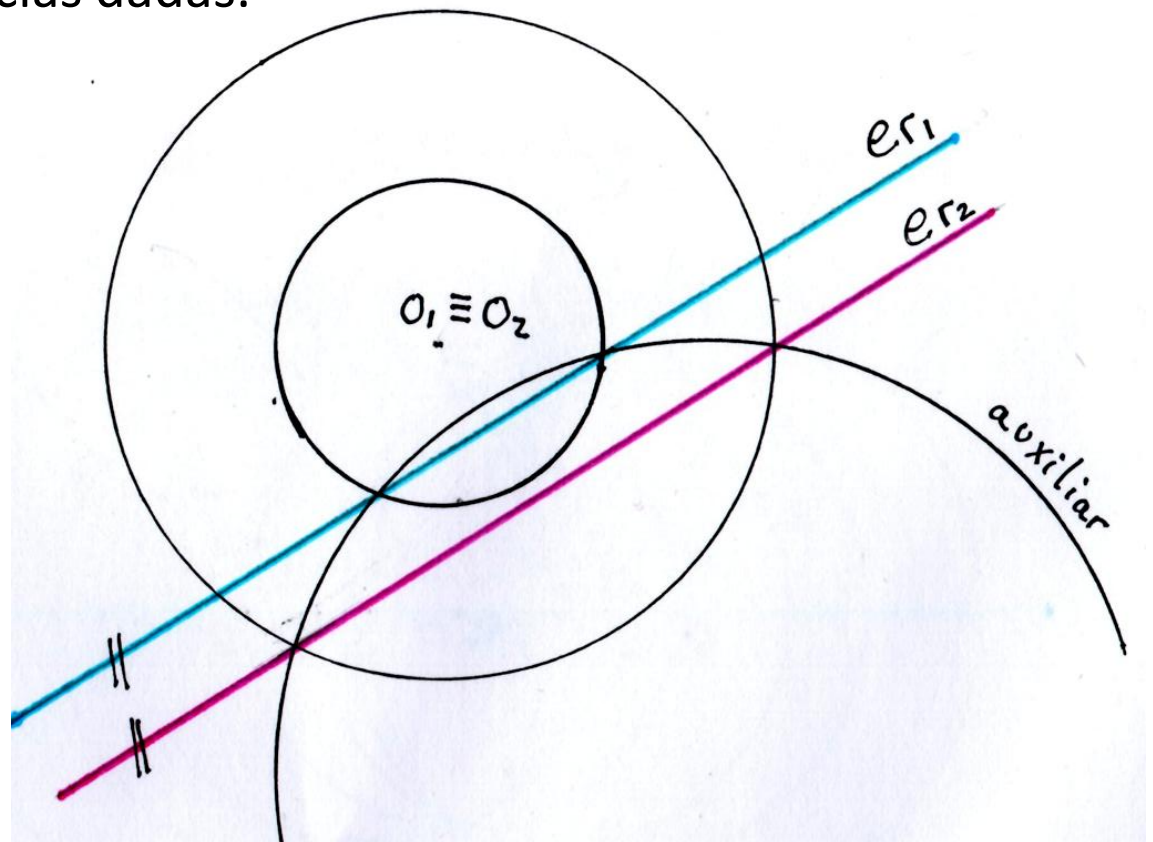
Análogamente, se puede construir también haces de circunferencias coaxiales tangentes.



- Circunferencias **concéntricas**:

En este caso no existirá eje radical.

Al trazar la circunferencia auxiliar se pueden trazar dos ejes radicales con ésta y las dadas que no se cortarán nunca, sino que serán paralelos. Esto implica que no es posible trazar un eje radical común a ambas circunferencias dadas.

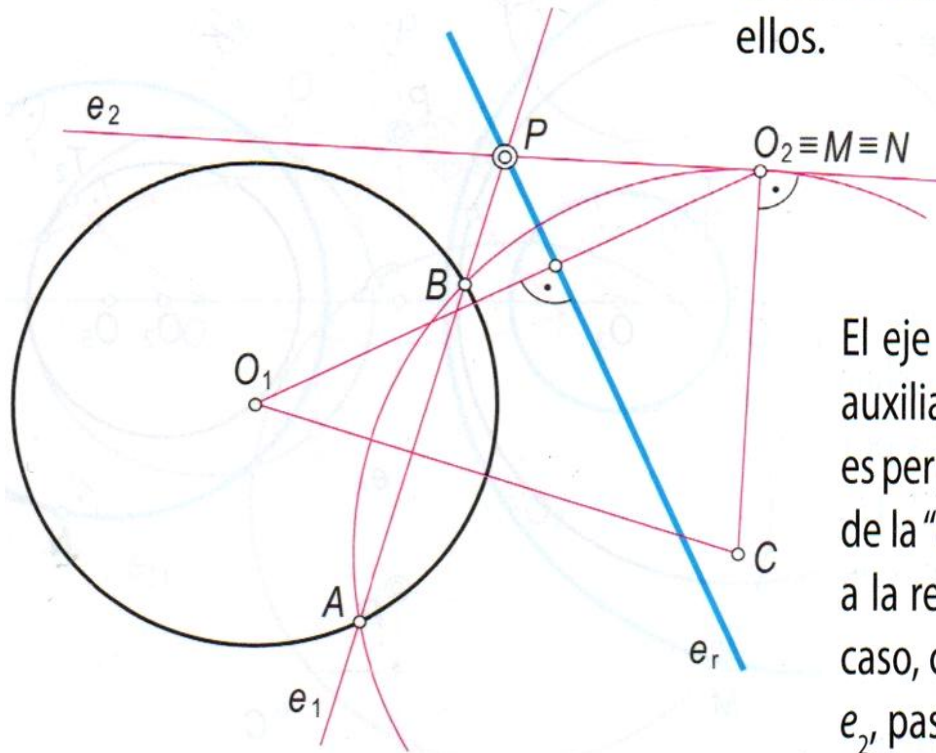


- Otros casos:

## Una circunferencia y un punto $O_2$

Es un caso límite: el radio de una de las circunferencias, la de centro  $O_2$  en este caso, es cero.

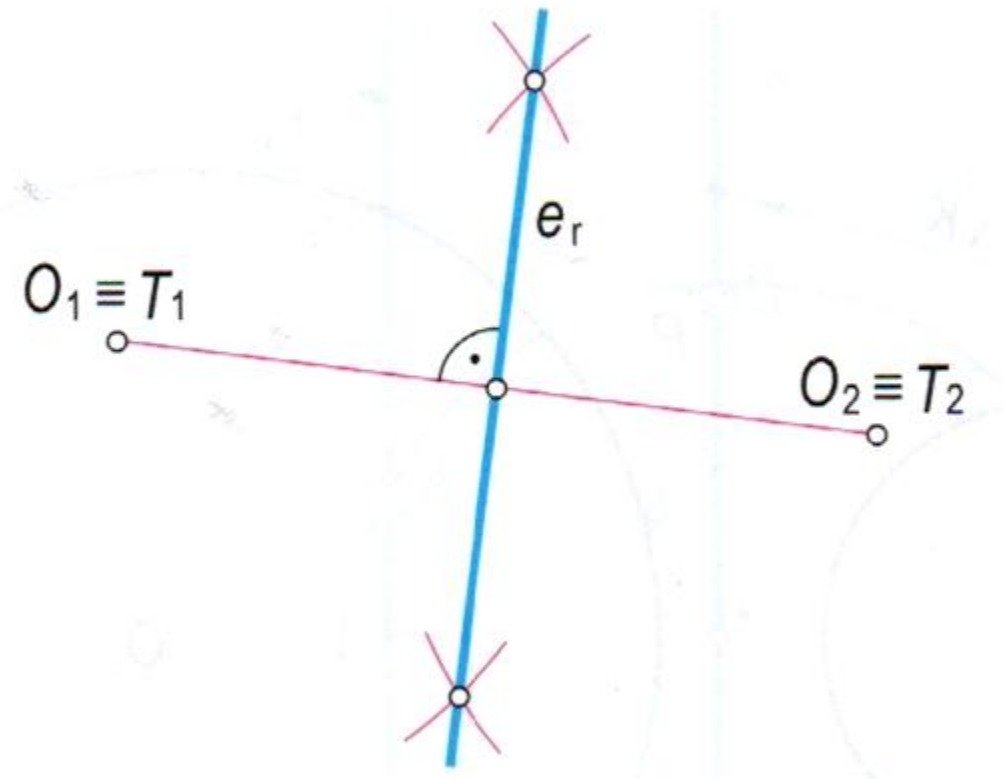
Para el cálculo del eje radical se puede seguir cualquiera de los procedimientos utilizados cuando se trataba de dos circunferencias exteriores. Se ha optado por el primero de ellos.



El eje radical,  $e_1$ , de la circunferencia de centro  $O_1$  y de la auxiliar de centro  $C$ , que corta a aquella en los puntos  $A$  y  $B$ , es perpendicular a la recta  $O_1C$ . Por lo mismo, el eje radical,  $e_2$ , de la "**circunferencia**"  $O_2$  y de la auxiliar será perpendicular a la recta  $O_2C$  y pasará por los puntos  $M$  y  $N$ , que, en este caso, coinciden con  $O_2$ . Por el punto  $P$ , donde se cortan  $e_1$  y  $e_2$ , pasa el eje radical,  $e_r$ , de la circunferencia de centro  $O_1$  y del punto  $O_2$  y será perpendicular a la recta  $O_1O_2$ .

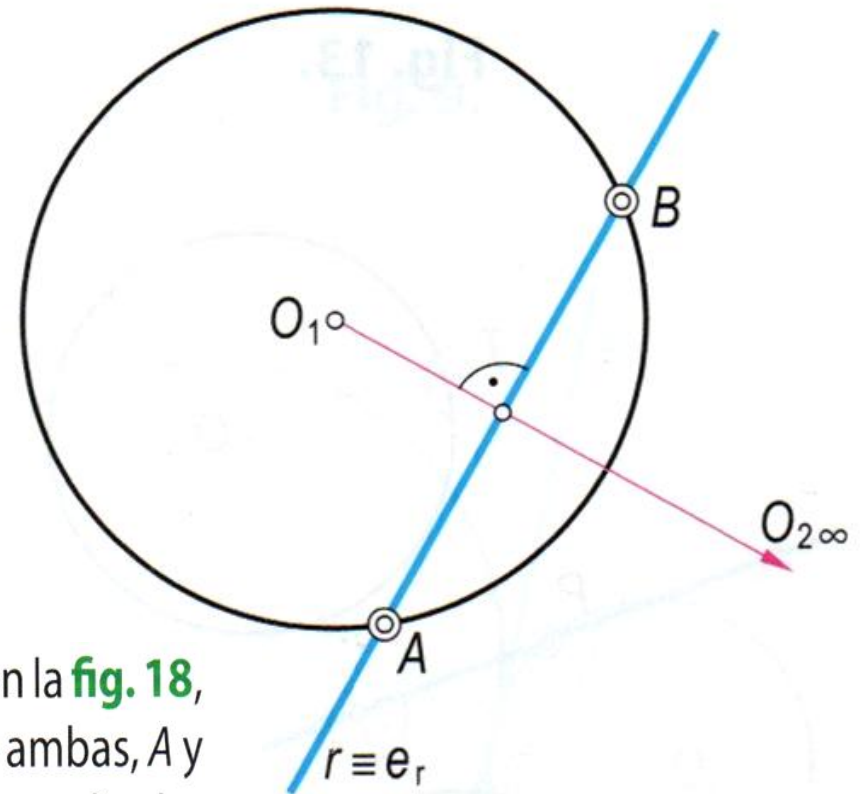
## Dos puntos

Cuando el radio de ambas circunferencias es cero, el segmento  $O_1O_2$  es también el correspondiente al comprendido entre los puntos de tangencia. Por tanto, el eje radical es la mediatriz del segmento que determinan ambos puntos.



## Una circunferencia y una recta $r$ (figs. 18 y 19)

En este caso límite, el radio de la circunferencia de centro  $O_2$  tiene valor infinito, por lo que ésta se convierte en la recta  $r$ .

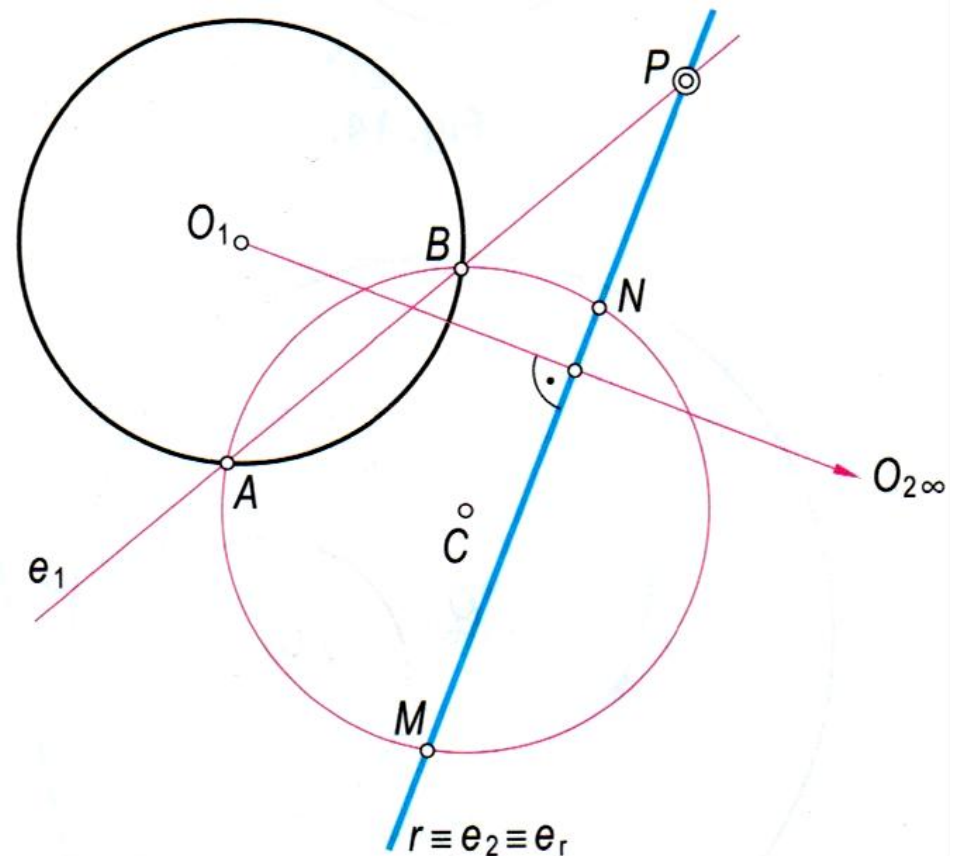


Si la circunferencia y la recta son secantes, como en la **fig. 18**, el eje radical,  $e_r$ , pasa por los puntos comunes de ambas,  $A$  y  $B$ , luego es la propia recta  $r$ , que, además, es perpendicular a la recta  $O_1O_2$ . Si la recta y la circunferencia, en lugar de ser secantes, son tangentes, los puntos  $A$  y  $B$  coinciden, por lo que el eje radical también es la recta.

Cuando la circunferencia y la recta son exteriores, caso de la **fig. 19**, se procede como cuando las circunferencias son exteriores. El eje radical de la circunferencia de centro  $O_1$  y de la auxiliar de centro  $C$  es la recta  $e_1$  y el de la recta  $r$  y de la circunferencia auxiliar es  $e_2$ , coincidente con  $r$ . El punto  $P$  donde se cortan  $e_1$  y  $e_2$  pertenece al eje radical,  $e_r$ , de la circunferencia de centro  $O_1$  y de la recta  $r$ , el cual, al tener que ser perpendicular a la recta  $O_1O_2$ , coincide con la recta  $r$ .

Resumiendo:

El eje radical de una circunferencia y una recta es siempre la propia recta.



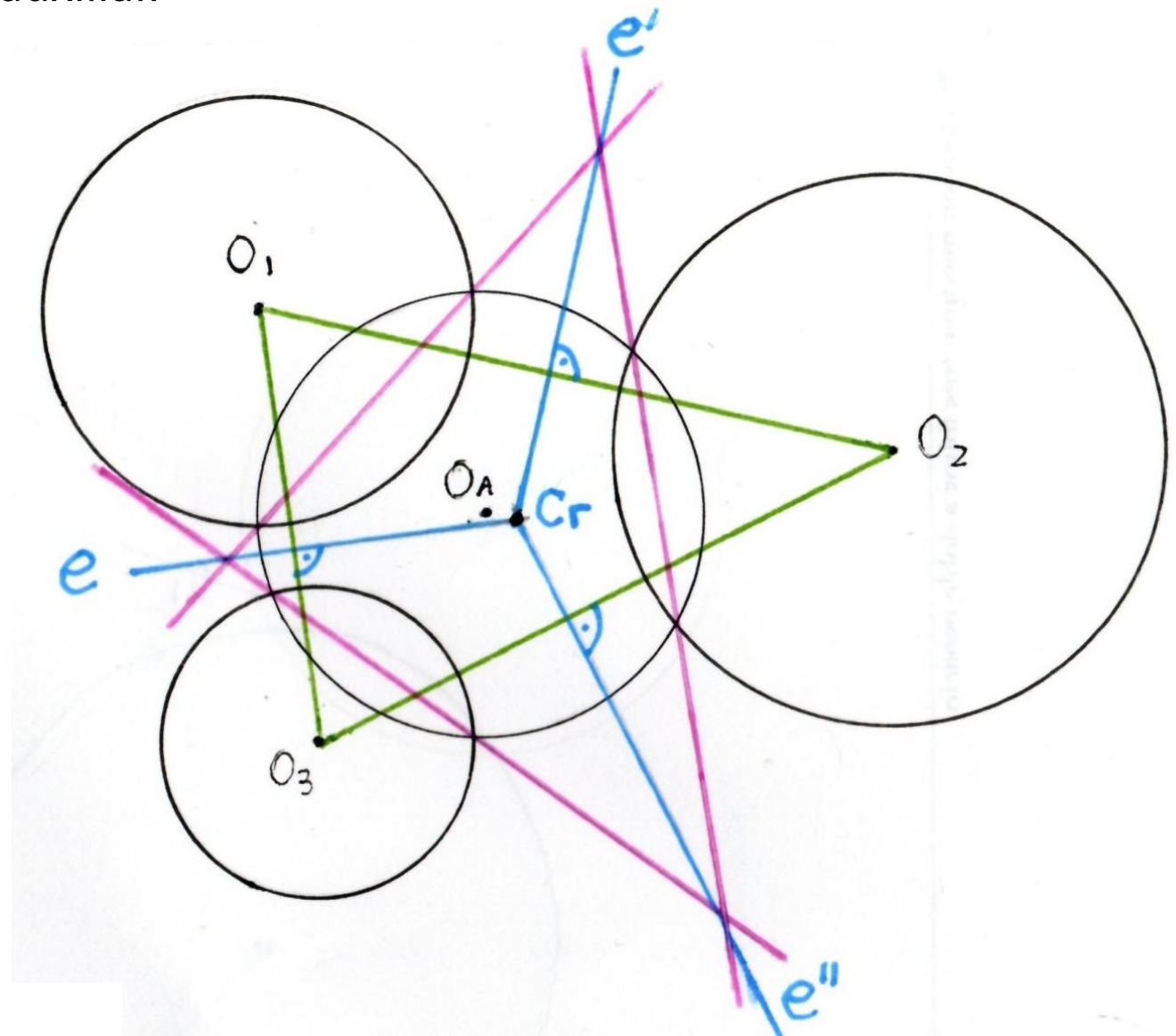
## CENTRO RADICAL

Es el punto de intersección de los ejes radicales de varias circunferencias, cuyos centros estarán alineados de dos en dos.

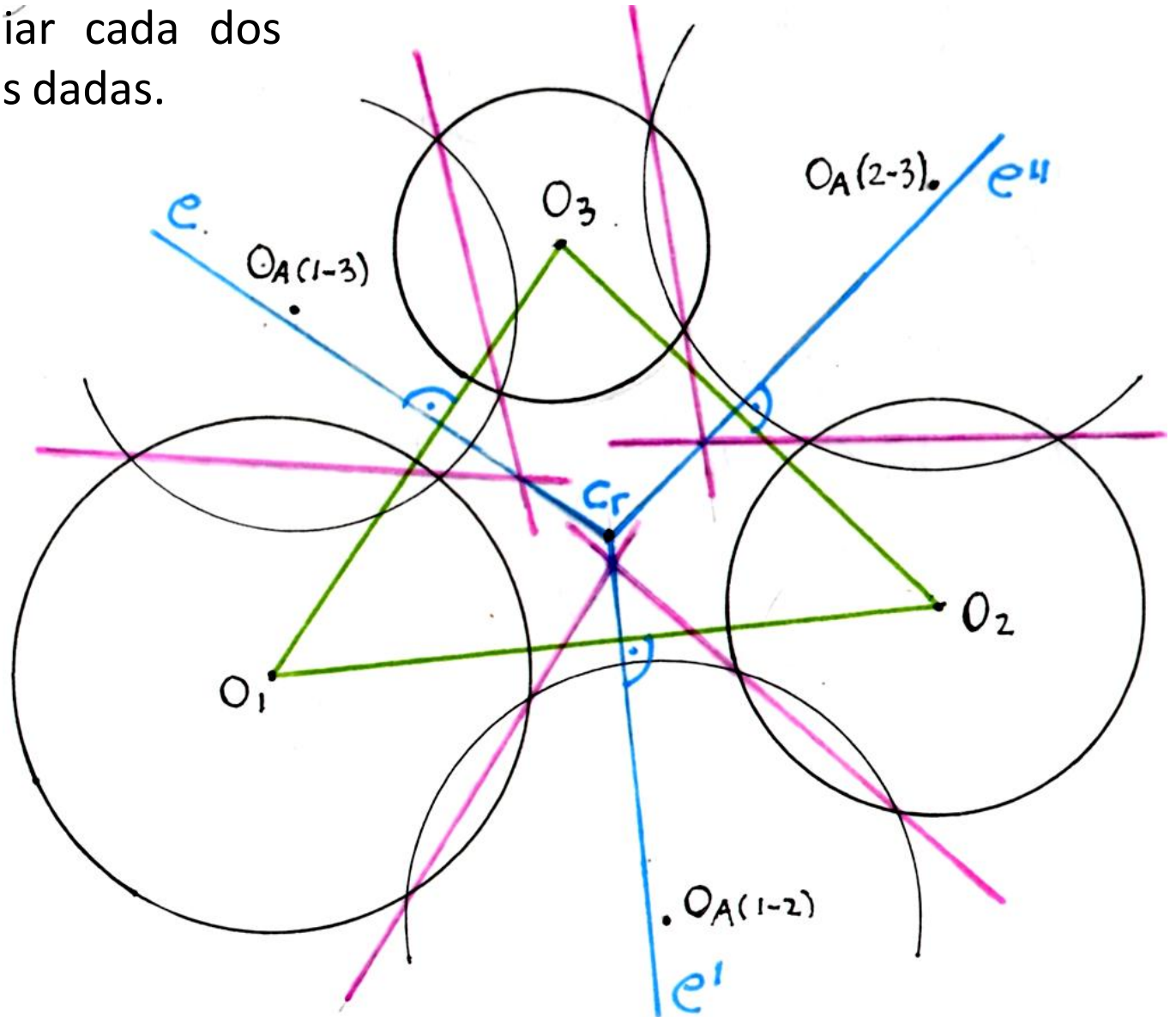
Es el punto que tiene igual potencia respecto a todas las circunferencias implicadas. Esto significa que las tangentes desde este punto a las circunferencias tienen la misma medida.

- Se unen los centros.
- Circunferencias auxiliares que corten a las dadas.
- Por los puntos de corte entre las auxiliares y las dadas se trazan ejes radicales que se corten.
- Por esos puntos de corte pasarán los ejes radicales que confluirán en el centro radical  $C_r$  buscado.

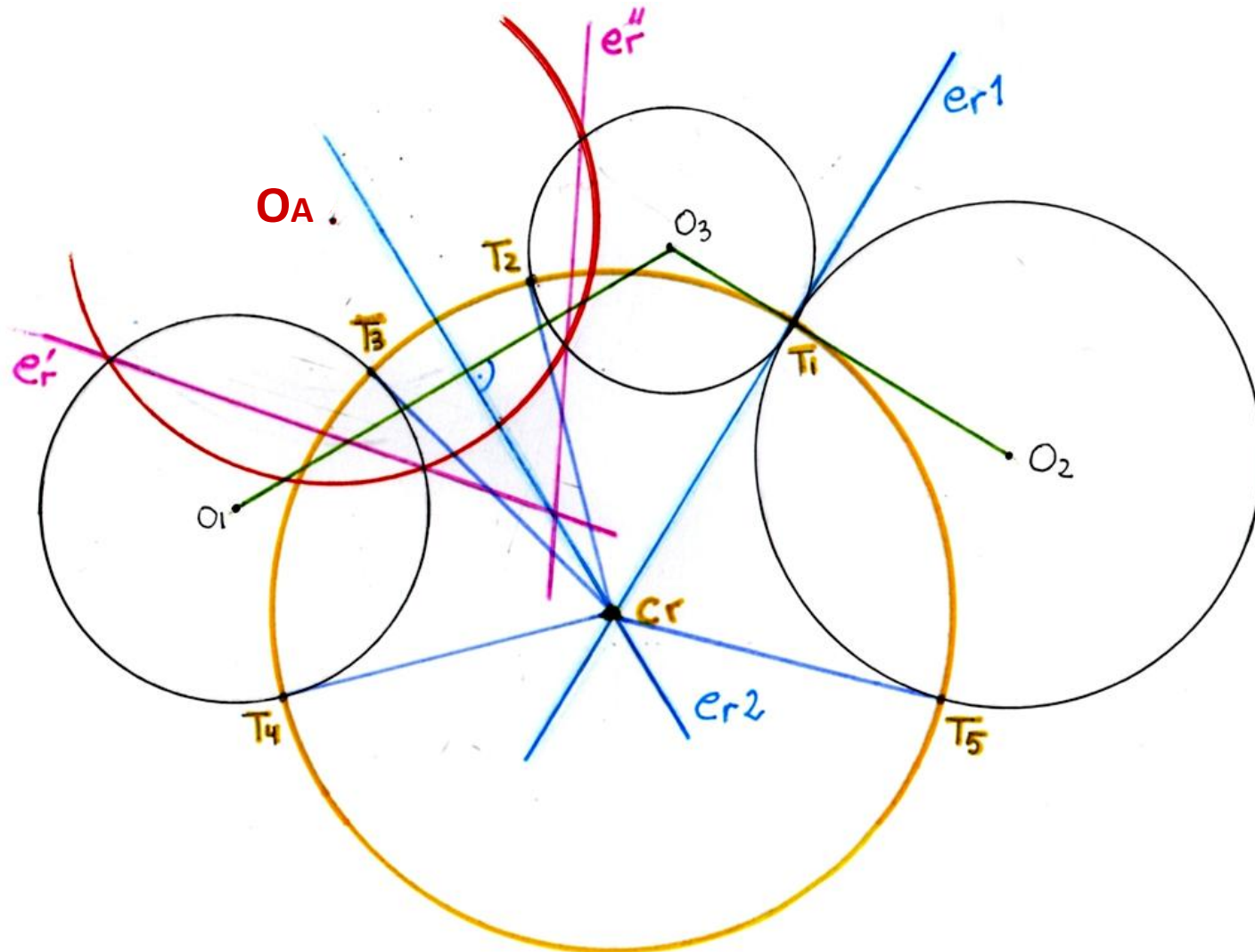
- Por medio de una sola circunferencia auxiliar.



- Por medio de una circunferencia auxiliar cada dos circunferencias dadas.



- Dadas las circunferencias  $O_1$ ,  $O_2$  y  $O_3$ , hallar su centro radical y trazar las **rectas tangentes** desde ese punto a cada circunferencia.



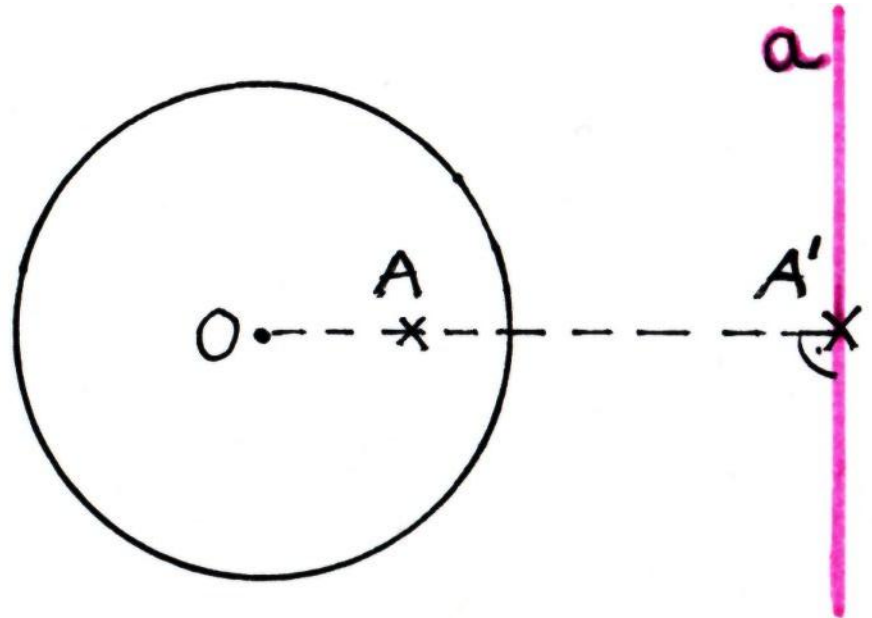
# POLARIDAD (o correspondencia polar)

CONCEPTOS:

## POLAR DE UN PUNTO y POLO DE UNA RECTA

La polaridad es una asignación en la que, teniendo una circunferencia, va a existir una correspondencia entre puntos y rectas.

Teniendo el punto  $A$  dentro de la circunferencia, le corresponde un punto inverso  $A'$  que se encontrará alineado con el centro de la circunferencia y el punto  $A$ . De tal manera que se cumple que:  $OA \cdot OA' = r^2$ . Siendo esta fórmula una relación simétrica, en la que  $A'$  es polar de  $A$ , y viceversa.

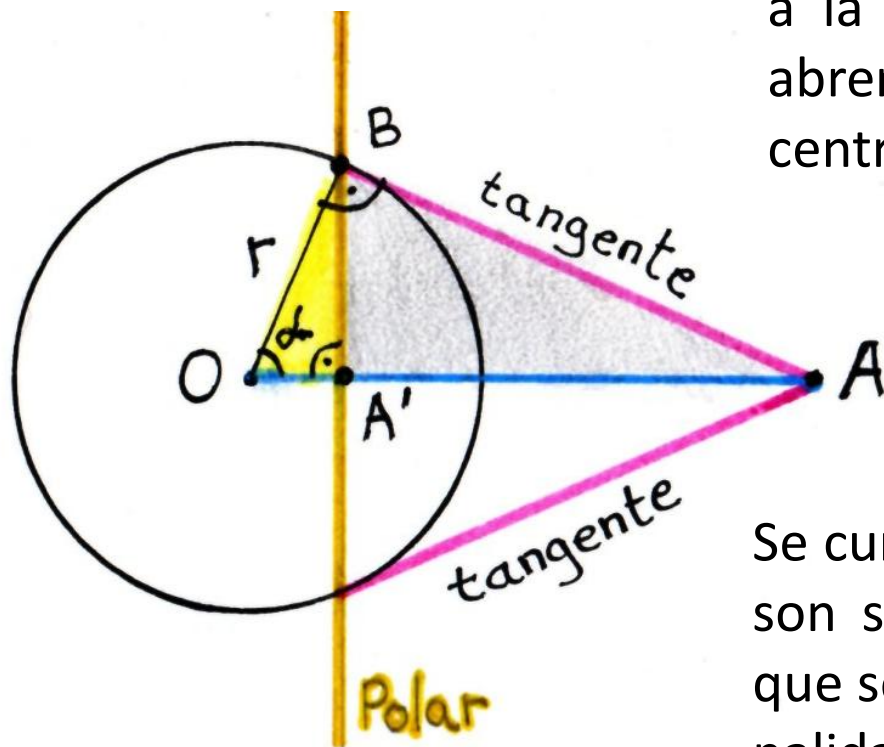


En esta relación va a suceder que cuando  $A$  está dentro de la circunferencia, su inverso estará fuera, y si está fuera su inverso estará dentro. También sucede que cuanto más se acerque  $A$  al centro  $O$  de la circunferencia, más se alejará  $A'$  hacia el infinito. Y si  $A$  se acerca a la circunferencia, más se acercará también  $A'$ .

Cuando el punto está sobre la circunferencia, su inverso será él mismo. La recta **POLAR** es la recta perpendicular a la semirrecta que une el centro de la circunferencia con el punto inverso. Ese punto será el polo de la recta polar. Así  $A$  es el polo de la recta polar que pasa por  $A'$ . Si el punto  $A$  está en la circunferencia su recta polar será tangente al radio de la circunferencia. Con la recta polar sucede lo mismo con su alejamiento que con los puntos  $A$  y  $A'$ .

Si el punto  $A$  está fuera de la circunferencia, su inverso estará dentro, por tanto, su recta polar que pasa por  $A'$  será una secante que cortará a la circunferencia en dos puntos de tangencia de dos rectas tangentes desde  $A$ .

Sucede que si el punto  $A$  se acerca más a la circunferencia, dichas tangentes se abren más y la recta polar se aleja del centro.



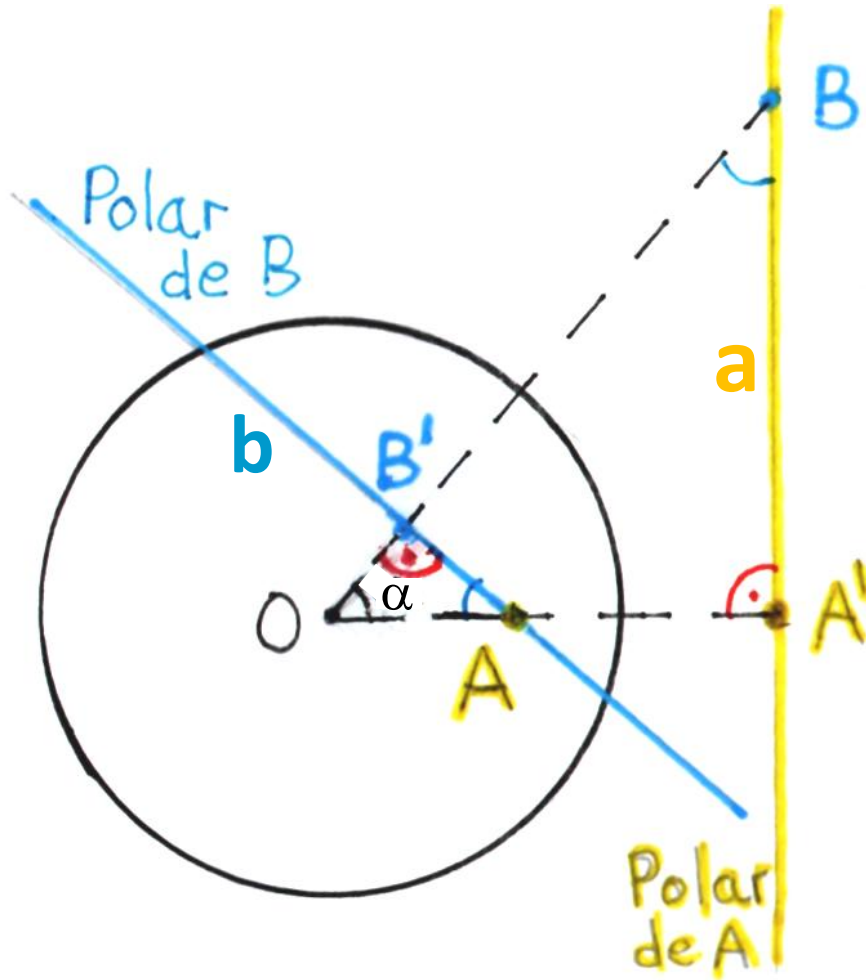
Mientras que, cuanto más se aleje  $A$ , más se cierran las tangentes y más se acerca la polar al centro  $O$ .

Se cumple que los triángulos  $\widehat{OBA'}$  y  $\widehat{OBA}$  son semejantes (ángulos iguales) por lo que se establece la relación de proporcionalidad:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA'} \cdot \overline{OA} = r^2$$

- **PROPIEDAD FUNDAMENTAL**

Para hallar las polares debemos hallar siempre los puntos inversos.



Si tenemos un punto cualquiera A y su recta polar, elegimos otro punto B sobre esa polar y trazamos por A la polar de B.

**Se cumple que:** si B está en la recta polar de A, la recta polar de B pasa por A.

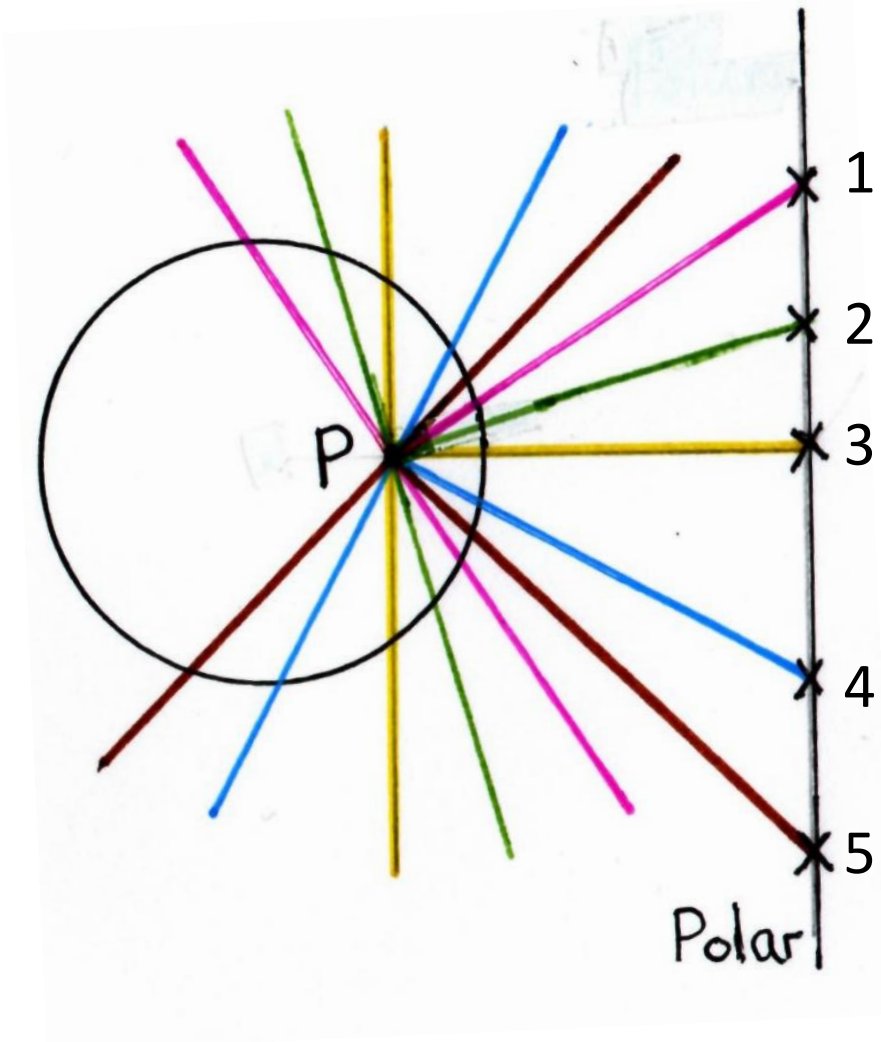
Los triángulos formados son semejantes por lo que se puede expresar la proporcionalidad:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB'} \cdot \overline{OB}$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

# APLICACIÓN

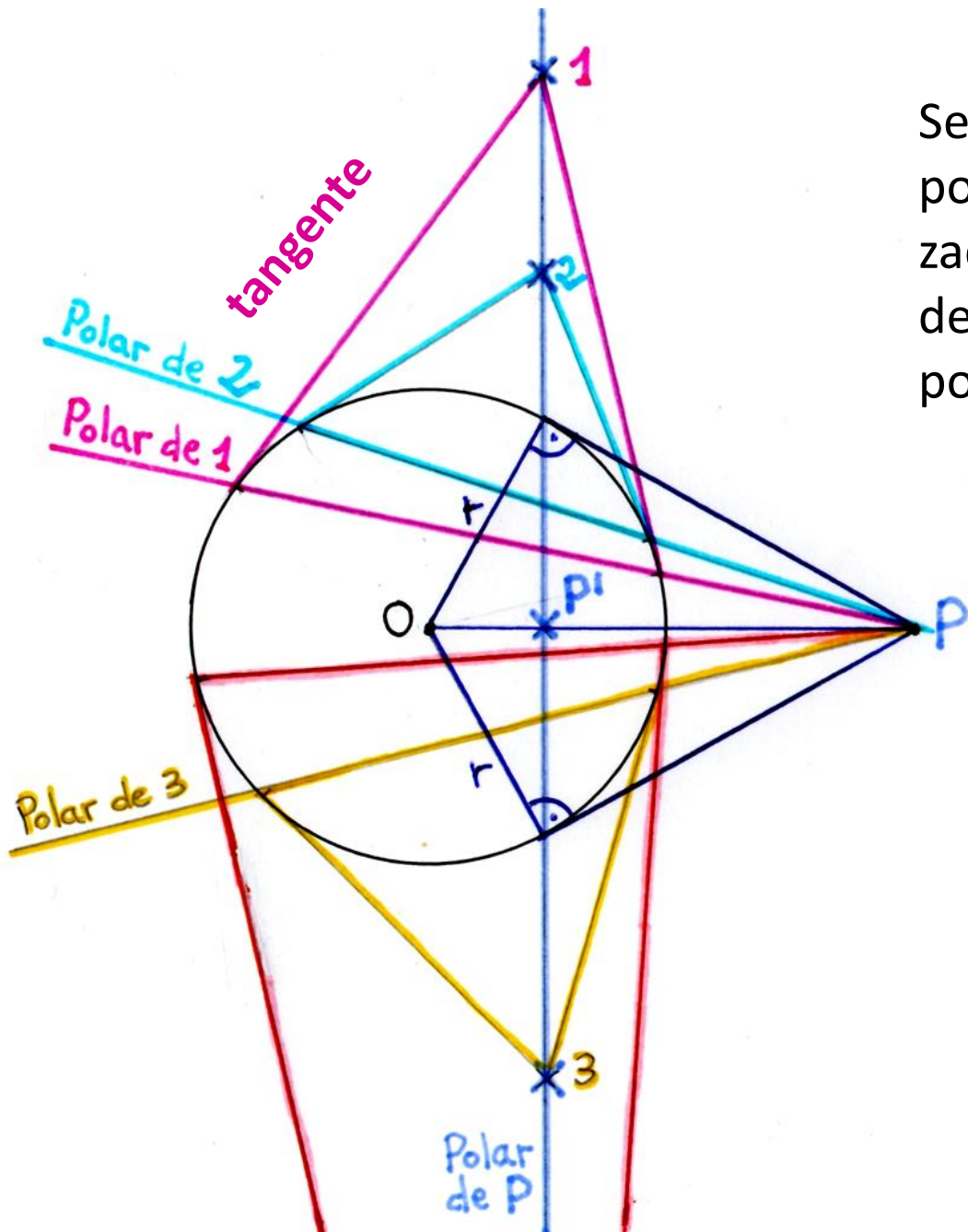
- Teniendo un punto  $P$  dentro de la circunferencia y su recta polar.



La recta polar de cualquier punto de la polar de  $P$ , va a pasar por  $P$ , y es tangente a la distancia del punto a  $P$ .





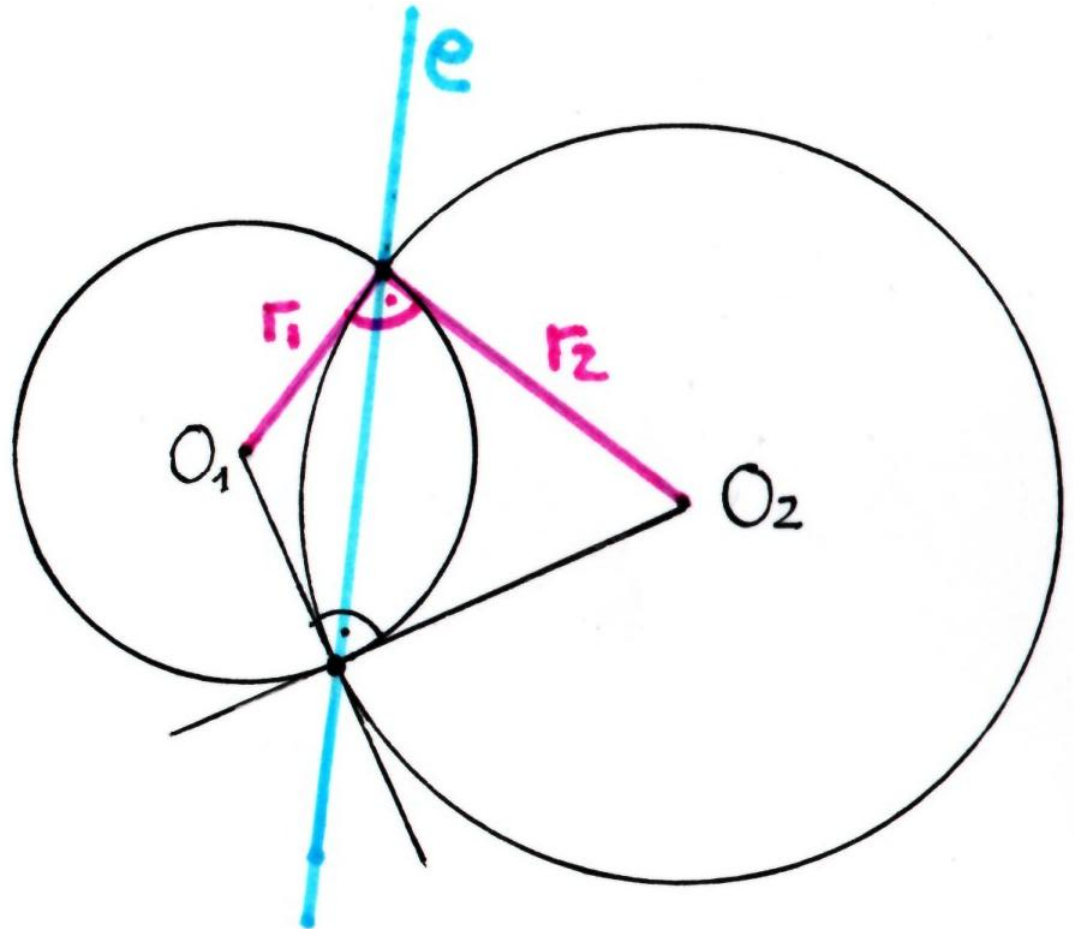


Se pueden hallar esas polares a partir del trazado de las tangentes desde cada punto. Esas polares pasarán por  $P$ .

# PUNTOS CONJUGADOS

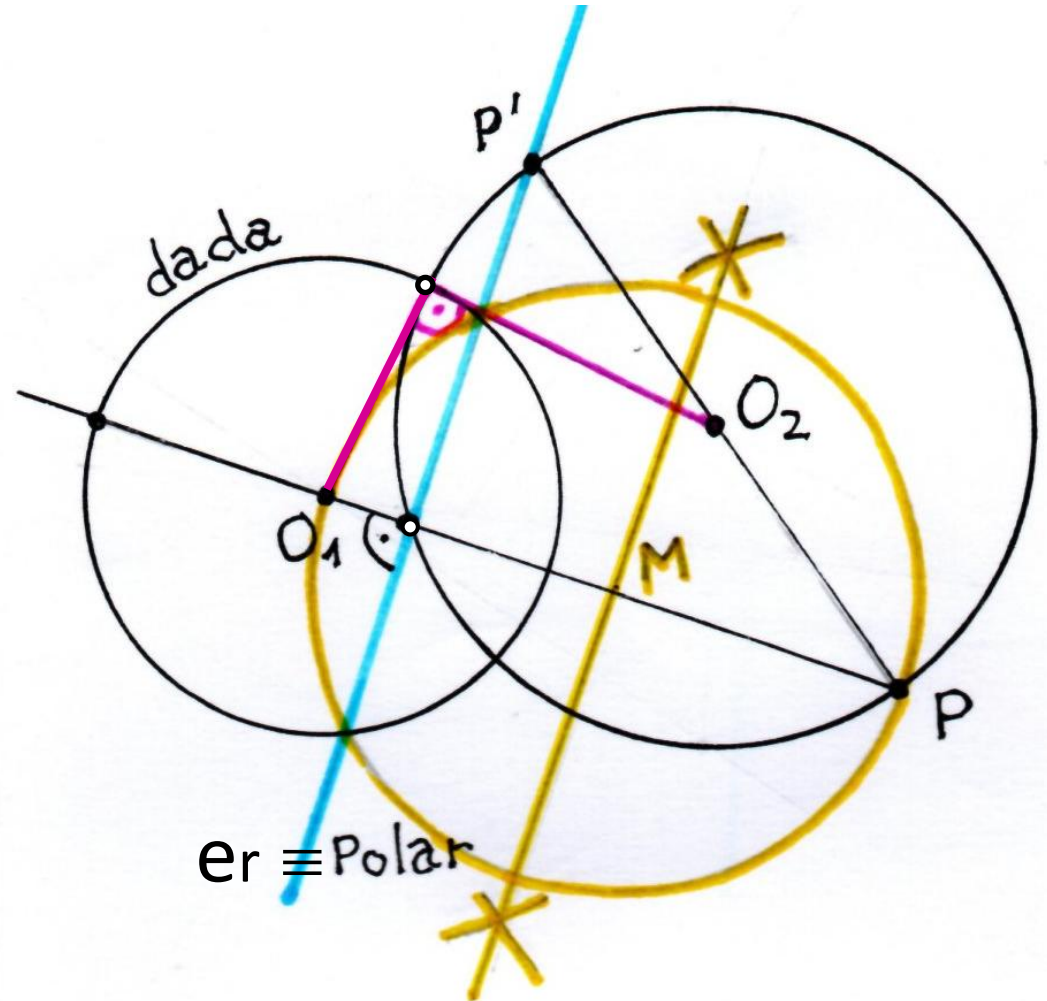
RECORDEMOS:

Dos circunferencias son **ortogonales** cuando se cortan de forma que los radios de ambas son perpendiculares entre sí en los puntos de intersección.

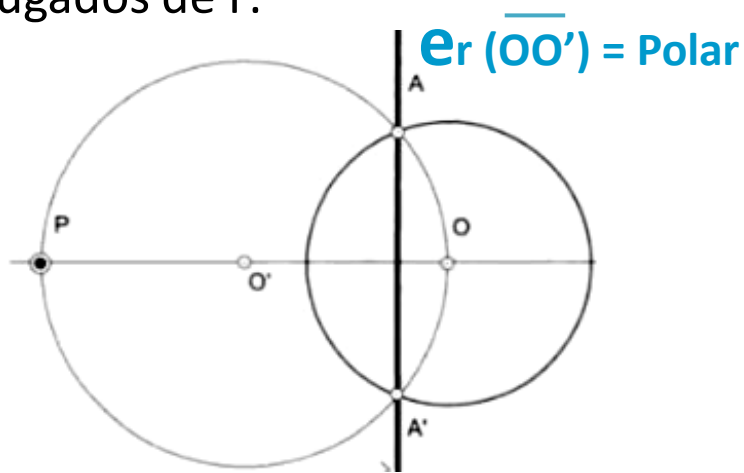


- Dos puntos  $P$  y  $P'$  son **CONJUGADOS** respecto de una circunferencia de centro  $O_1$ , si la circunferencia a la que pertenecen de diámetro  $PP'$  ( $O_2$ ) es ortogonal a ella.

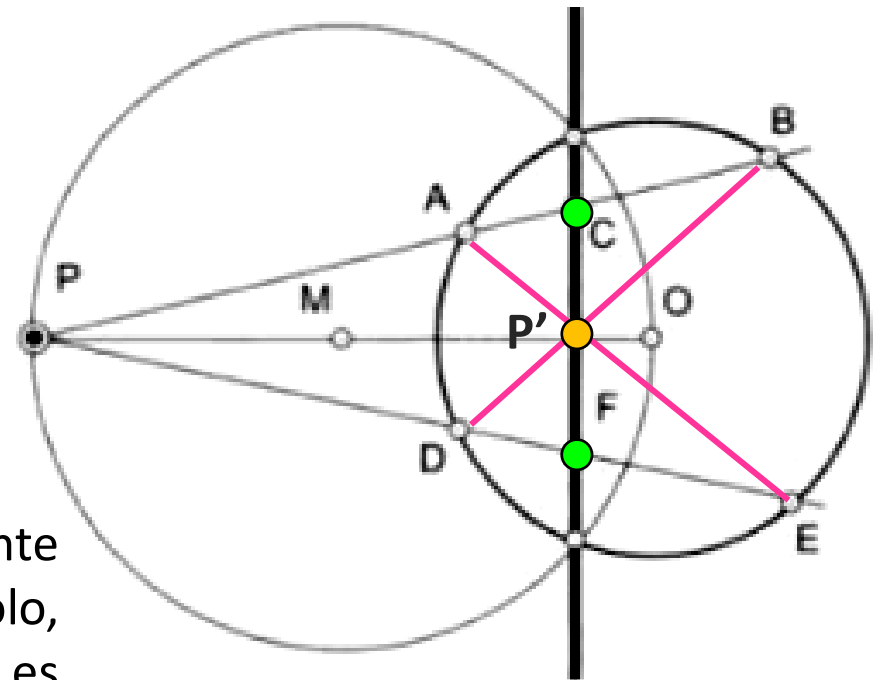
Esta circunferencia de centro  $O_1$  admite infinitas circunferencias ortogonales que pasan por  $P$ . Por lo tanto, el punto  $P$  tiene infinitos puntos conjugados respecto a la circunferencia  $O_1$ . Y todos ellos se encuentran en la recta polar que también es el eje radical entre la dada y aquella cuyo diámetro es  $\overline{O_1P}$ .



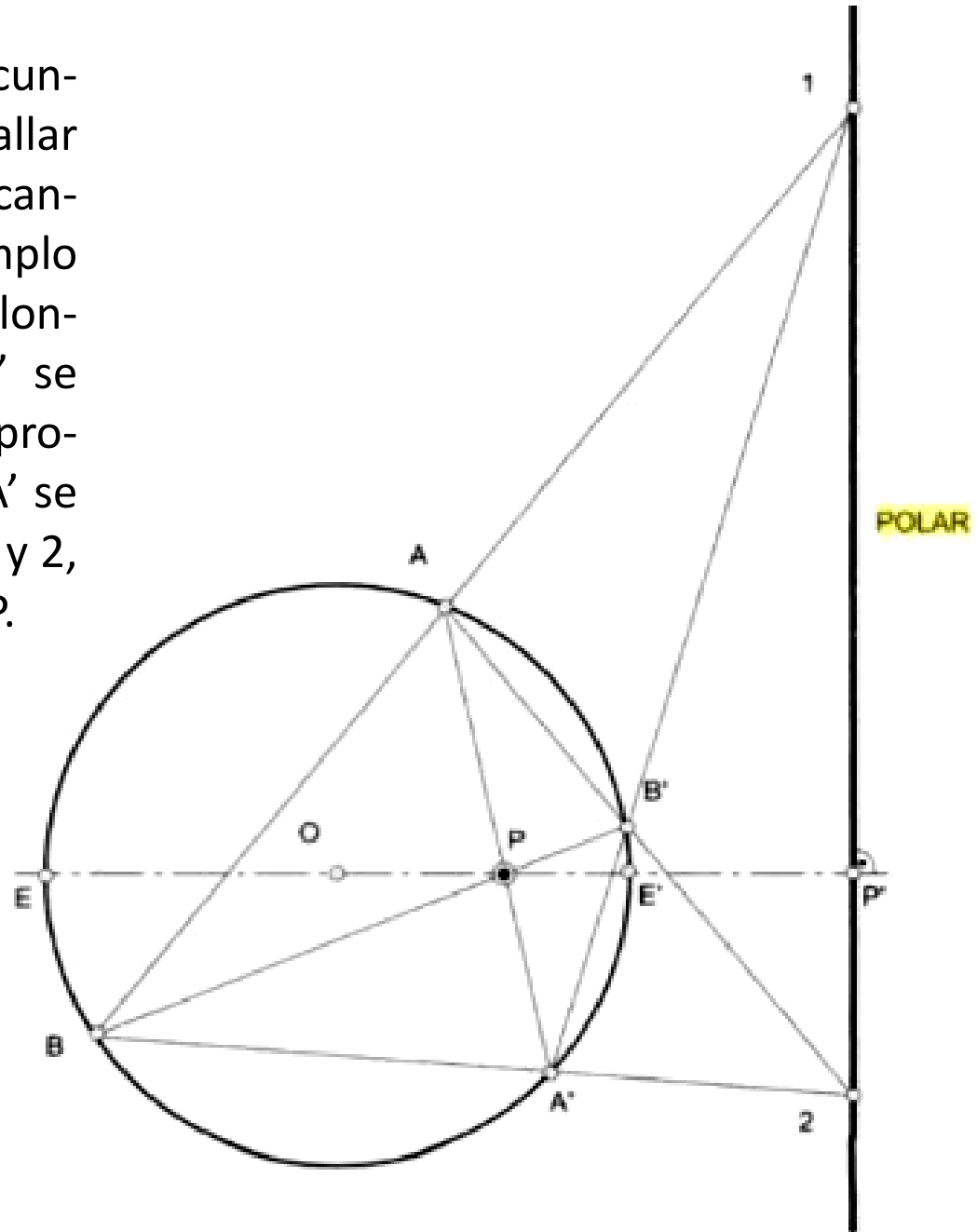
**CUATERNA ARMÓNICA:** Dados una circunferencia y un punto **P (polo)**, la recta polar de ambos es el lugar geométrico de los puntos del plano que, alineados con el polo y dos puntos de la circunferencia, forman una cuaterna armónica, conjugándose con el polo. Esta r. polar es perpendicular a la recta que une el centro de esa circunferencia dada con el punto P. Dicho de otra forma: si desde un polo P exterior trazamos cualquier recta secante a una circunferencia, cortándola en los puntos A y B, la polar contiene a los puntos de cada una de esas rectas que forman con A, B y P una cuaterna armónica, siendo por ello conjugados de P.



Al conjugado de P colineal de la secante diametral se le denomina también antipolo, P'. Es el punto en el que la polar es perpendicular al diámetro PO.

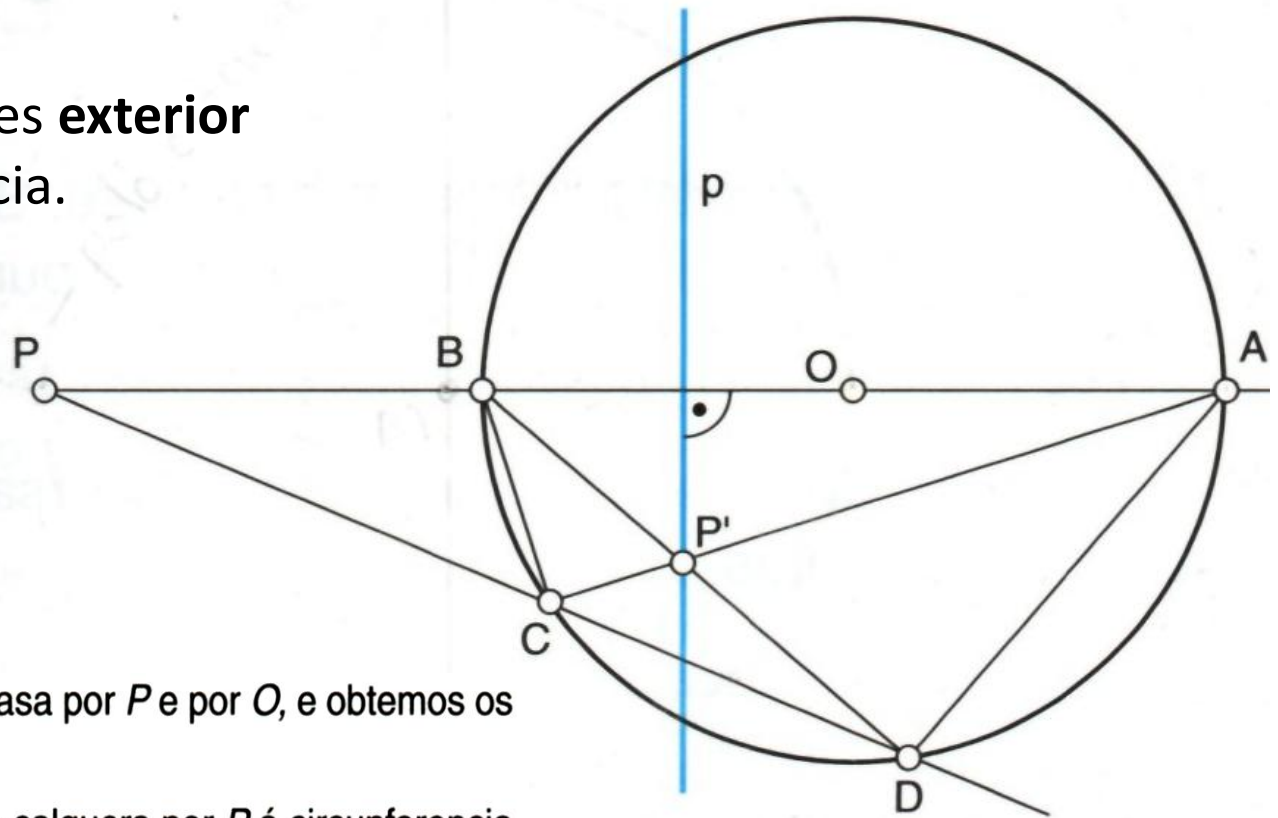


Si el polo  $P$  es interior a la circunferencia también se puede hallar su recta polar por medio de secantes que pasen por  $P$ , por ejemplo las secantes  $AA'$  y  $BB'$ . Si prolongamos las secantes  $AB$  y  $A'B'$  se cortan en el punto 1, y si prolongamos las secantes  $AB'$  y  $BA'$  se cortan en el punto 2. Ambos, 1 y 2, pertenecen a la recta polar de  $P$ .



Es similar cuando se tiene en toma el **diámetro** de la circunferencia como una de las cuerdas.

- Cuando el polo es **exterior** a la circunferencia.



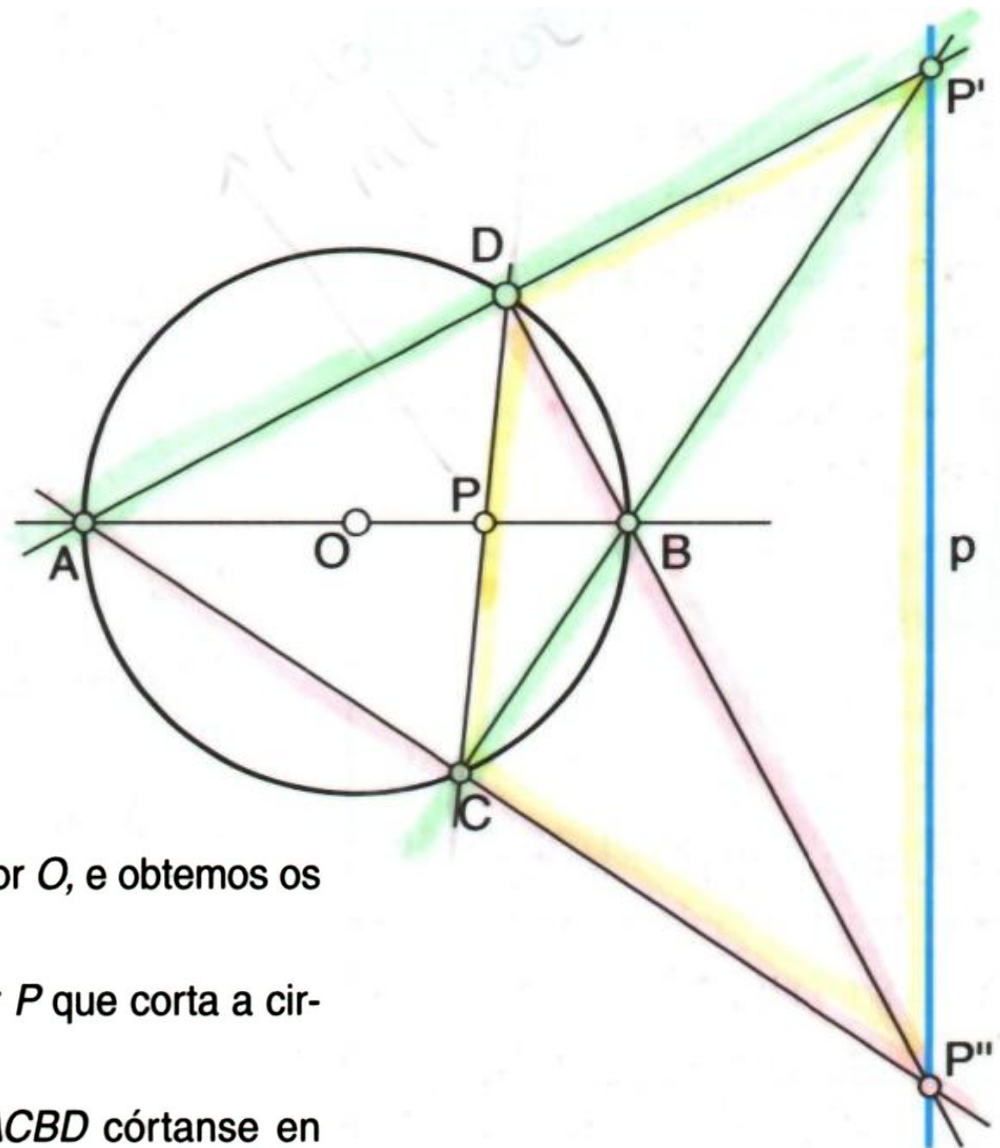
Trazamos a recta que pasa por  $P$  e por  $O$ , e obtemos os puntos  $A$  e  $B$ .

Trazamos unha secante calquera por  $P$  á circunferencia e determinamos os puntos  $C$  e  $D$ .

As diagonais do cuadrilátero  $ABCD$  córtanse nun punto  $P'$  da polar.

Por  $P'$  trazamos unha recta perpendicular a  $\overline{OP}$  que constitúe a polar  $p$  do polo  $P$ .

- Cuando el polo es **interior** a la circunferencia.



Trazamos a recta que pasa por  $P$  e por  $O$ , e obtemos os puntos  $A$  e  $B$ .

Trazamos unha secante calquera por  $P$  que corta a circunferencia nos puntos  $C$  e  $D$ .

Os lados opostos do cuadrilátero  $ACBD$  córtanse en dous puntos  $P'$  e  $P''$  da polar.

A recta que pasa por  $P'$  e  $P''$  é a recta polar  $p$  do polo  $P$ .

# INVERSIÓN

La inversión está conectada con el concepto de POTENCIA. Es una transformación geométrica en el plano que se basa, al igual que la potencia, en la **PROPORCIONALIDAD INVERSA**. La polaridad también, sólo que ésta es una transformación geométrica proyectiva y la inversión no.

FÍJATE:

La **proporcionalidad directa** que hay entre dos magnitudes indica que cuanto más crece una de las magnitudes más crece también la otra. Por el contrario, en la **proporcionalidad inversa** cuando una magnitud crece la otra disminuye proporcionalmente.

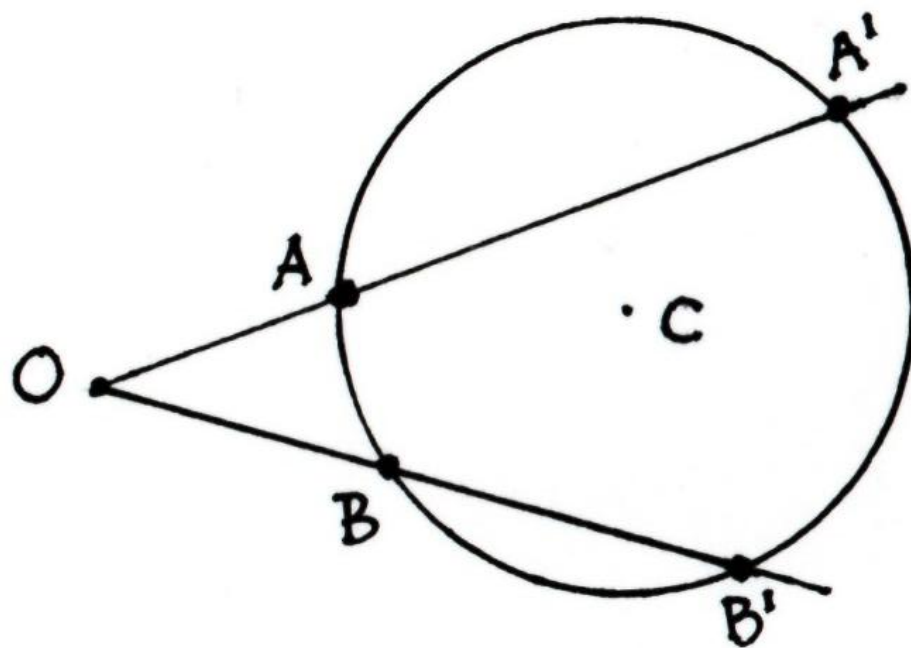
Coloquialmente, dos elementos pueden ser directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

La inversión es una transformación geométrica en la que no se conservan ni la forma ni el tamaño de las figuras. Y es **RECÍPROCA**.

A un punto  $A$  hace corresponder un punto  $A'$ , su inverso, de manera que estarán alineados con el llamado centro de inversión  $O$ , que es un punto fijo.

En esta correspondencia se cumple que:

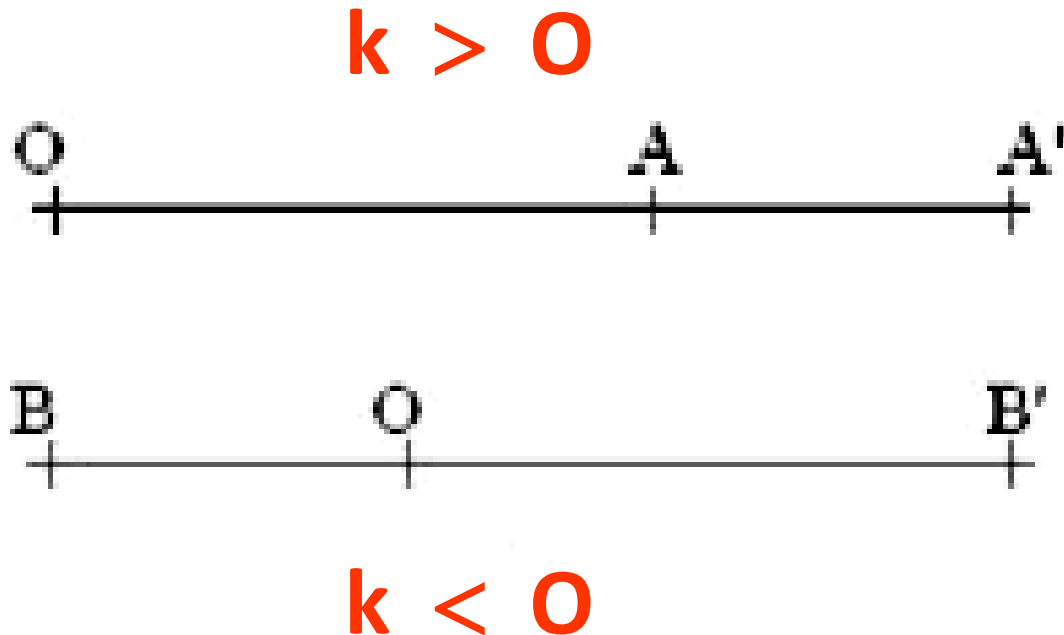
$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \dots = k$   
 $k$  es la llamada potencia de inversión y es constante. Y esto se cumple sólo si los pares de puntos se encuentran alineados con el centro de inversión.



Todos los pares de puntos obtenidos al trazar desde  $O$  rectas secantes a la circunferencia de centro  $C$ , son inversos respecto a  $O$ .

Son magnitudes inversamente proporcionales las que, aunque varíen, siguen manteniendo constante su producto.

Si los puntos inversos en la misma dirección partiendo de  $O$ , la razón  $k$  es positiva, mientras que si están en direcciones opuestas desde  $O$ ,  $k$  será negativa.



- Diferencia entre POTENCIA e INVERSIÓN:
  - La potencia es la relación entre un punto y una circunferencia.
  - La inversión es una transformación que se puede aplicar a todos los puntos del plano una vez determinada.

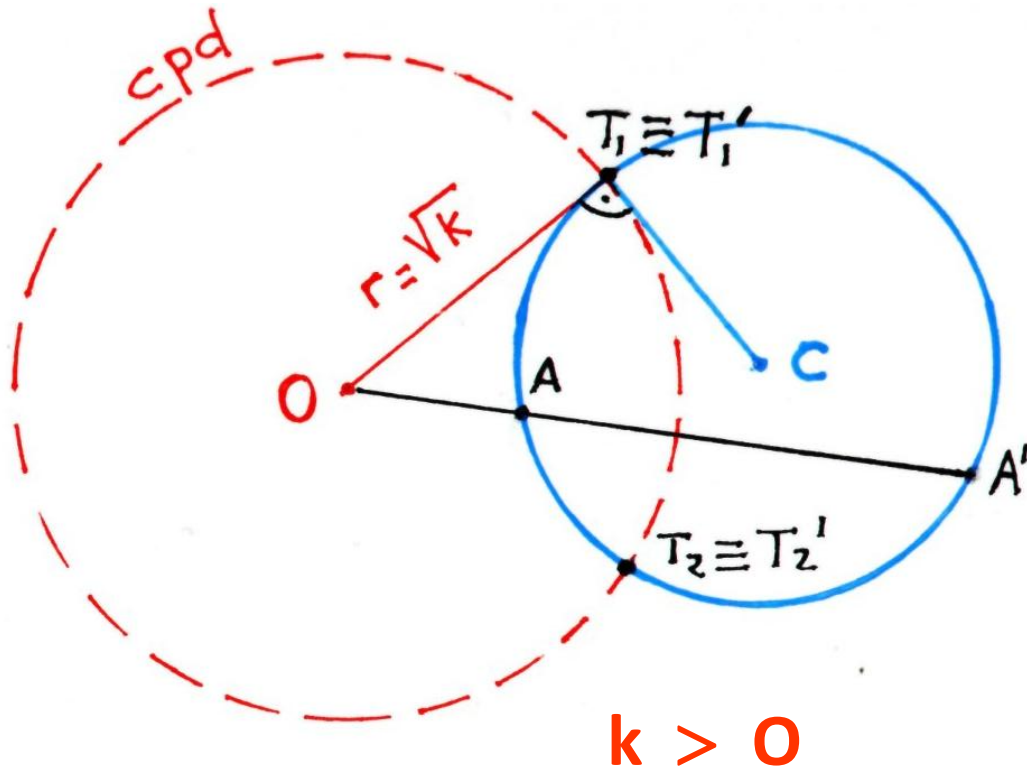
No obstante, ambas comparten el mismo fundamento geométrico. El valor constante se calcula de la misma manera.

Vemos que los pares de puntos inversos,  $A-A'$  ó  $B-B'$ , desde el mismo centro de inversión, son concíclicos, ya que están contenidos en la misma circunferencia.

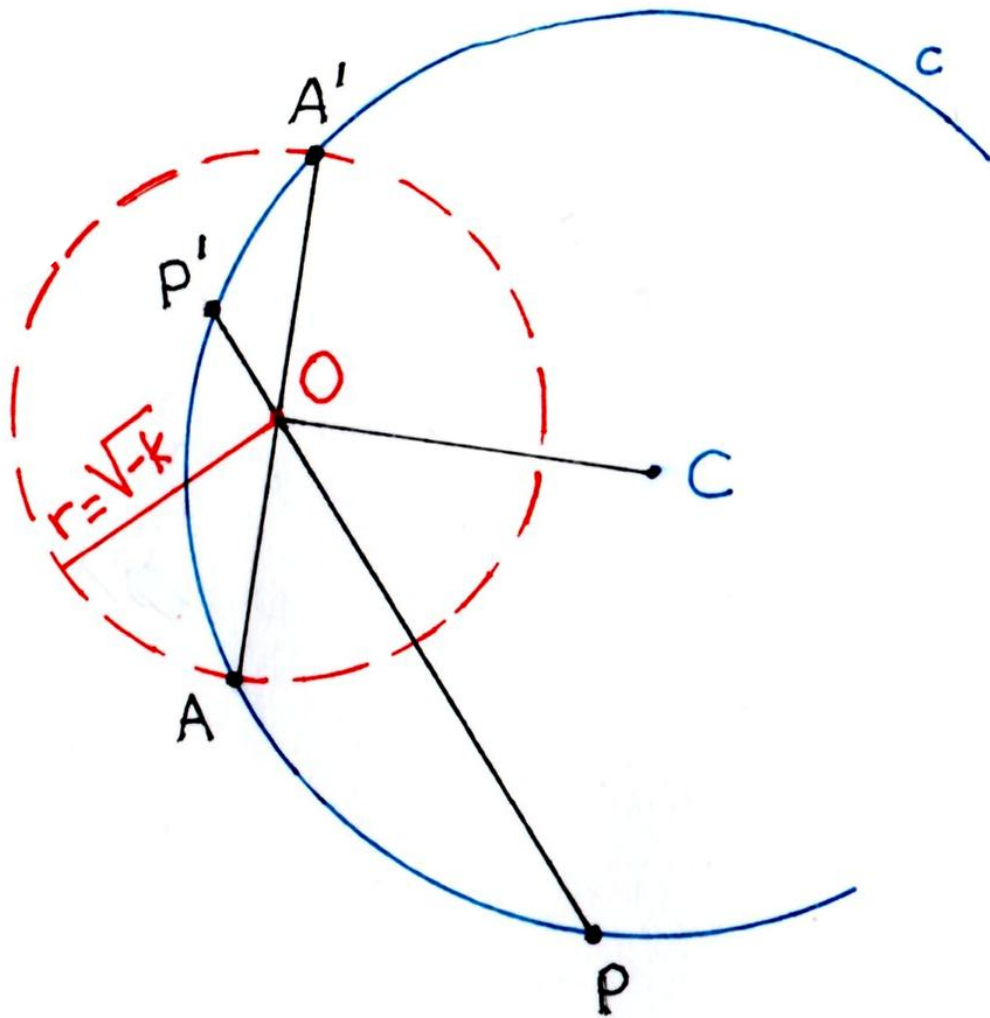
## CIRCUNFERENCIA DE PUNTOS DOBLES (cpd)

Los puntos de tangencia desde el centro de inversión hasta la circunferencia de centro  $C$  son dobles (inversos de sí mismos), ya que en ellos coincide el punto  $T$  y su inverso  $T'$ . Y se cumple la expresión de la proporcionalidad inversa:

$$\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = k \Rightarrow \overline{OT}^2 = k \Rightarrow \overline{OT} = \sqrt{k}$$



El lugar geométrico de estos puntos dobles es la circunferencia de puntos dobles (cpd), cuyo centro es el centro de inversión  $O$ . Éstos son el punto de tangencia entre la circunferencia  $C$  y la cpd, por lo que ambas son ortogonales. Y distan  $\sqrt{k}$  del c. de inversión que coincide con el radio de la cpd (circunferencia de autoinversión)



$$k < 0$$

Si la potencia de inversión es negativa, el centro de inversión  $O$  es interior a la circunferencia de centro  $C$  y no habrá circunferencia de puntos dobles.

Cuando la potencia de inversión  $k$  es positiva, los **PUNTOS DOBLES**, es decir, inversos de sí mismos, distan  $\sqrt{k}$  del centro de inversión  $O$ , ya que:  $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = k$  que es la potencia de inversión.

Como se hallan a una distancia constante del centro de inversión determinan una circunferencia, llamada  $c$ . de autoinversión o de puntos dobles, y su radio es la raíz cuadrada de su potencia.

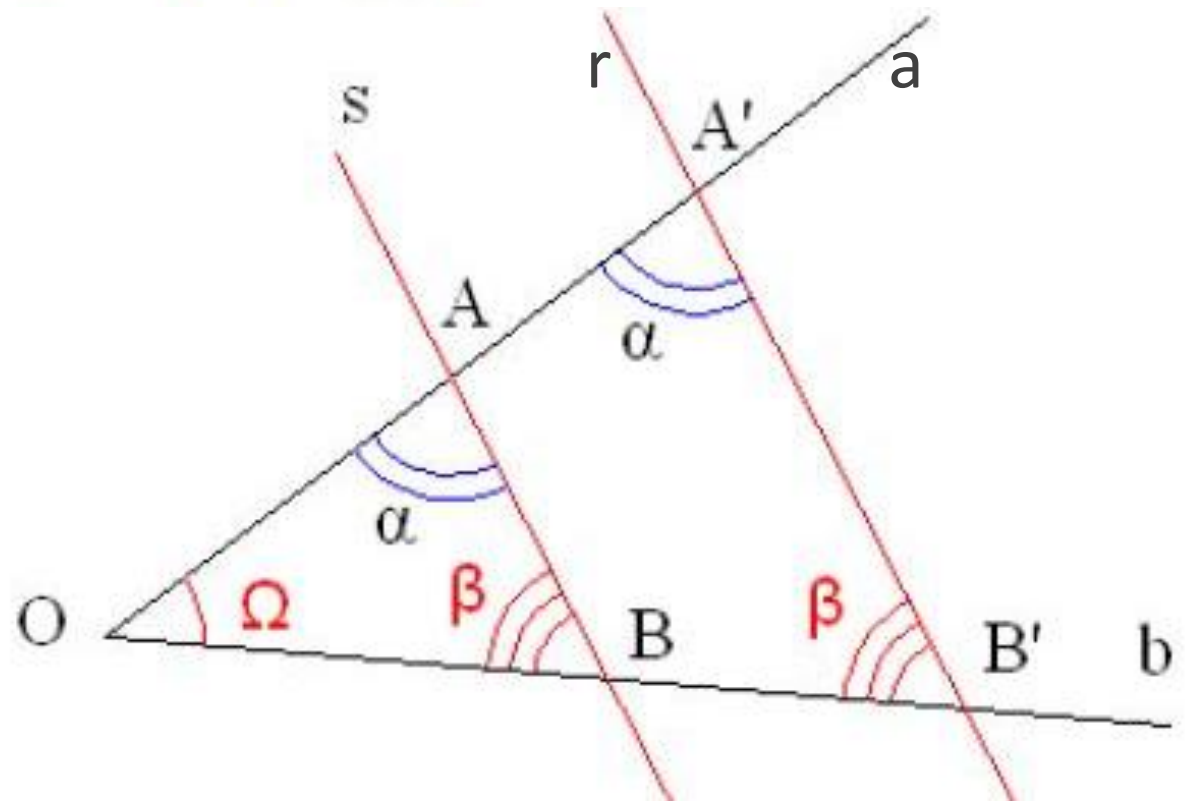
En la inversión negativa no existen puntos dobles porque un punto y su inverso están a distinto lado del centro de inversión y  $\sqrt{-k}$  es un número irreal.

Las **RECTAS DOBLES** son aquellas que pasan por el centro de inversión, ya que contienen a los puntos inversos alineados con el centro de inversión.

## RECTAS ANTIPARALELAS

Por el teorema de Tales sabemos que al cortar dos rectas  $a$  y  $b$  concurrentes en  $O$  por dos rectas paralelas  $r$  y  $s$ , se obtienen dos triángulos  $OAB$  y  $OA'B'$  semejantes, por tener tres ángulos iguales y como consecuencia lados proporcionales.

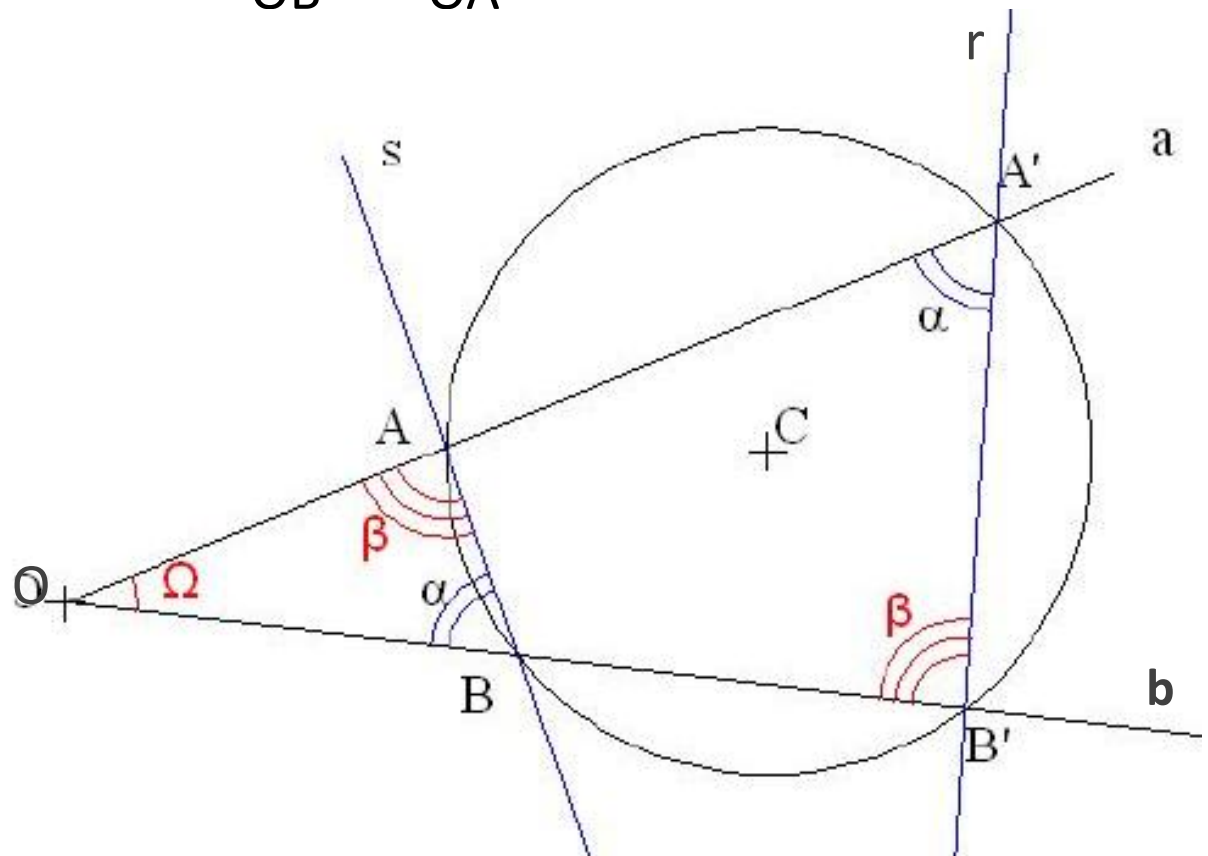
$$OA/OB=OA'/OB'$$



Pero también podemos obtener una pareja de triángulos **semejantes** al cortar dos rectas a y b concurrentes por dos rectas no paralelas r y s, llamadas antiparalelas respecto a las a y b, que a su vez también son antiparalelas de las r y s. De tal forma que se cumple:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

Lo que demuestra que los puntos A y B tienen por inversos respectivos A' y B' en una inversión de centro O y pertenecen a una circunferencia de centro C.



## EJEMPLOS DE LA RELACIÓN ENTRE INVERSIÓN Y POTENCIA

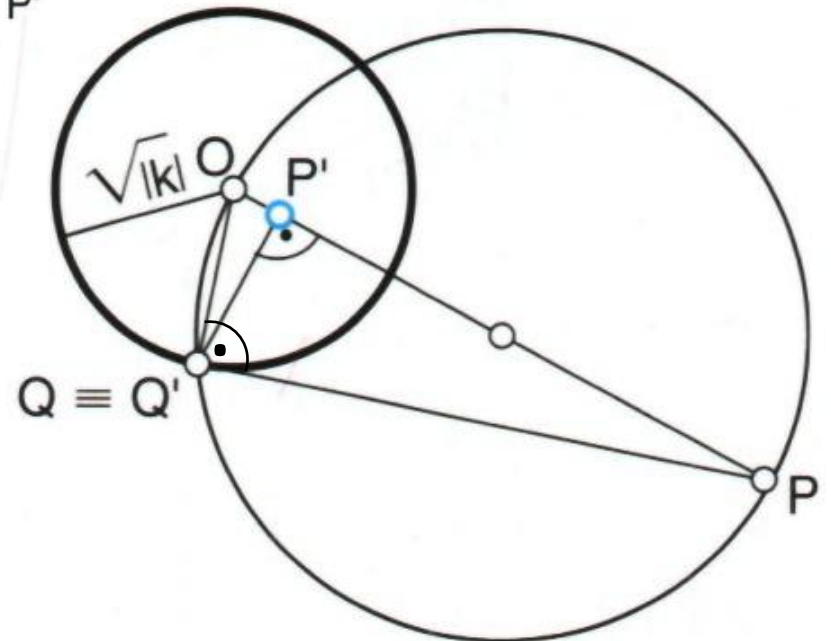
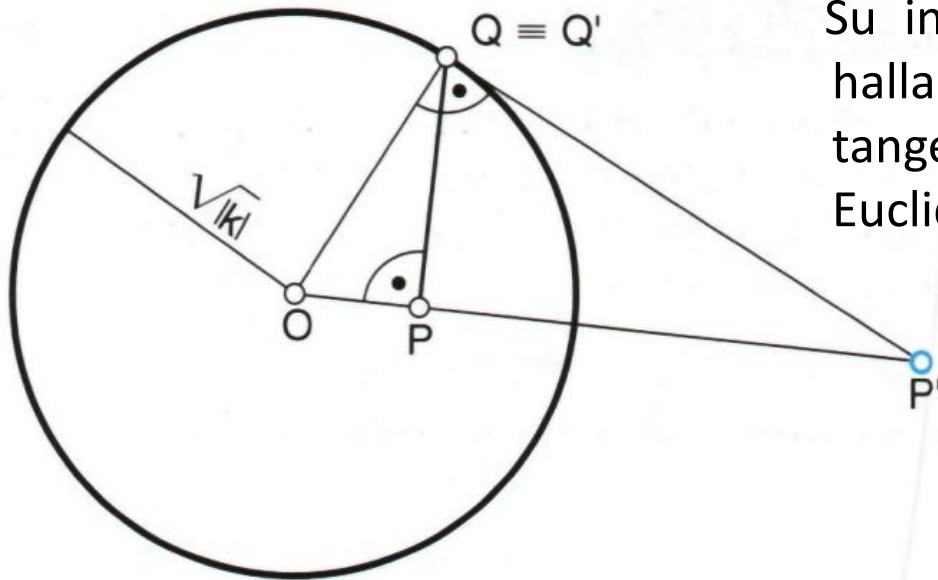
- **DOS CIRCUNFERENCIAS:** cualquier pareja de circunferencias se pueden transformar en ellas mismas tras una inversión, siempre que el centro de inversión  $O$  se fije sobre el eje radical de ambas, y que el radio de la circunferencia de puntos dobles (cpd) sea igual a la longitud de tangente trazada desde  $O$  a cada una de ellas.
- **TRES CIRCUNFERENCIAS:** para que tres circunferencias se transformen en ellas mismas al realizar la inversión, el centro de inversión  $O$  tiene que coincidir con el centro radical de las tres, y el radio de la cpd debe ser igual a la longitud de tangente desde el centro de inversión a cada una de ellas.

# INVERSO DE UN PUNTO

1. Sea un punto  $P$ , el centro y la potencia de inversión.

a) Si  $P$  interior a la circ. de autoinversión.

Su inverso  $P'$  estará en el exterior. Se halla por medio del punto doble  $Q-Q'$  de tangencia, recordando los teoremas de Euclides y de Thales.

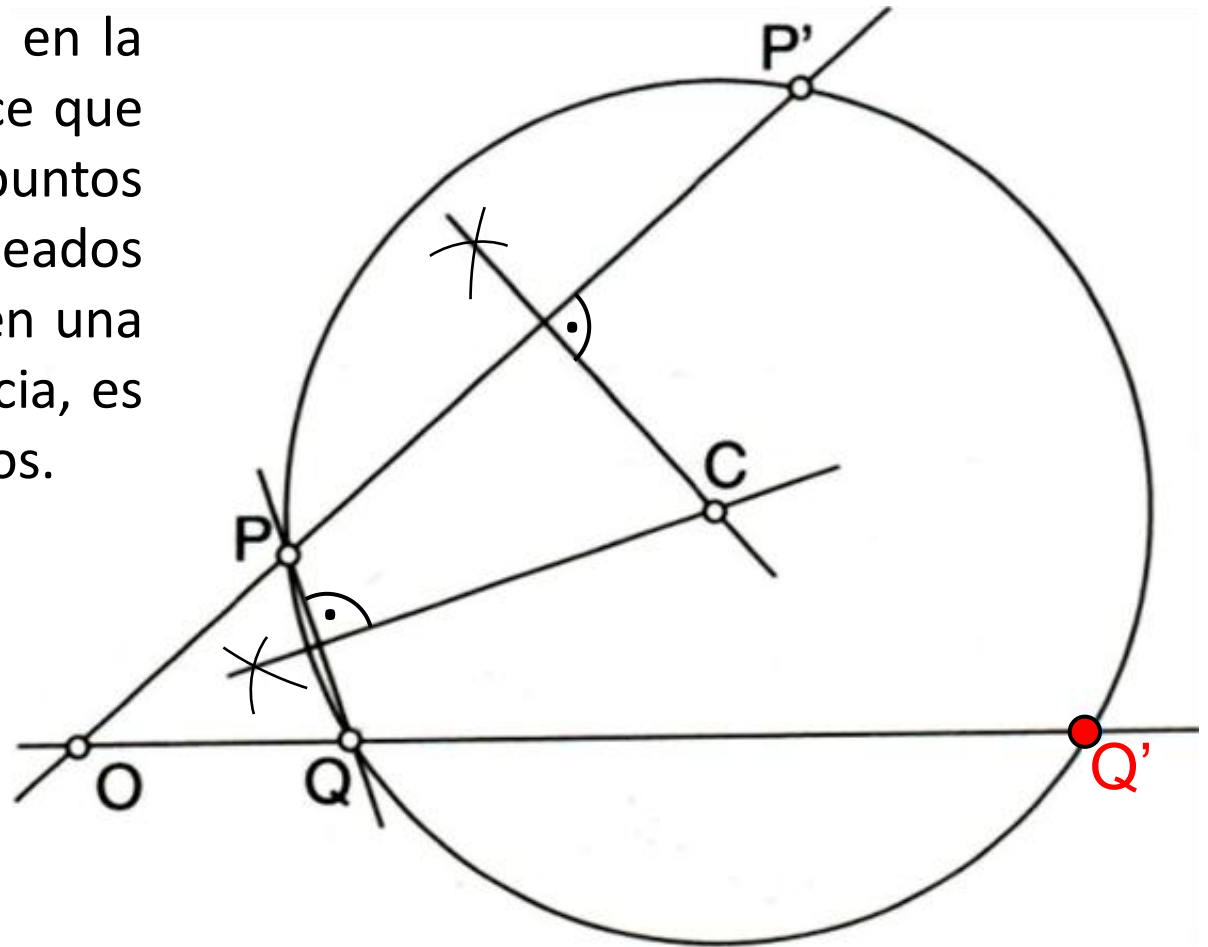


b) Si  $P$  exterior a c. de autoinversión.

$P'$  estará en el interior de ésta.

2. Sea un punto  $Q$ , el centro de inversión  $O$  y dos puntos homólogos  $P$  y  $P'$  no alineados con  $Q$ .

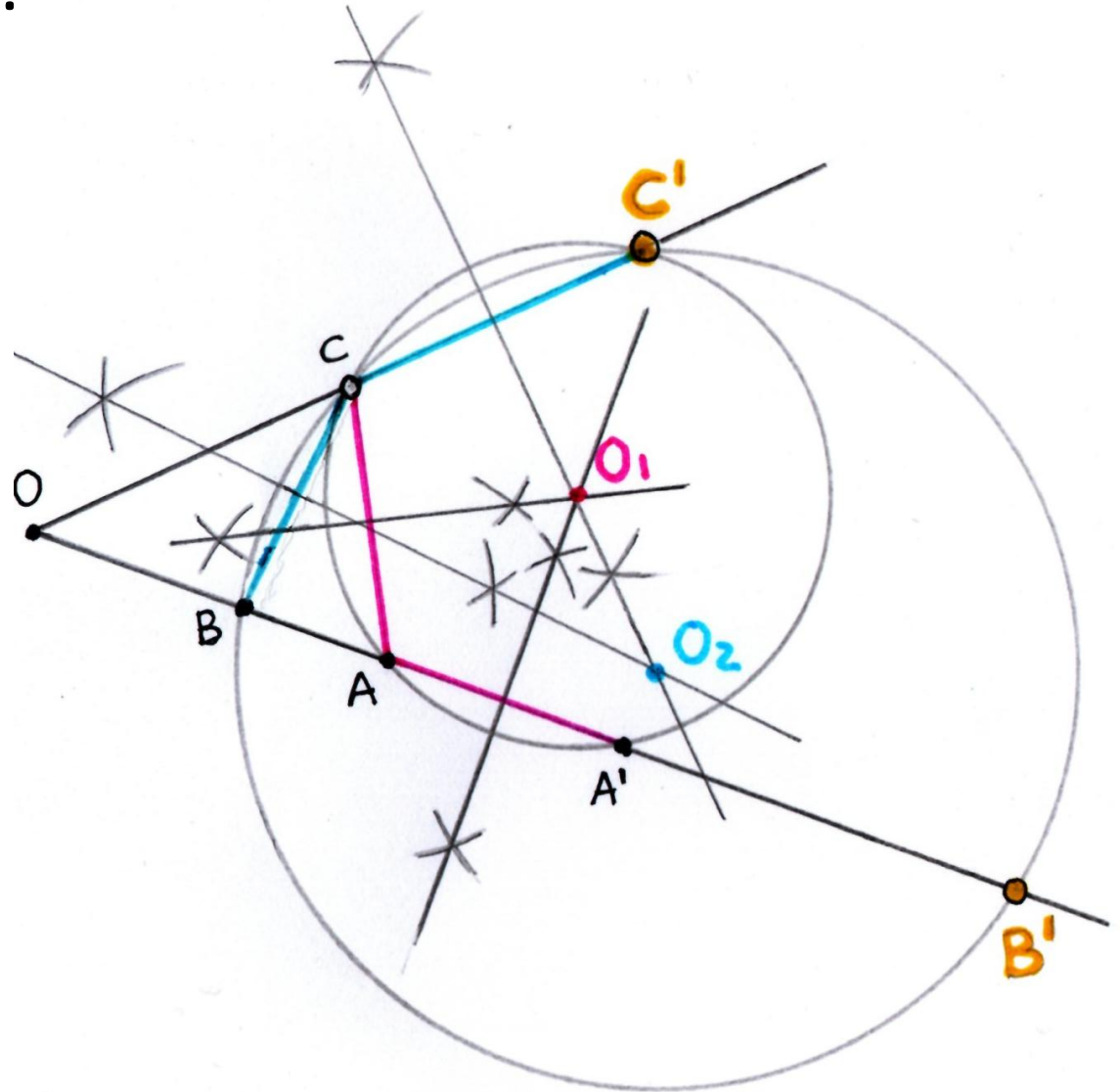
El proceso se basa en la propiedad que dice que dos pares de puntos inversos y no alineados están contenidos en una misma circunferencia, es decir, son concíclicos.





#### 4. Cómo hallar el inverso del punto B si está en línea con otro par de puntos inversos A – A'.

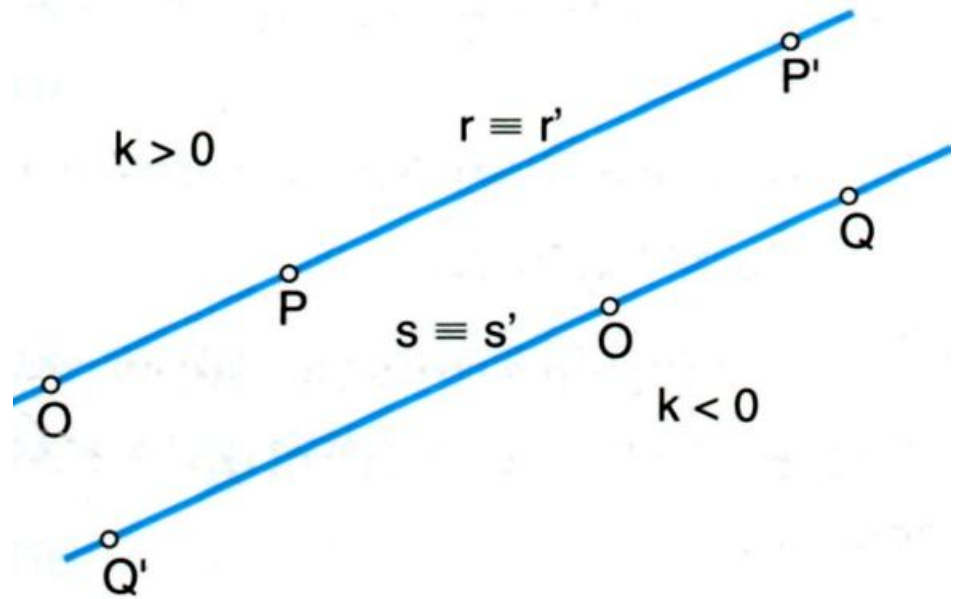
Al estar alineados A y B, no pueden pertenecer a la misma circunferencia. Entonces, para hallar B', nos tenemos que valer de un tercer punto, C. Para encontrar su inverso, trazamos la circunferencia que pasa por A y C, y luego la que contiene a B y C, para obtener B'.



# INVERSA DE UNA RECTA

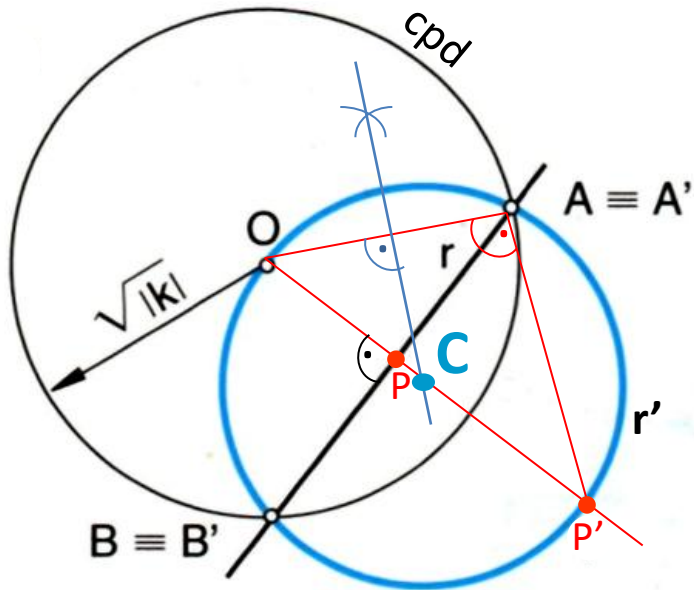
## 1. Si pasa por el centro de inversión.

Entonces es una recta doble, es decir, su inversa es ella misma.



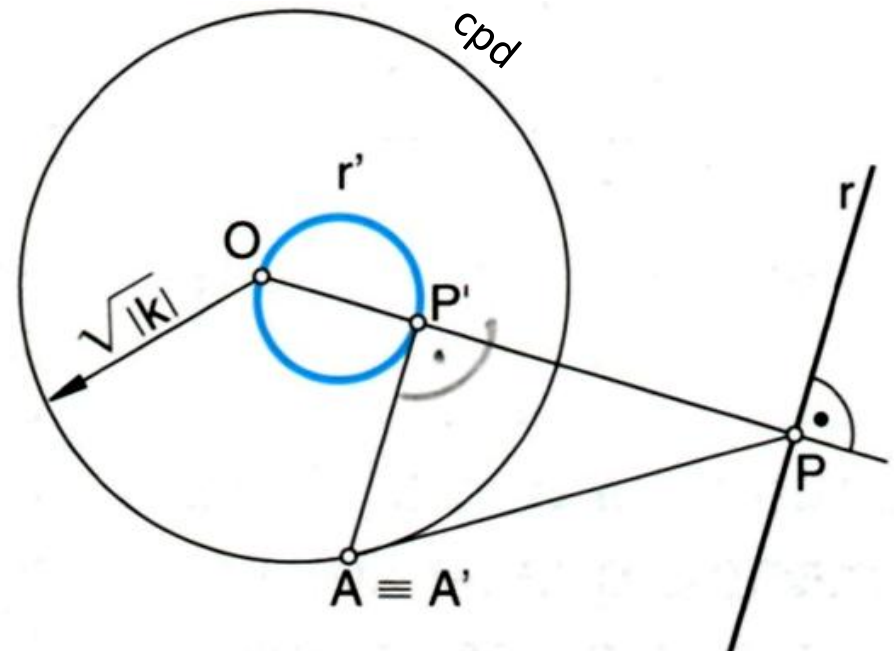
## 2. Si no pasa por el centro de inversión (dada la cpd).

Su inversa es una circunferencia que sí pasa por el centro de inversión.



a) Si la recta es secante a la c. de autoinversión, los puntos de corte son dobles porque son puntos de tangencia que pertenecen a la cpd y compartidos con la circunferencia inversa que pasa por el centro de inversión.

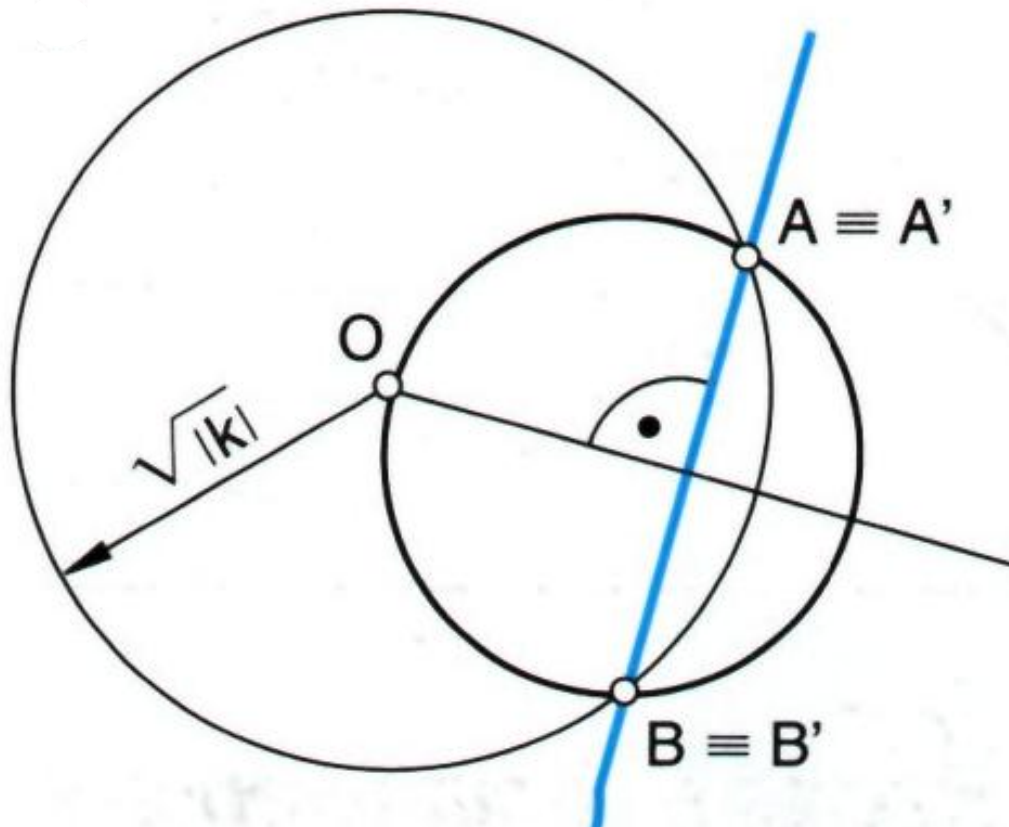
b) Si la recta es exterior a la c. de autoinv. Trazamos por O una perpendicular a r, encontrando P. Hallamos su inverso P' como en el apartado anterior. La circunf. Inversa de r es la de diámetro OP'.



# INVERSA DE UNA CIRCUNFERENCIA

## 1. Si pasa por el centro de inversión.

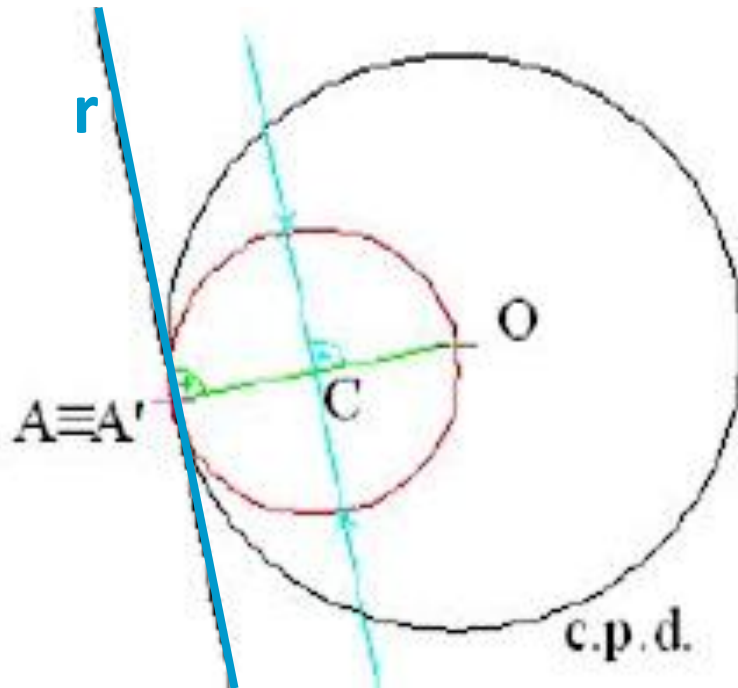
Es el caso recíproco del visto en el punto 2.a. anterior. Su inversa será una recta que no pasa por el centro de inversión, y perpendicular a la recta que une éste con el centro de la circunferencia dada.



### a) Si corta a la c. de autoinversión.

La recta inversa pasará por los puntos de intersección que son dobles.

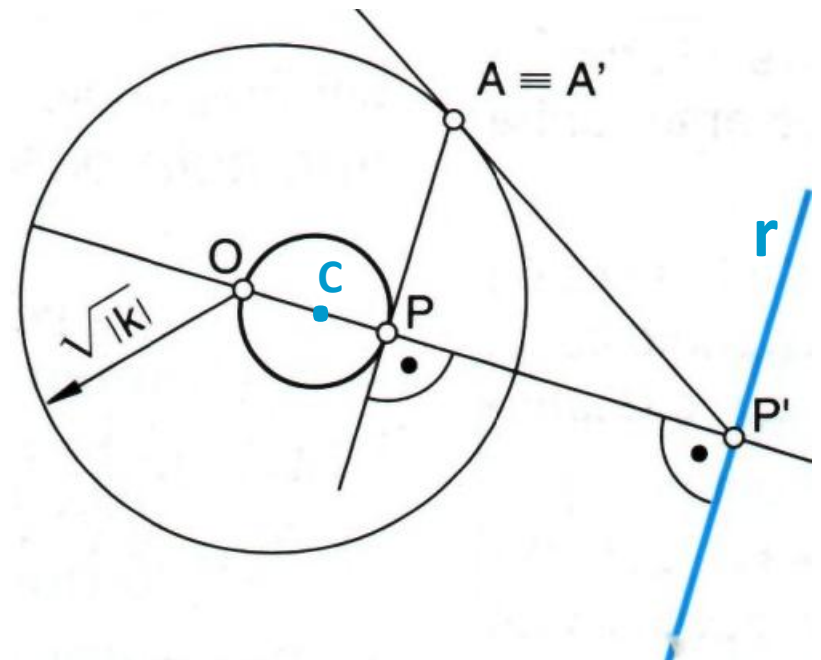
**b) Si es tangente a la c. de autoinversión.**



El punto  $A-A'$  es un punto de tangencia y es doble (pertenece a la cpd). La recta  $r$  inversa de la circunferencia dada será tangente en este punto a la recta que une los centros de las dos circunferencias, que es radio y diámetro de la cpd y la dada respectivamente.

**c) Si no corta a la c. de autoinversión.**

La recta inversa es la perpendicular a la prolongación del diámetro de la c. dada y la cpd en el punto inverso  $P'$ .

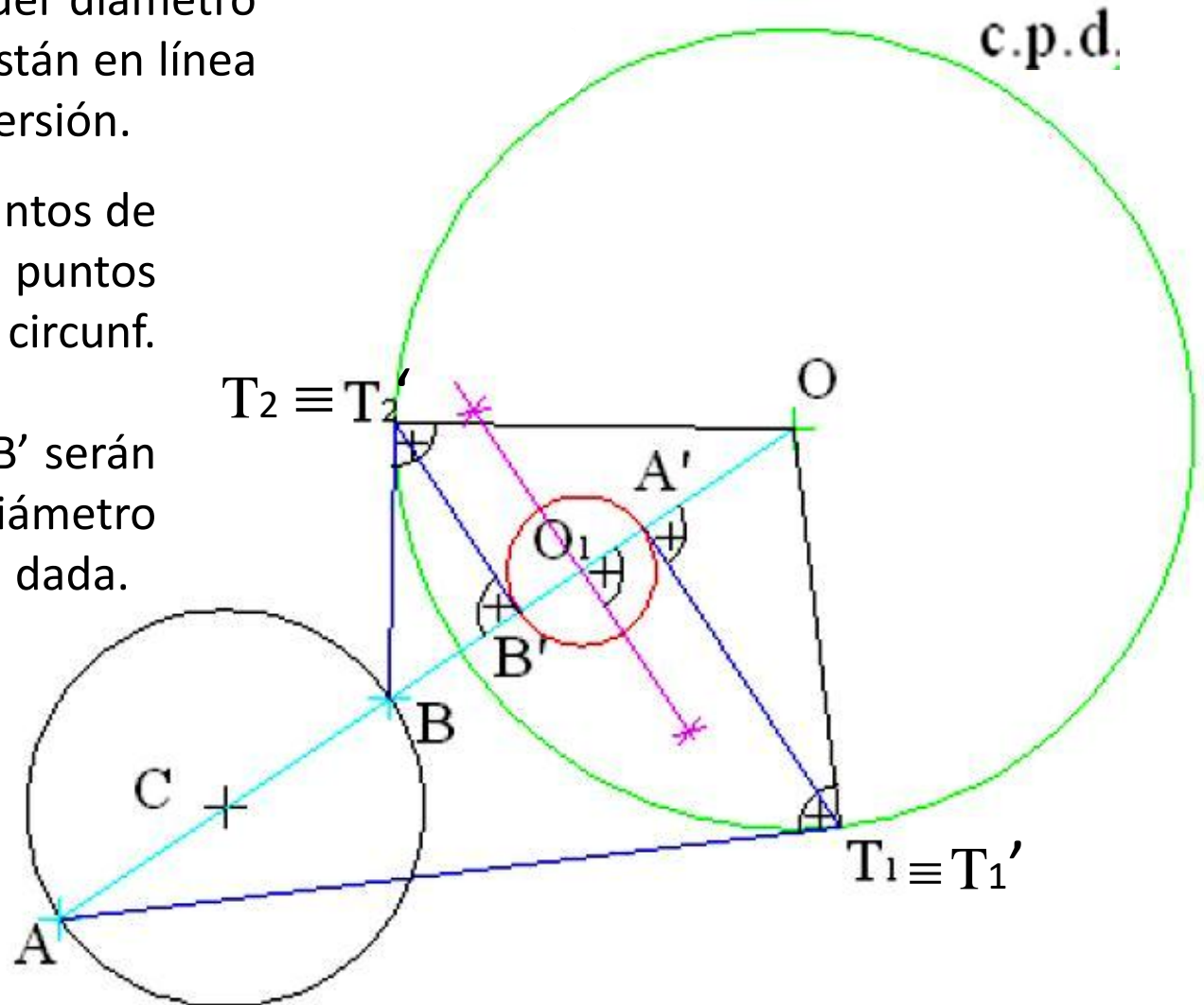


## 2. Si no pasa por el centro de inversión.

Se trata de hallar los inversos de  $A$  y  $B$ , extremos del diámetro de la  $c$ . dada, que están en línea con el centro de inversión.

Por medio de los puntos de tangencia que son puntos dobles de la cpd o circunf. de autoinversión.

Los inversos  $A'$  y  $B'$  serán los extremos del diámetro de la  $c$ . inversa de la dada.



Las circunferencias de centro  $C$  y  $O_1$  son **inversas y homotéticas** a la vez, siendo el punto  $O$  el centro de ambas transformaciones. Es decir:

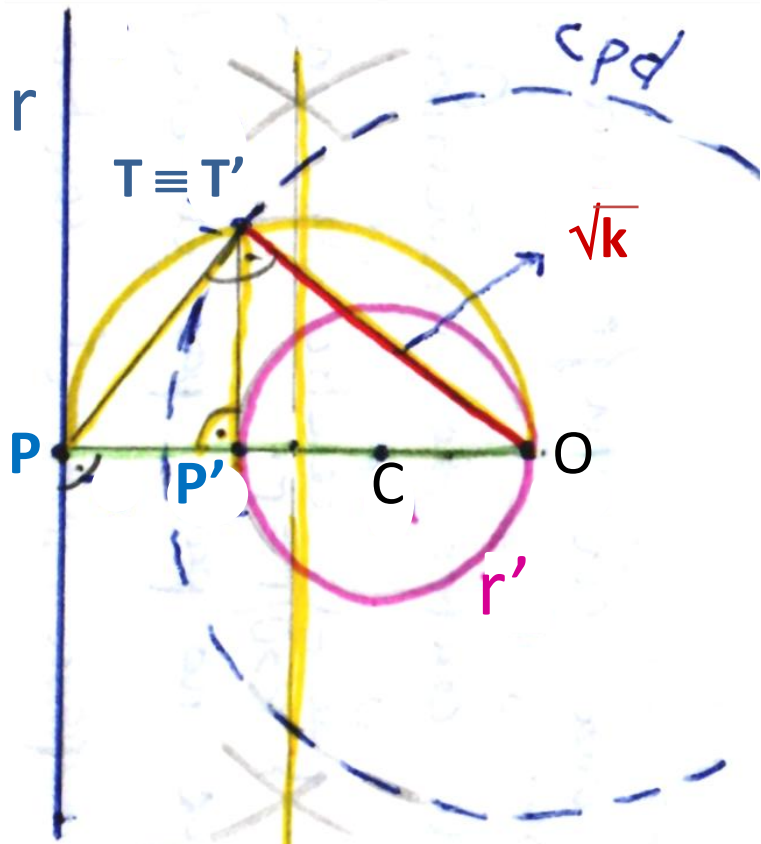
- Tenemos que  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = k$  (potencia de inversión).
- Y por otra parte la potencia del punto  $O$  respecto de la circunf. de centro  $C$  sería:  $OA \cdot OB = P$
- Dividiendo ambas igualdades se obtiene:  $OA' / OB = OB' / OA = k / P$

Por tanto, la figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión, es otra que tampoco pasa por él, y es además homotética de la primera cuyo centro es el mismo que el de inversión, y cuya razón de homotecia es  $k / P$ .

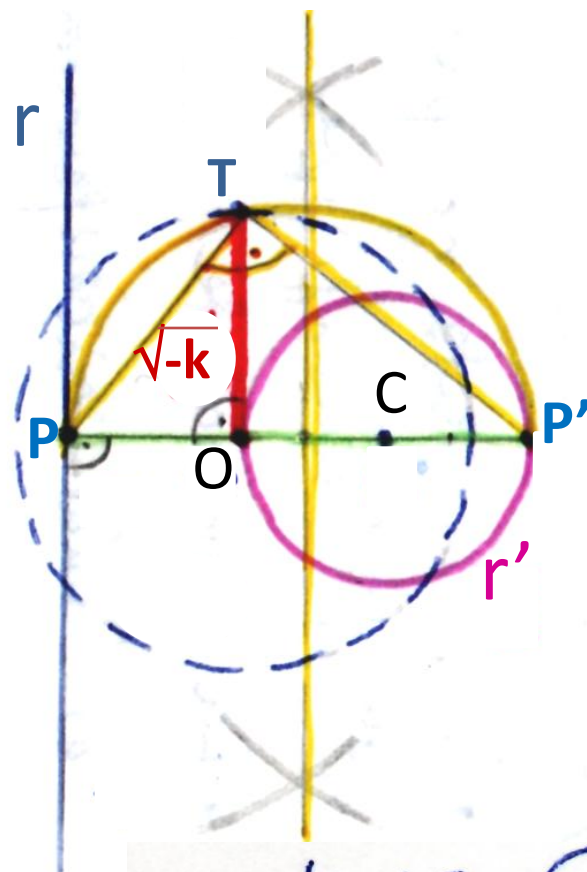
Se deduce pues que: así como los inversos de  $A$  y  $B$  son  $A'$  y  $B'$ , el homotético de  $A$  es  $B'$  y el de  $B$  es  $A'$ . De tal manera que a una pareja de puntos inversos también se les denomina ANTIHOMOTÉTICOS.

Como consecuencia de lo anterior, los centros  $C$  y  $O_1$  de ambas circunferencias son homotéticos pero no inversos.

**OBSERVA:** una circunferencia y una recta siempre se podrán relacionar mediante dos inversiones, una positiva y otra negativa. En la positiva la potencia de inversión  $k$  se halla por el Teorema del Cateto, y en la negativa por el Teorema de la altura.



$k > 0$  (+)  
Teorema cateto



$k < 0$  (-)  
Teorema altura

## TABLA RESUMEN DE CORRESPONDENCIA ENTRE ELEMENTOS Y SUS INVERSOS

ORIGINAL	INVERSO
1 pto. cualquiera $\neq O$	1 pto. cualquiera $\neq O$
Centro de inversión $O$	En el $\infty$
Recta que pasa por $O$	Misma recta = recta doble
Recta que no pasa por $O$	Circunf. que pasa por $O$
Circunf. que pasa por $O$	Recta que no pasa por $O$
Circunf. que no pasa por $O$	Otra circunf. que no pasa por $O$

PRÓXIMO TEMA

**TANGENCIAS**  
(por potencia e inversión)