



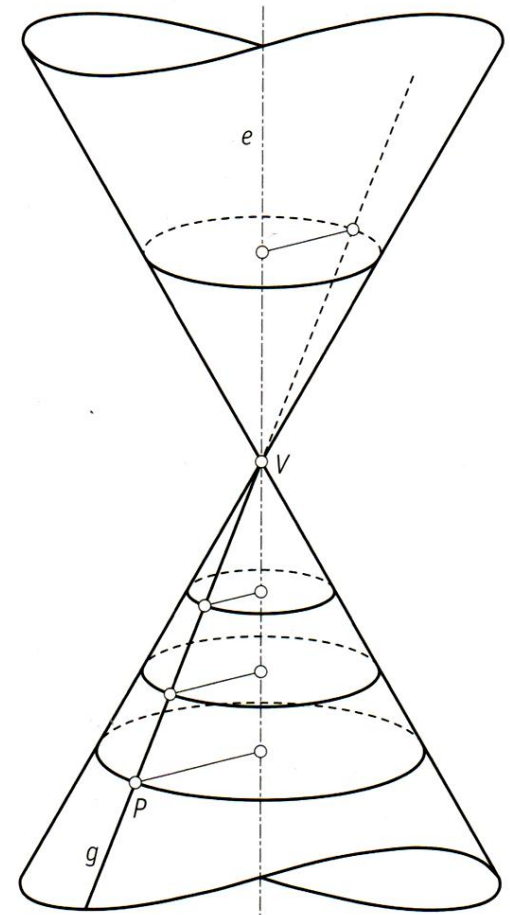
CURVAS CÓNICAS

2º Bach

Una **superficie cónica** se genera cuando una recta g , llamada generatriz, gira alrededor de un eje e con el que se corta en un punto V llamado vértice (fig. 1).

► Ten en cuenta

- La superficie cónica generada tiene dos ramas simétricas respecto del vértice.
- Si el ángulo que forman el eje y la generatriz se mantiene constante, la superficie cónica se llama de revolución. En este caso, la trayectoria que describe cualquier punto de la generatriz es una circunferencia cuyo centro se encuentra en el eje.



Secciones dun cono

Curvas cónicas: Se llaman así a las distintas curvas que se obtienen al seccionar una superficie cónica con un plano.

Según sea la posición del plano secante respecto del eje, se obtienen las siguientes curvas:

- **Circunferencia.** El plano secante es perpendicular al eje del cono (fig. 2) y no pasa por el vértice ($\beta = 90^\circ$).
- **Elipse.** El plano secante forma con el eje del cono un ángulo mayor que el semiángulo en el vértice (fig. 3), el plano corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice ($\alpha < \beta$).
- **Parábola.** El plano secante forma con el eje del cono el mismo ángulo que el semiángulo en el vértice (fig. 4) o, lo que es lo mismo, es paralelo a una generatriz del cono. En este caso, la curva que resulta es abierta y con un punto en el infinito ($\alpha = \beta$).
- **Hipérbola.** El plano secante forma con el eje del cono un ángulo menor que el semiángulo en el vértice (fig. 5). En este caso, el plano corta a las dos ramas del cono y la sección es una curva abierta de dos ramas ($\alpha > \beta$).

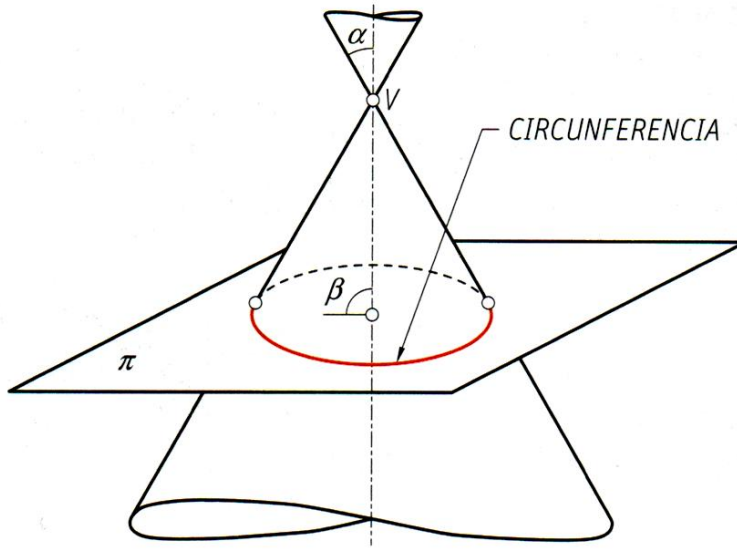


Figura 2

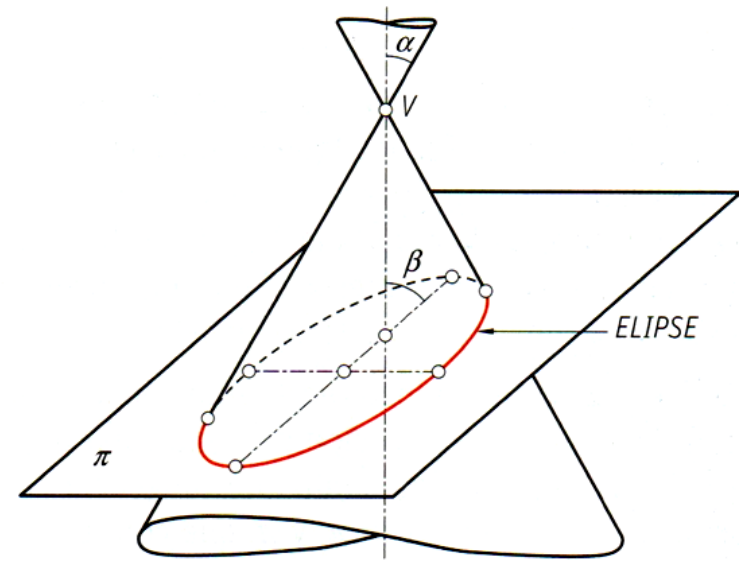


Figura 3

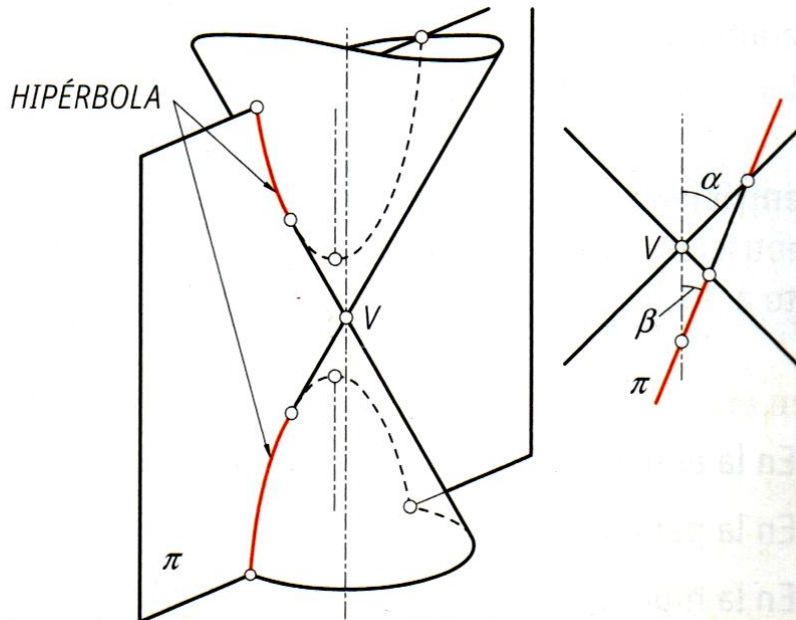


Figura 5

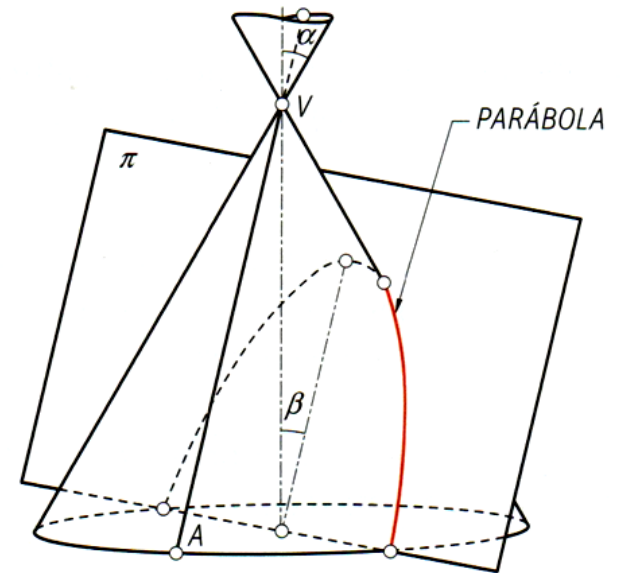


Figura 4

Focos e directrices

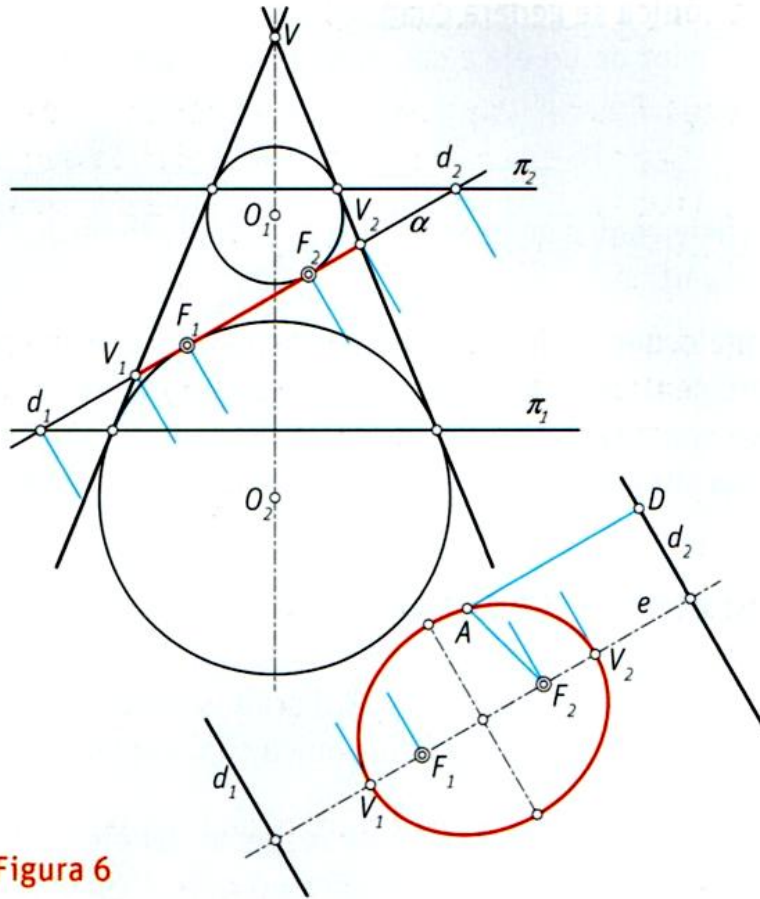


Figura 6

Focos. Los focos de una curva cónica son los puntos de tangencia del plano secante que produce la cónica con las esferas inscritas al cono que sean, a la vez, tangentes al plano (teorema de Dandelin).

Directrices. Se denomina directriz de una curva cónica a la recta de intersección del plano secante con el plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera que, siendo tangente al plano secante, está inscrita en la superficie cónica.

Ten en cuenta

- La elipse y la hipérbola tienen dos focos y dos directrices (fig. 6 y 8), mientras que la parábola solo tiene un foco y una directriz (fig. 7).

En las figuras se han representado las dos ramas de la superficie cónica, de manera que el plano α secante que produce la correspondiente curva puede verse de canto. Es fácil entender que, tanto en el caso de la elipse como en el de la hipérbola, hay dos esferas inscritas en el cono que, además, son tangentes al plano α y, sin embargo, en el caso de la parábola solo hay una esfera con estas condiciones.

En las mismas figuras se ha dibujado la representación del plano α visto de frente, es decir, visto en dirección perpendicular al plano, donde aparece la curva sección, los puntos de tangencia con las esferas y las rectas de intersección con π_1 y π_2 que contienen a las circunferencias de tangencia de las esferas con la superficie cónica.

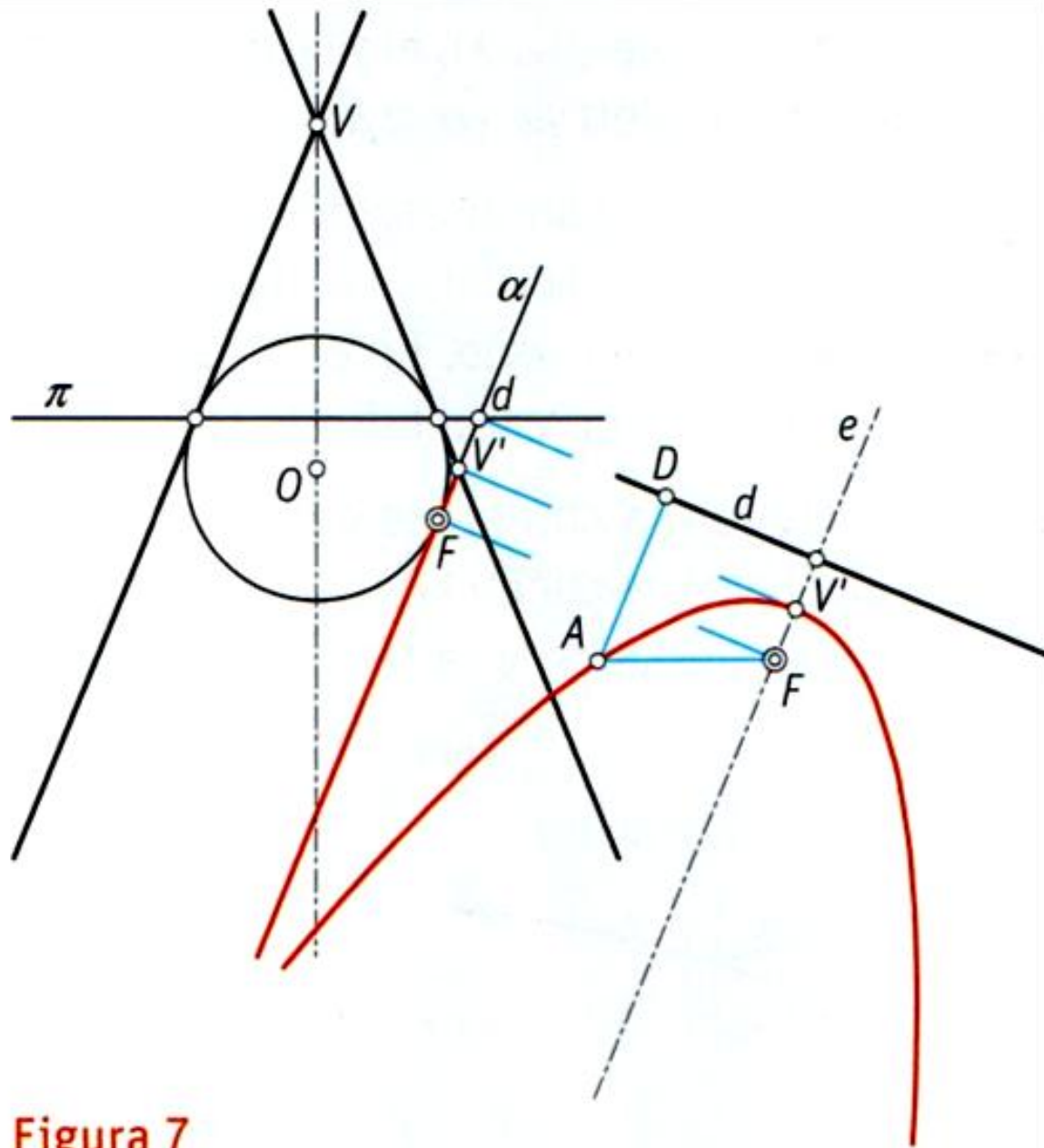


Figura 7

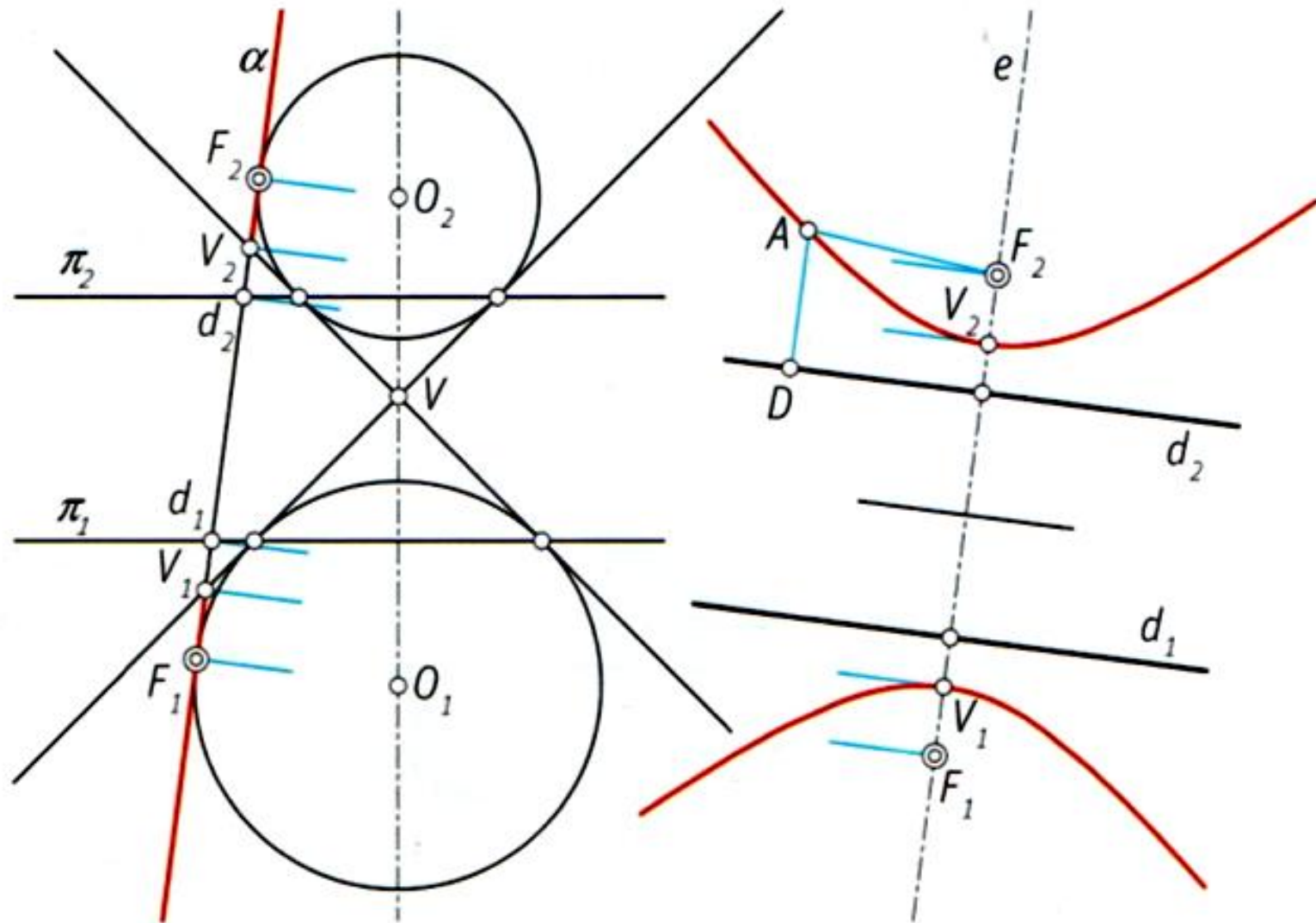
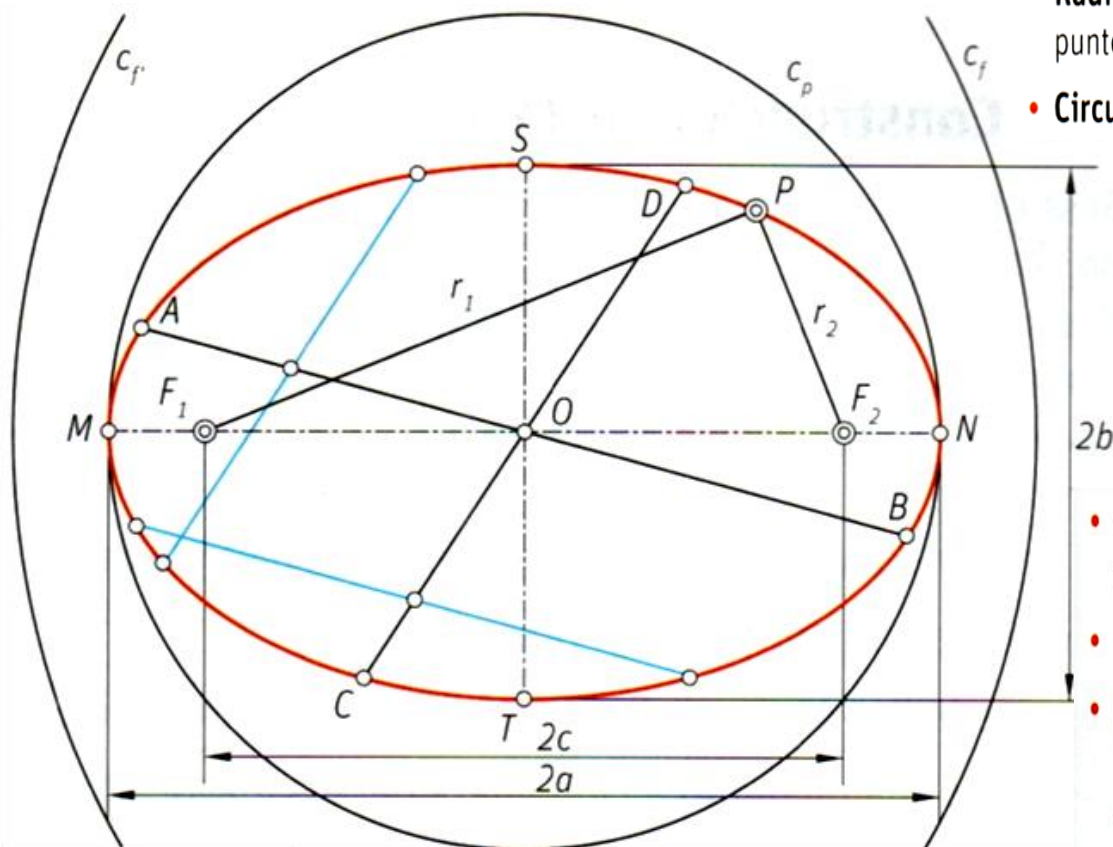


Figura 8

A ellipse

La **elipse** es una curva cerrada y plana, lugar geométrico de los puntos que cumplen que la suma de distancias a otros dos puntos fijos F_1 y F_2 , llamados focos, es constante e igual a $2a$, siendo $2a$ la longitud del eje mayor MN de la elipse

- La elipse tiene dos ejes, MN y ST , perpendiculares, que se cortan en el punto O , centro de la curva. La elipse es **simétrica** respecto a los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O .

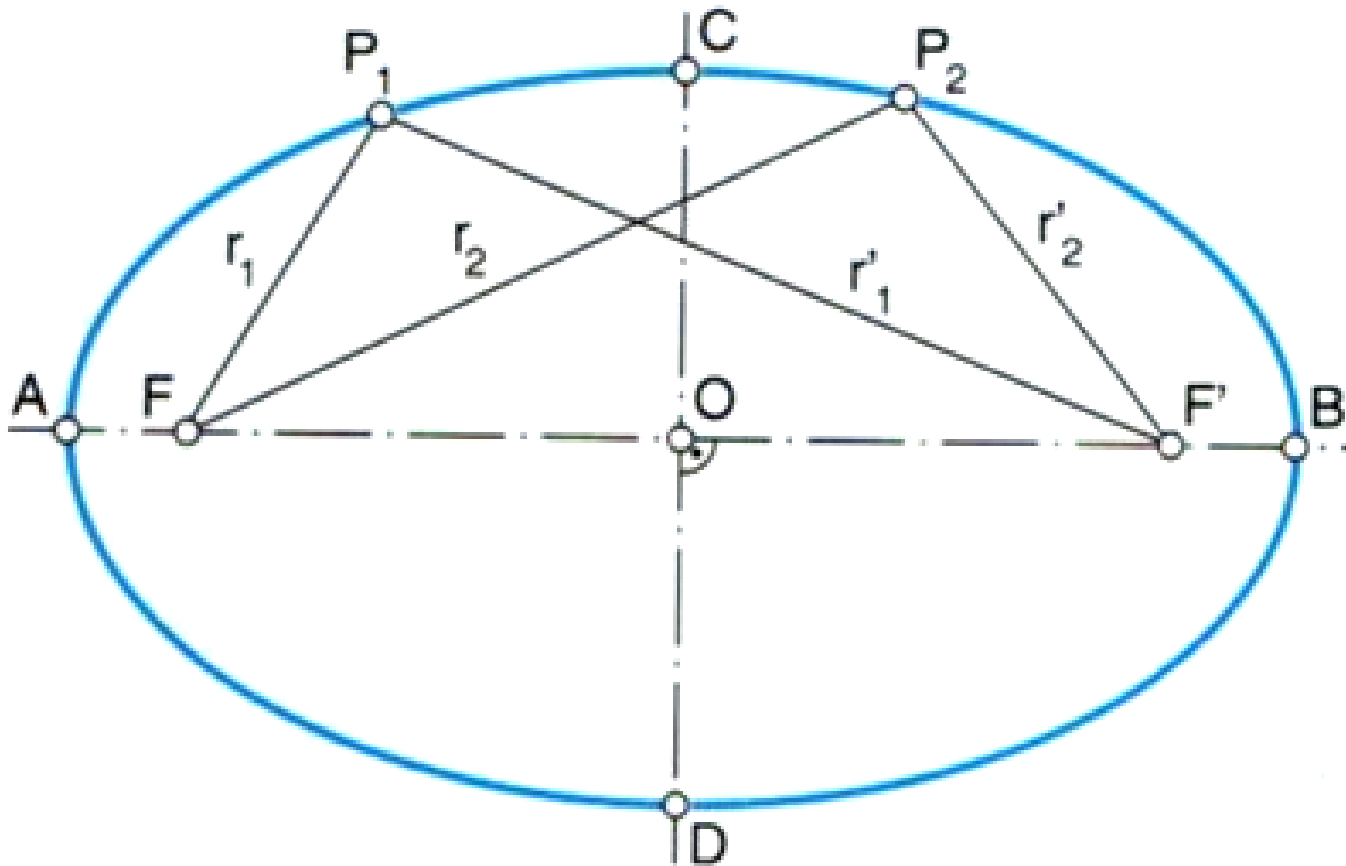


- **Ejes:** al eje mayor MN se le llama eje real y vale $2a$; el eje menor ST es el eje virtual y vale $2b$.
- **Distancia focal:** la distancia focal F_1F_2 vale $2c$. Los focos están siempre en el eje real.
- **Radios vectores** (r_1 y r_2): son las rectas PF_1 y PF_2 que unen cada punto de la elipse con los focos.
- **Circunferencia principal** (c_p): con centro el de la elipse y radio a .

- **Circunferencias focales** (c_f y c_p): tienen como centro los focos y de radio, $2a$.
- En la elipse siempre se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$.
- **Diámetros conjugados:** todo par de diámetros, como por ejemplo AB y CD , que cumplen que cualquier recta secante paralela a uno de ellos queda dividida en dos partes iguales por el otro.

Radios vectores: r_1 e r_2 ; r'_1 e r'_2

$$r_1 + r_1' = r_2 + r_2' = \dots = \overline{AB}$$

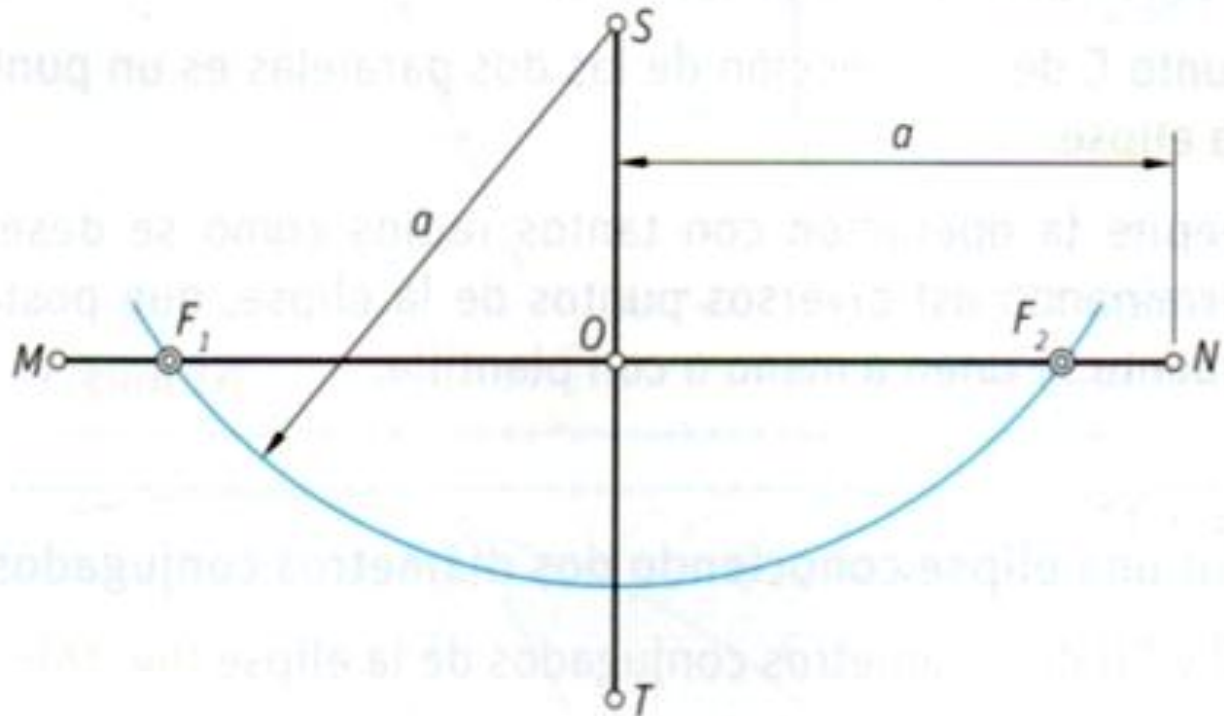


- Todo rayo que parte de un foco rebota en el otro foco.

Cómo hallar los focos conociendo los ejes

Sean MN y ST los ejes de una elipse

1. Se trazan ambos ejes perpendiculares entre sí, cortándose en su punto medio.
2. Se traza un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos S del eje menor y radio el semieje mayor ON hasta cortar al eje MN en los focos F_1 y F_2 .



Construcción da elipse

Coñecendo os eixes: método dos puntos

Sean los ejes MN y ST (fig. 14):

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 , como ya se ha explicado.
2. Se toma un punto A cualquiera del eje mayor, situado entre uno de los focos y el centro, y con radio MA y centro en F_1 se traza el arco 1 y con radio NA y centro en F_2 se traza el arco 2; estos dos arcos se cortan en el punto V de la elipse.
3. Repitiendo la misma operación con otros puntos B, C , etc., se van determinando puntos de la elipse que, posteriormente, se unen a mano o con plantilla.

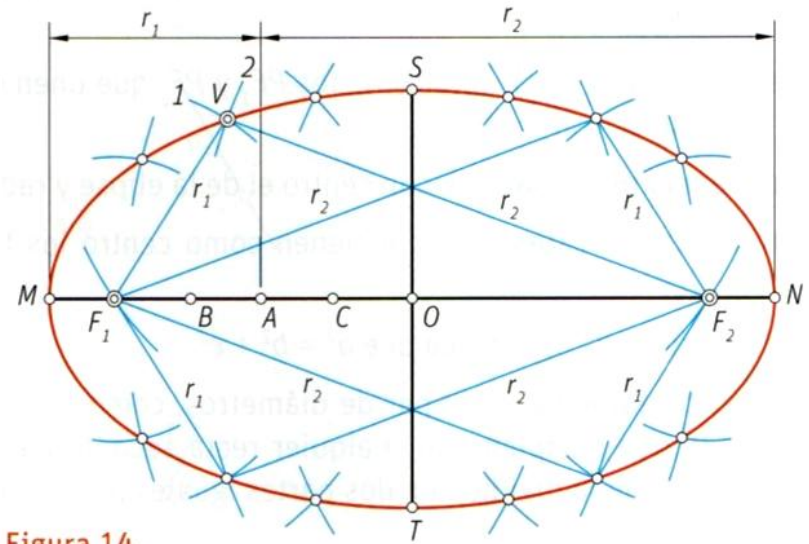


Figura 14

Coñecendo os eixes: método da afinidade

Sean los ejes MN y ST (fig. 15):

1. Se trazan dos circunferencias cuyos diámetros sean iguales al eje mayor y al eje menor, respectivamente.
2. Se traza un radio cualquiera que corte a las dos circunferencias en dos puntos A y B .
3. Por el punto A de intersección con la circunferencia menor se traza la recta paralela al eje mayor MN .
4. Por el punto B de intersección con la circunferencia mayor se traza la paralela al eje menor ST .
5. El punto C de intersección de las dos paralelas es un punto de la elipse.
6. Se repite la operación con tantos radios como se desee, determinando así diversos puntos de la elipse, que posteriormente se unen a mano o con plantilla.

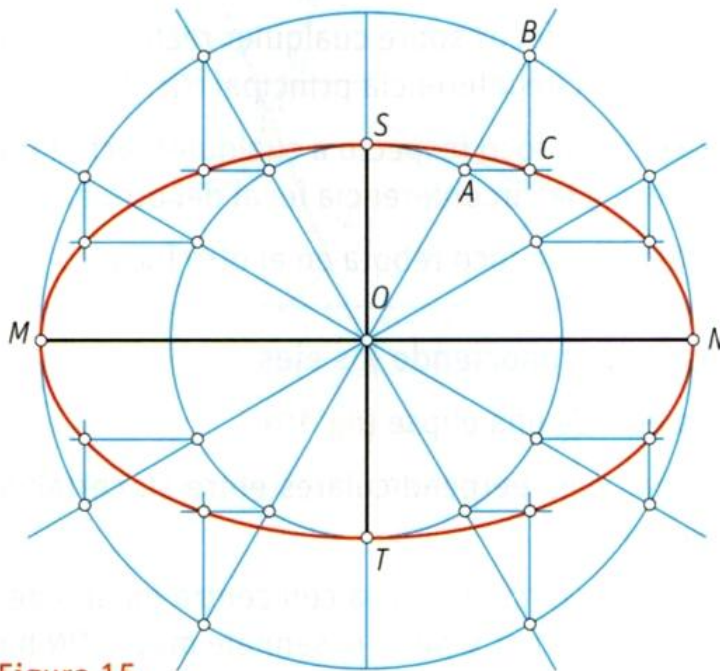
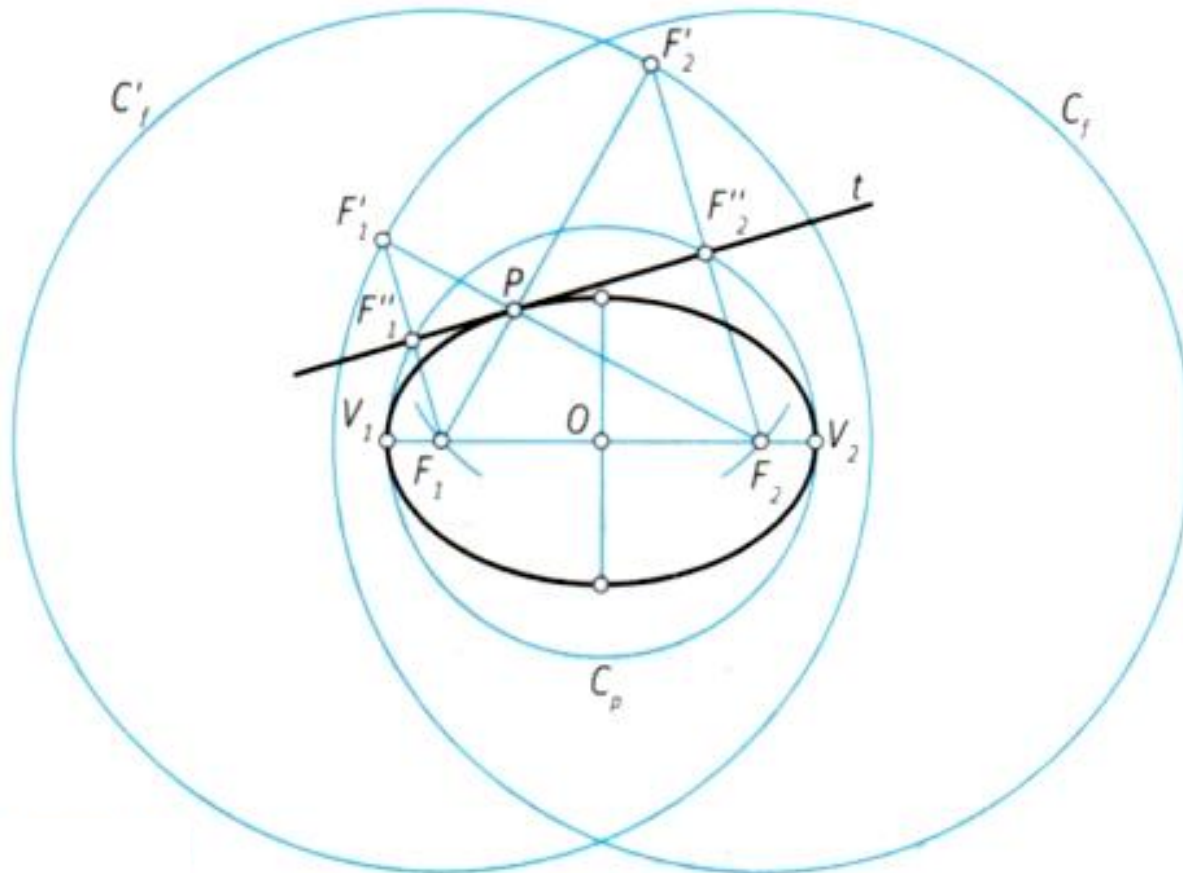


Figura 15

Rectas tanxentes á elipse

- Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la elipse pertenecen a la circunferencia principal
- El punto simétrico de un foco respecto a cualquier recta tangente a la elipse pertenece a la circunferencia focal del otro foco.
- Todo rayo que parte de un foco rebota en el otro foco.

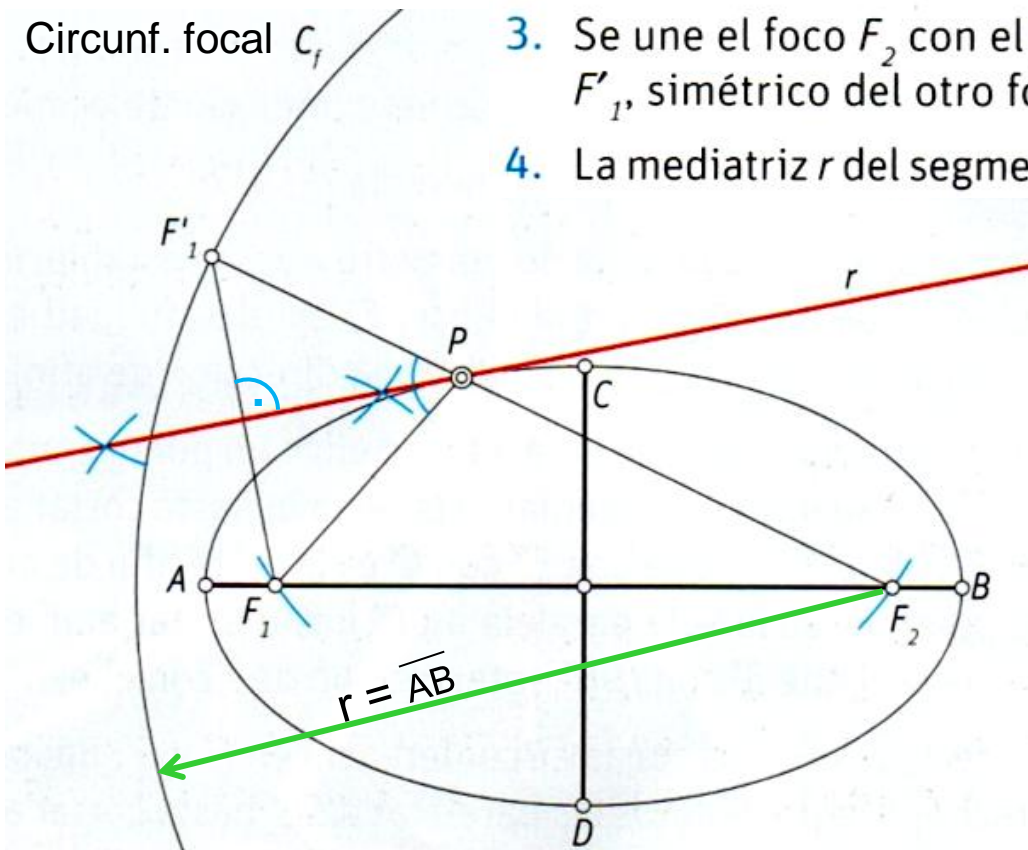


Cómo trazar a recta tanxente por un punto da elipse

Mediante a circunferencia focal.

Dada la elipse cuyos ejes son AB y CD y un punto P cualquiera de la misma

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 mediante el arco de centro C y radio $AB/2$.
2. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos, por ejemplo F_2 .
3. Se une el foco F_2 con el punto P hasta cortar a C_f en el punto F'_1 , simétrico del otro foco F_1 respecto de la tangente.
4. La mediatriz r del segmento $F_1F'_1$ es la recta tangente buscada.

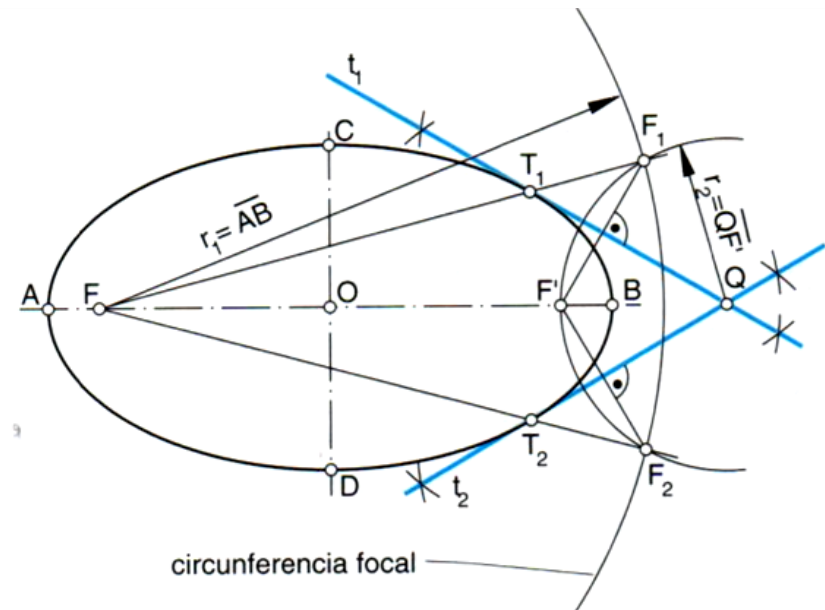
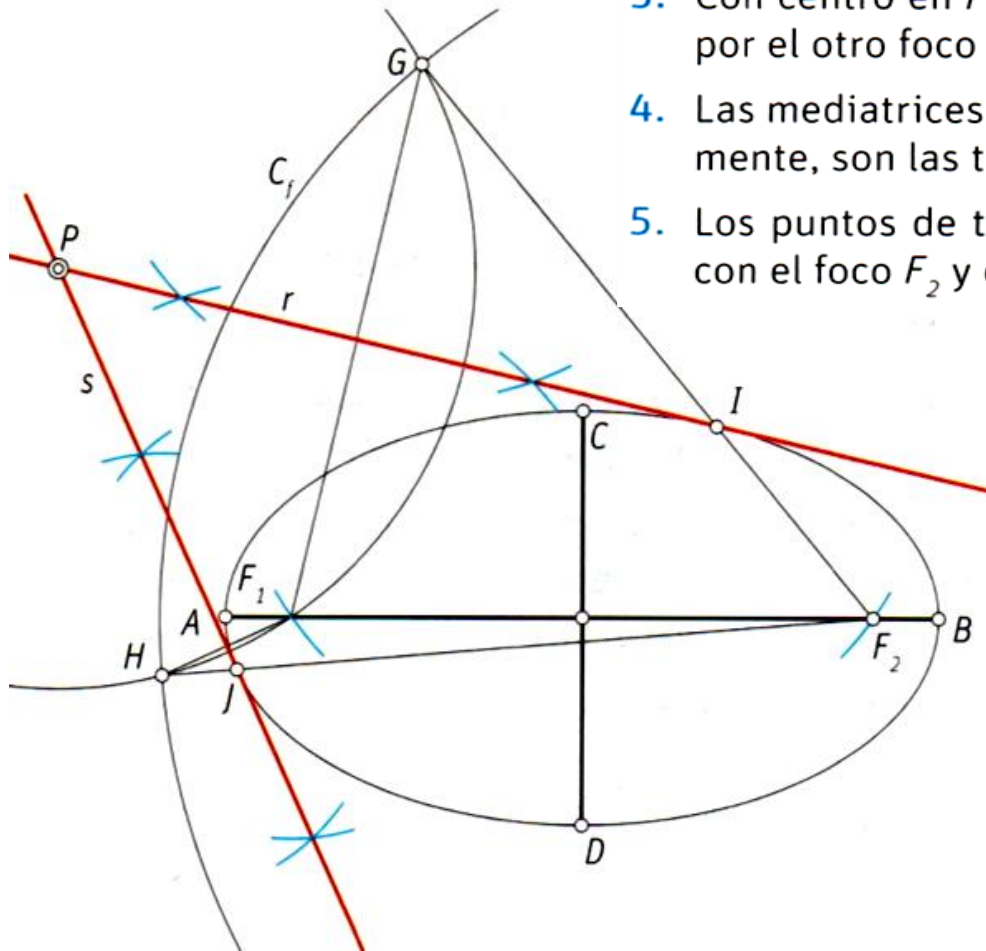


A circunferencia focal é o lugar xeométrico dos puntos do plano que son simétricos dun foco respecto a tódalas posibles rectas tanxentes á elipse.

Cómo trazar as rectas tanxentes dende un punto exterior

Dada la elipse cuyos ejes son AB y CD y un punto P exterior

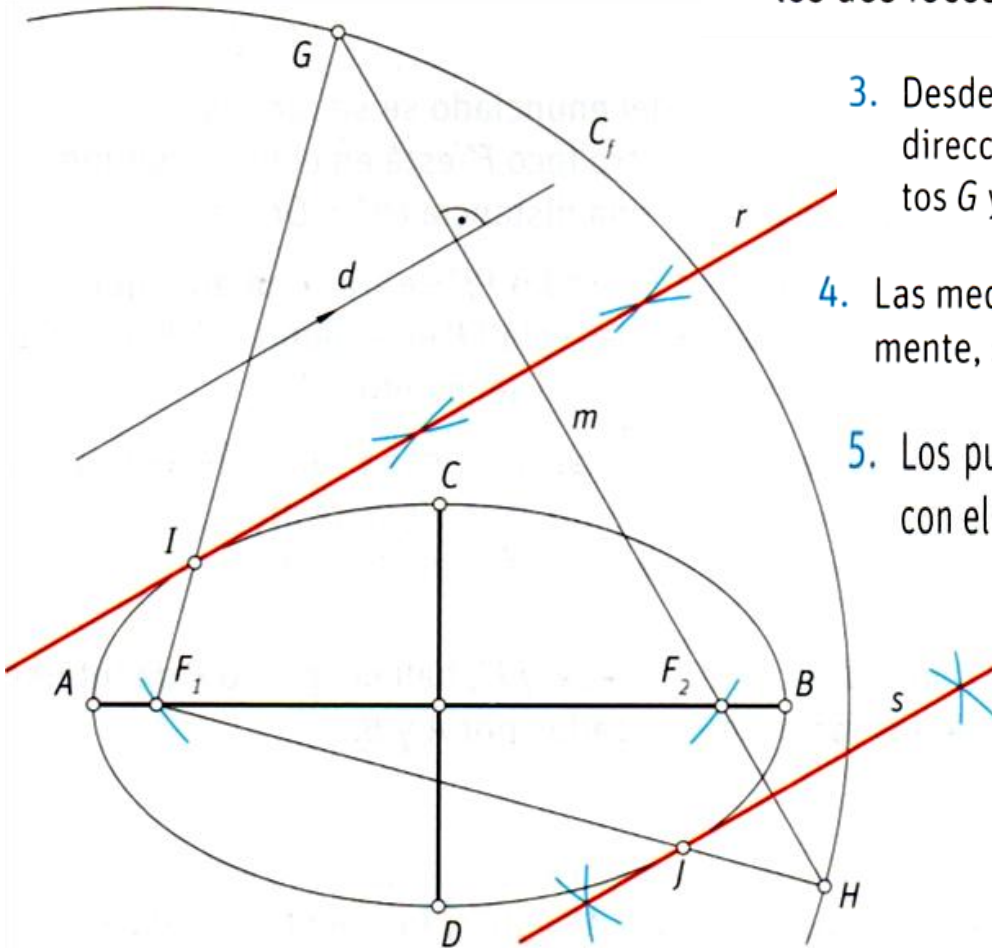
1. Se hallan los focos F_1 y F_2 mediante el arco de centro C y radio $AB/2$.
2. Se traza la circunferencia focal C_f , correspondiente a uno de los dos focos F_2 .
3. Con centro en P se traza el arco de circunferencia que pasa por el otro foco F_1 , el cual corta a C_f en los puntos G y H .
4. Las mediatrices r y s de los segmentos GF_1 y HF_1 , respectivamente, son las tangentes buscadas.
5. Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos G y H con el foco F_2 y cortar a las tangentes en los puntos I y J .



Cómo trazar as rectas tanxentes paralelas a unha dirección

Dada la elipse cuyos ejes son AB y CD y una dirección d

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 mediante el arco de centro C y radio $AB/2$.
2. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos F_1 .



3. Desde el otro foco F_2 se traza la recta m , perpendicular a la dirección d , que corta a la circunferencia focal C_f en los puntos G y H .
4. Las mediatrices r y s de los segmentos GF_2 y HF_2 , respectivamente, son las tangentes buscadas.
5. Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos G y H con el foco F_1 y cortar a las tangentes en los puntos I y J .

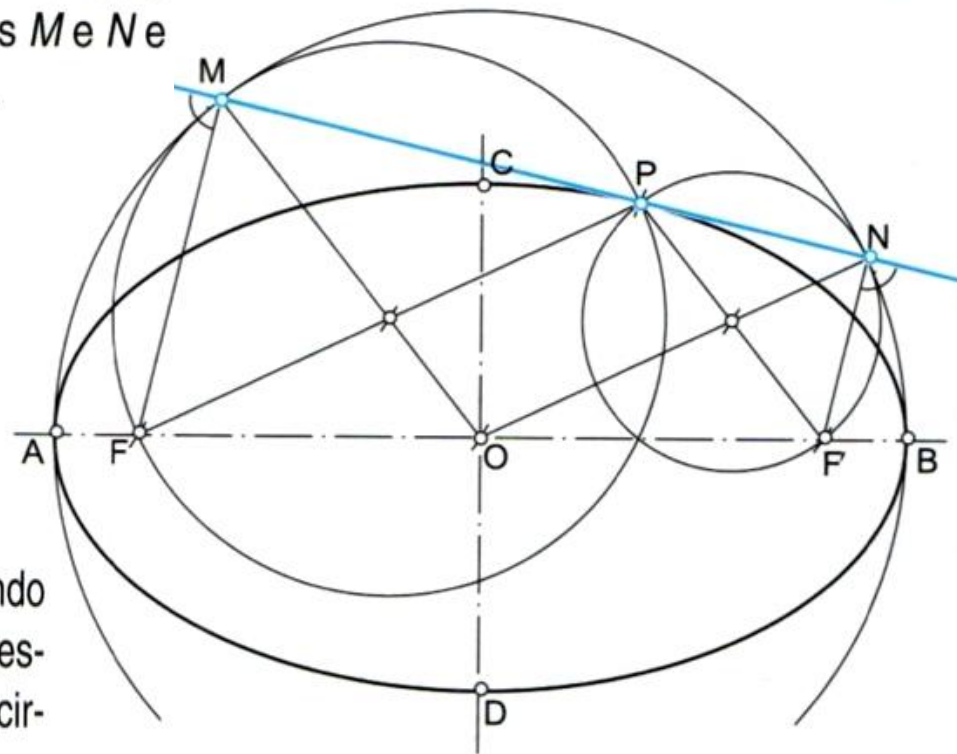
Trazado da recta tanxente por un punto P da elipse

Mediante a circunferencia principal.

Despois de construír a elipse e de situar o punto da elipse P polo que queremos trazar a tanxente, con centro en O e

raio $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, trazamos a circunferencia principal.

Unimos o punto P cos dous focos F e F' , e trazamos as circunferencias de diámetros \overline{FP} e $\overline{F'P}$, que son tanxentes á circunferencia principal nos puntos M e N . Unimos M e N e obtemos a recta tanxente que pasa polo punto P .



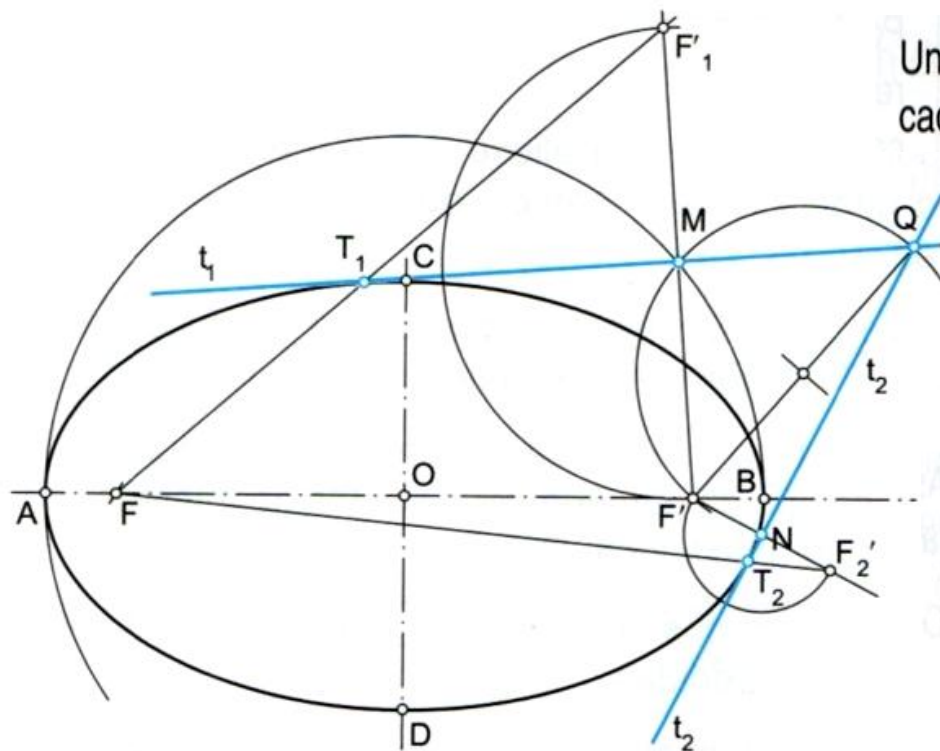
Fíxate en que unha recta é tanxente a unha elipse cando os pés M e N , das perpendiculares \overline{FM} e $\overline{F'N}$ trazadas desde os focos á tanxente t da elipse, están situados na circunferencia principal da elipse.

Trazado das rectas tanxentes a unha elipse desde un punto exterior dado, Q

Despois de construír a elipse e de situar o punto exterior Q desde o que queremos trazar as rectas tanxentes t_1 e t_2 ,

con centro en O e raio $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, trázase a circunferencia principal.

Unimos o punto Q co foco F' , e trazamos a circunferencia de diámetro $\overline{F'Q}$ que intercepta a circunferencia principal en dous puntos M e N que pertencen ás tanxentes.



Unimos M e N con Q e obtemos as rectas tanxentes buscadas t_1 e t_2 .

Os puntos de tanxencia T_1 e T_2 son, respectivamente, as interseccións dos segmentos $\overline{FF'_1}$ e $\overline{FF'_2}$ coas tanxentes t_1 e t_2 . Sendo F'_1 e F'_2 os simétricos do foco F respecto a esas tanxentes.

Trazado das rectas tanxentes a unha elipse paralelas á dirección dunha recta dada, r

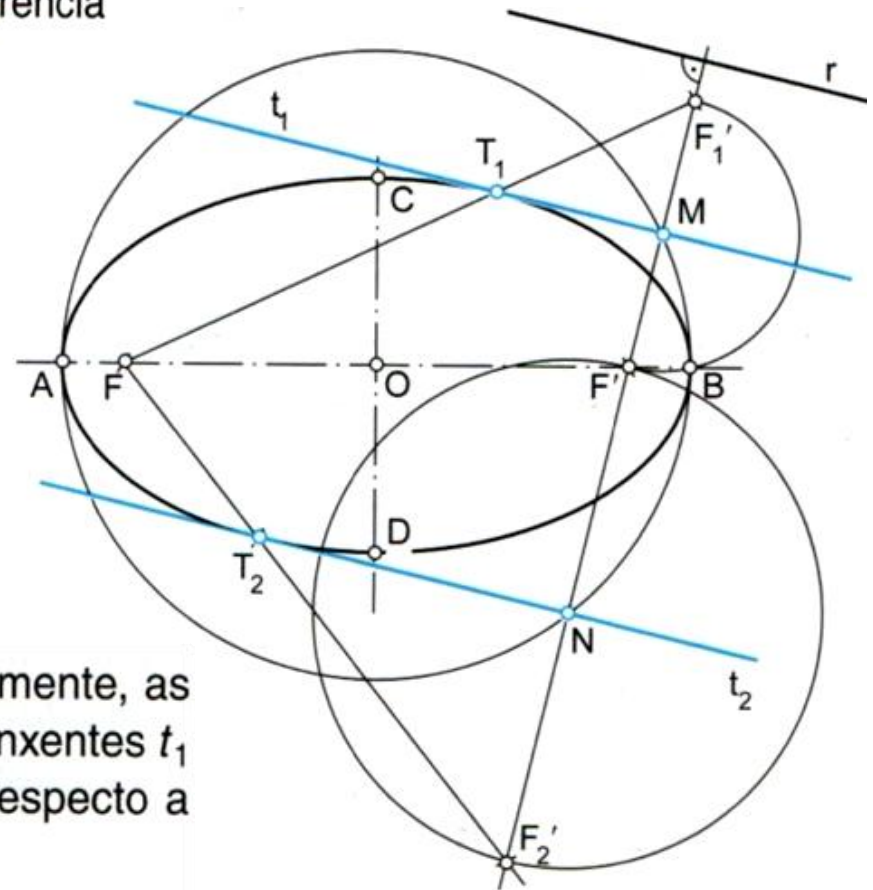
Tras construír a elipse, trázase a recta r dada como dirección de referencia para o trazado das tanxentes.

Con centro en O e raio $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, trázase a circunferencia principal.

Trazamos polo foco F' unha perpendicular á recta r que intercepta a circunferencia principal en dous puntos M e N que pertencen ás tanxentes.

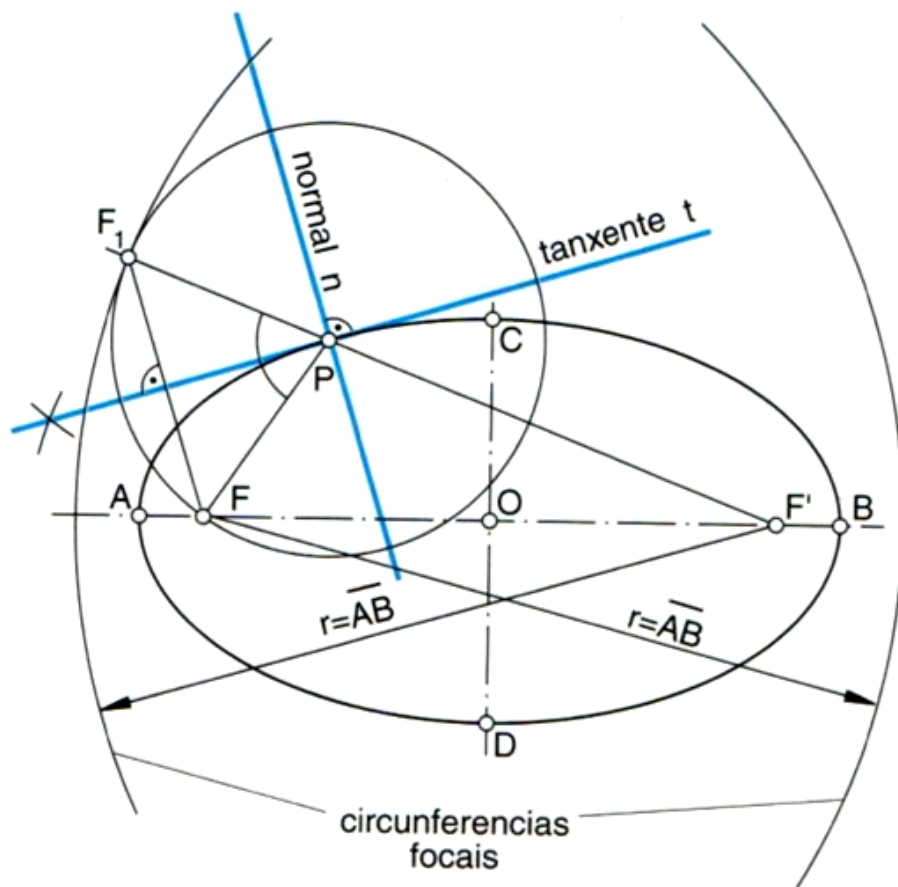
As rectas tanxentes buscadas t_1 e t_2 pasan polos puntos M e N e son paralelas á recta dada r .

Os puntos de tanxencia T_1 e T_2 son, respectivamente, as interseccións dos segmentos FF'_1 e FF'_2 coas tanxentes t_1 e t_2 . Sendo F'_1 e F'_2 os simétricos do foco F' respecto a esas tanxentes.



Trazado da recta tanxente e da recta normal por un punto P da elipse

Despois de construír a elipse e de situar o punto da elipse P polo que queremos trazar a tanxente, debuxamos a circunferencia focal de F' . Por F' e P trázase unha recta ata cortar a circunferencia focal en F_1 .



A **recta tanxente**, t , á elipse por un punto P desta é a bisectriz do ángulo formado polos segmentos \overline{PF} e $\overline{PF_1}$.

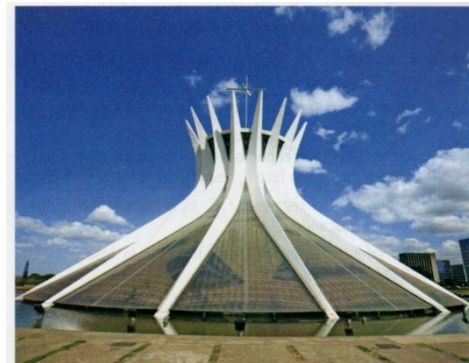
Fíxate en que unha recta é tanxente a unha elipse cando o punto simétrico dun dos focos respecto a esa recta está situado na circunferencia focal correspondente ó outro foco.

Observa na figura que F_1 é simétrico de F respecto á recta t , e, posto que se atopa na circunferencia focal correspondente a F' , a recta t é tanxente á elipse.

A **recta normal**, n , á elipse polo punto P é a perpendicular á recta tanxente t por este punto.

A hipérbole

Catedral de Brasília do arquitecto Oscar Niemeyer (estrutura de hipérbole).



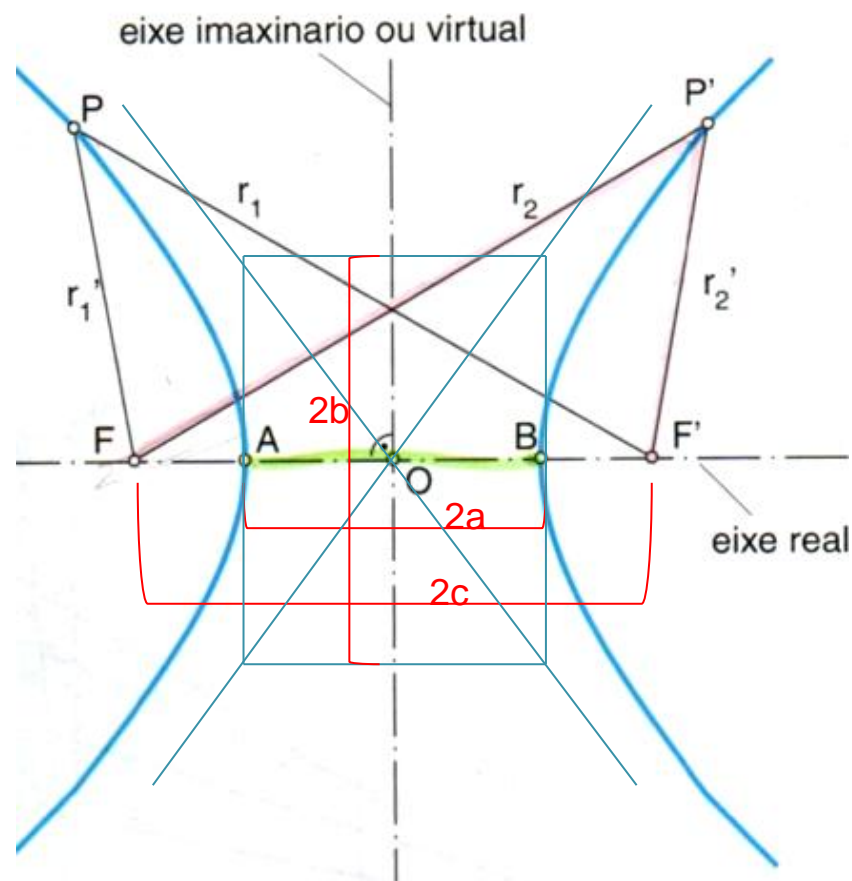
A **hipérbole** é unha **curva aberta e plana**, con dúas ramas, cuns puntos que constitúen un lugar xeométrico coa propiedade de que a **diferencia das distancias de cada un dos seus puntos a outros dous fixos chamados focos, F e F'** , é constante e igual ó seu eixe real \overline{AB} .

Así pois, os puntos da hipérbole cumpren:

$$r_1 - r_1' = r_2 - r_2' = \dots = \overline{AB}$$

A hipérbole ten dous eixes de simetría, un **real** e outro **imaxinario**, perpendiculares entre si e que se cortan no punto medio O , **centro da hipérbole**.

O eixe vertical é *imaxinario* porque non ten puntos en común coa curva; mentres que o *real* si corta a hipérbole.



- Simetría: la hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O .
- **Ejes:** el eje mayor V_1V_2 se llama eje real y vale $2a$. El eje menor, perpendicular al anterior en su punto medio O , es el eje virtual.
- **Distancia focal:** la distancia focal F_1F_2 vale $2c$. Los focos están siempre en el eje real.
- **Eje conjugado:** segmento perpendicular al eje transversal que pasa por el centro cuya longitud es $2b$. Determinado por el rectángulo que se forma entre las asíntotas y el eje real.
- **Radios vectores** (r_1 y r_2): son las rectas PF_1 y PF_2 que unen un punto de la curva con los dos focos, tal que $PF_1 - PF_2 = 2a$.
- **Circunferencia principal** (c_p): es la que tiene por centro el centro O de la hipérbola y diámetro $2a$.
- **Circunferencias focales** (c_f y c_p): tienen como centros los focos y radio $2a$.
- En la hipérbola siempre se verifica que: $c^2 = a^2 + b^2$.

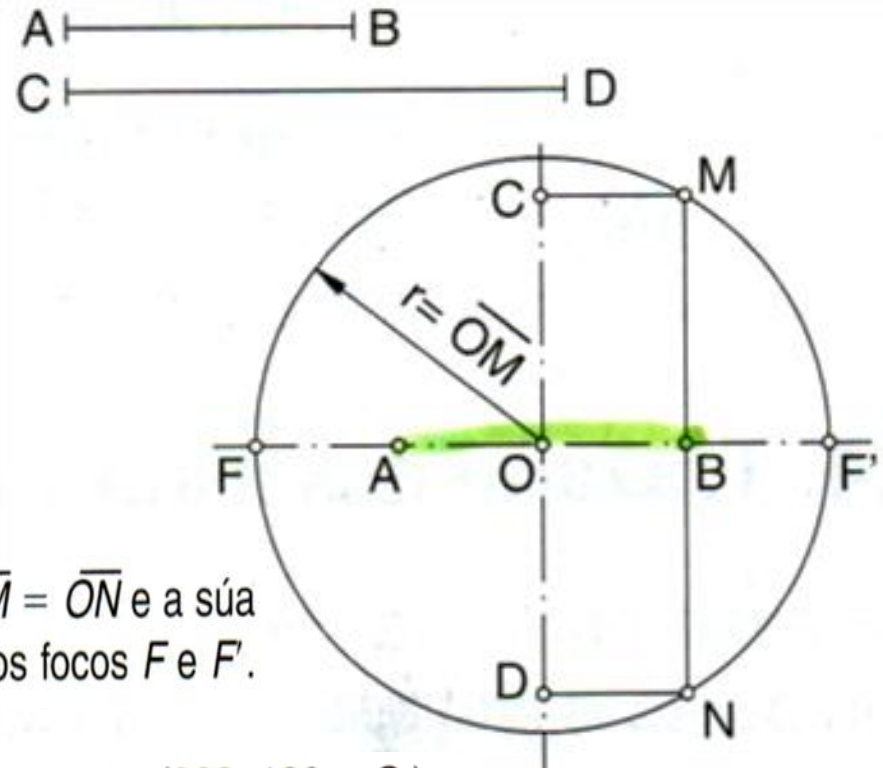
Construción da hipérbole

Determinación dos focos dunha hipérbole dados os dous eixes \overline{AB} e \overline{CD}

Trázanse os dous eixes de simetría dados.

Por B trázase unha recta paralela ó eixe imaxinario. Polos puntos C e D trázase unha recta paralela ó eixe real. As interseccións da recta que pasa por B coa recta que pasa por C e por D , respectivamente, determinan os puntos M e N .

Trázase unha circunferencia de centro O e raio $r = \overline{OM} = \overline{ON}$ e a súa intersección coa prolongación do eixe real determina os focos F e F' .



Apolonio de Perga

Matemático grego (262–190 a. C.)

A súa obra *Cónicas* consta de oito libros nos que recompilou sistematicamente, desde o seu revolucionario punto de vista, os coñecementos que xa existían na época sobre seccións cónicas.

Ademais, engadiu os resultados das súas investigacións, con nocións tan profundas sobre a xeometría das cónicas, que non se viron superados ata o século XVII.

Trazado dunha hipérbole por puntos, dados os eixes e os focos F e F'

Trázanse os eixes de simetría e os focos F e F' dados.

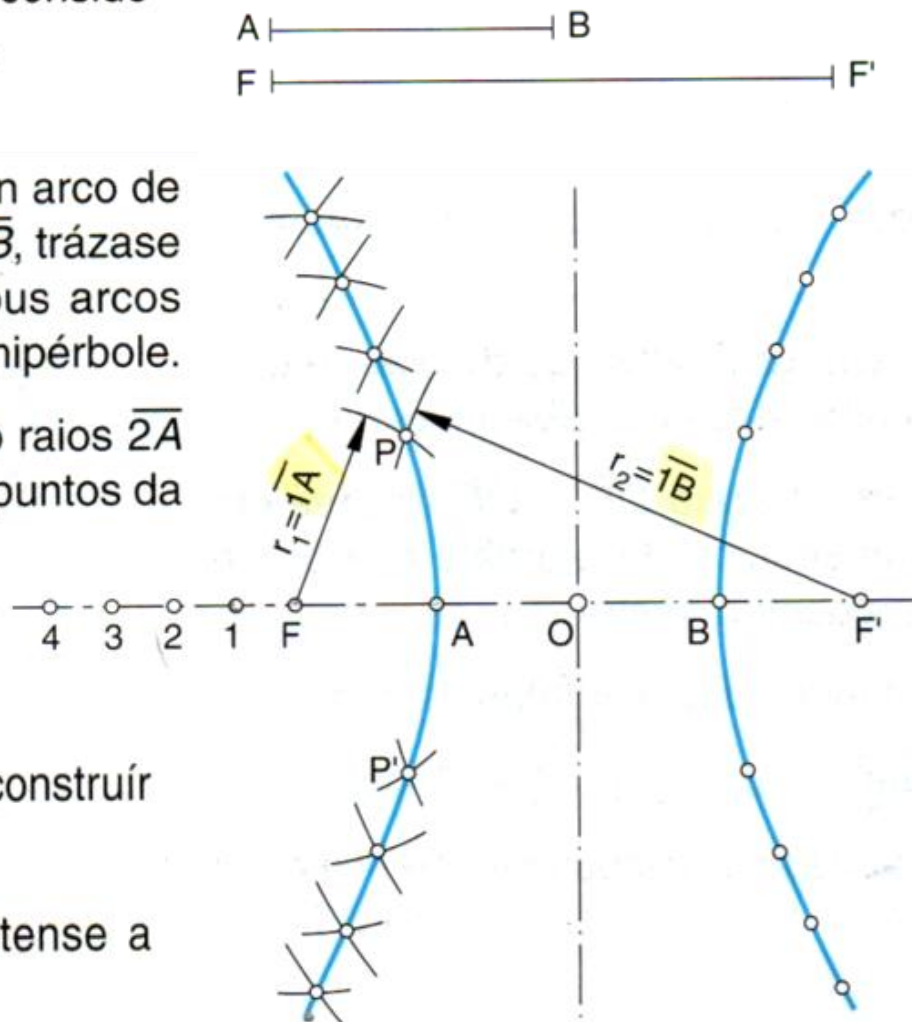
Desde cada un dos focos e sobre o eixe real considérase unha serie de puntos arbitrarios: 1, 2, 3...

Con centro en F e raio $r_1 = \overline{1A}$, descríbese un arco de circunferencia. Con centro en F' e raio $r_2 = \overline{1B}$, trázase outro arco. A intersección de ambos os dous arcos determina os puntos P e P' dunha rama da hipérbole.

Repítase a mesma operación tomando como raios $\overline{2A}$ e $\overline{2B}$, $\overline{3A}$ e $\overline{3B}$... e obtemos así unha serie de puntos da hipérbole.

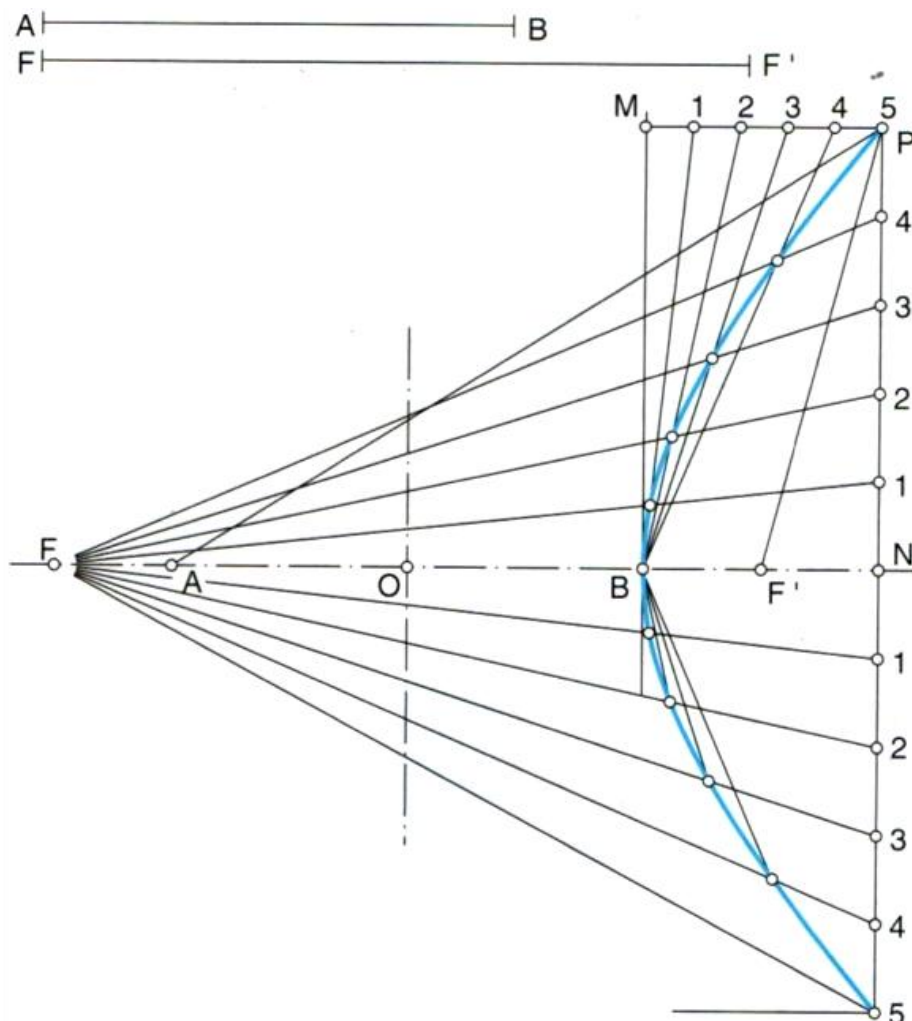
Repítase analogamente todo o proceso para construír a outra rama da hipérbole.

Unindo os puntos cun patrón de curvas obtense a hipérbole.



Trazado dunha hipérbole por intersección de rectas dados os eixes e os focos F e F'

Este método enlaza co anterior, xa que cómpre calcular previamente un punto da curva.



— Trázanse os eixes de simetría dados e sitúanse os focos F e F' .

— Determínase un punto P dunha das ramas da curva pola técnica descrita no subapartado anterior.

Polo punto P trázase unha liña paralela ó eixe real e outra ó eixe imaxinario; polo punto B trázase unha liña paralela ó eixe imaxinario. Queda definido o rectángulo $BNPM$.

Divídense os segmentos \overline{PN} e \overline{PM} no mesmo número de partes iguais, no exemplo consideramos 5.

— Desde o foco F proxéctase unha serie de liñas que pase polos puntos de división do segmento \overline{PN} . Procédese igual desde B sobre o segmento \overline{PM} .

A intersección das rectas que pasan polos puntos homólogos define os puntos da curva.

Analogamente, constrúese a outra rama da hipérbole, posto que é simétrica respecto ó eixe imaxinario.

Trazado das asíntotas dunha hipérbole

Un caso particular de tanxencia son as rectas tanxentes á hipérbole nun punto a situado no infinito.

Estas rectas tanxentes chámanse **asíntotas** da hipérbole.

Dada a súa simetría, unha hipérbole ten dúas asíntotas e catro puntos de tanxencia no infinito.

As asíntotas sempre pasan polo centro O da hipérbole.

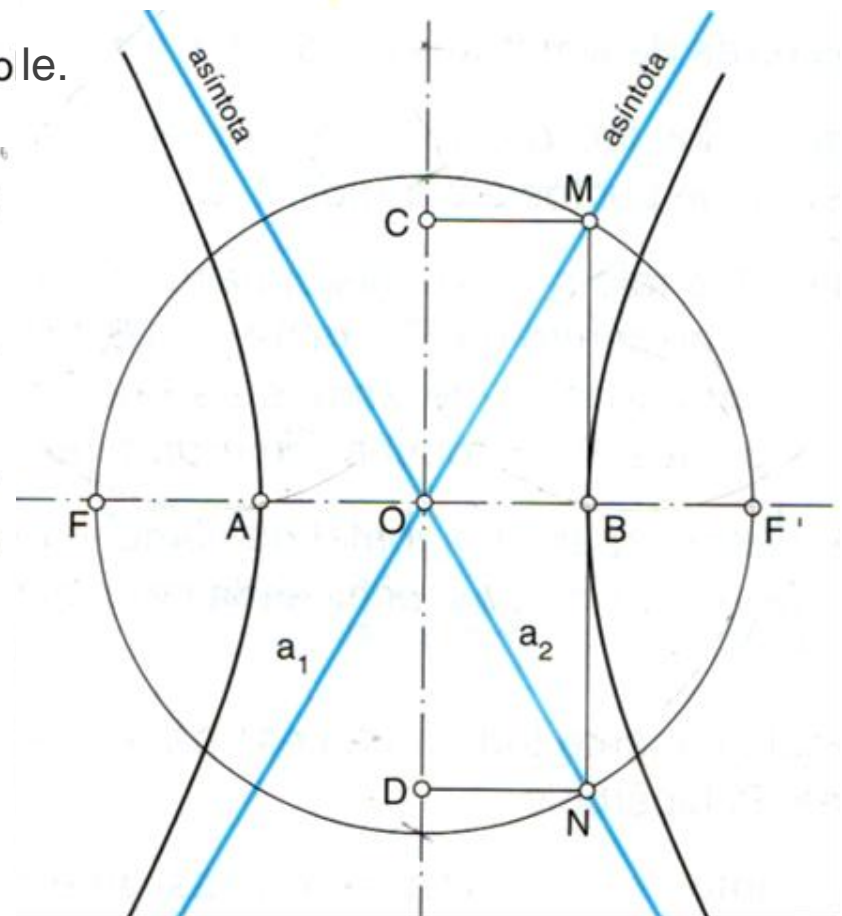
Constrúese a hipérbole cunha das técnicas descritas anteriormente.

Por un calquera dos extremos do eixe real, por exemplo, B , trázase unha paralela ó eixe imaxinario.

Con centro en O e raio $\overline{OF} = \overline{OF'}$ trázase unha circunferencia. A intersección da paralela e esta circunferencia determina os puntos M e N .

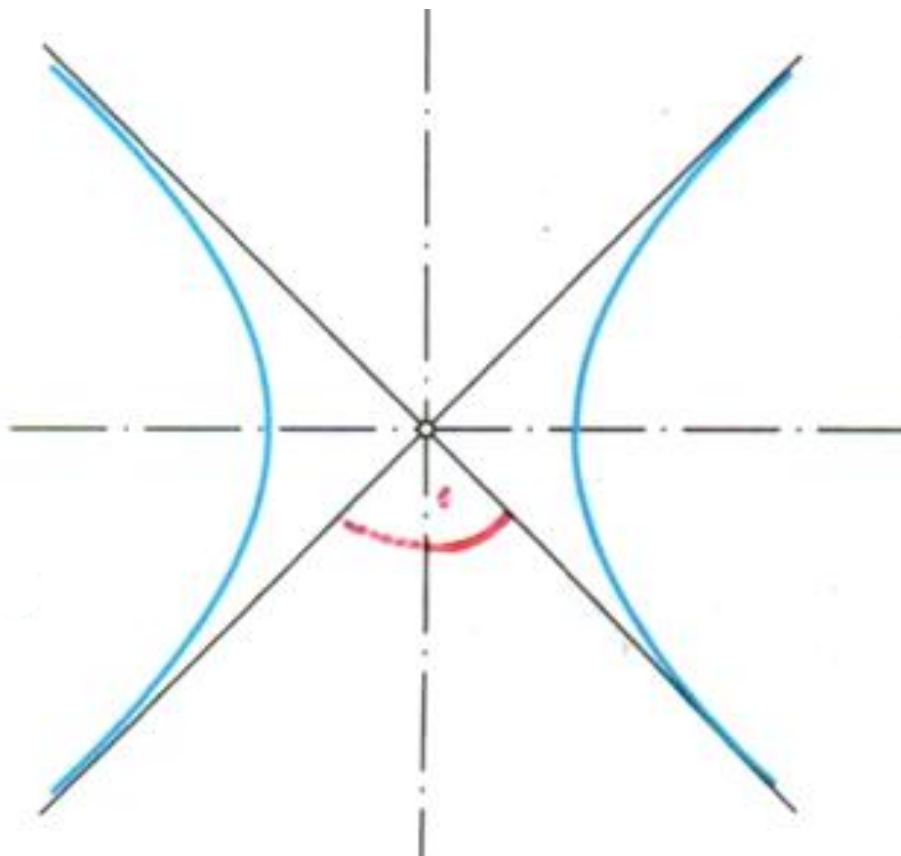
Polas propiedades das asíntotas, temos que:

- A recta que pasa polos puntos O e M é a asíntota a_1 .
- A recta que pasa polos puntos O e N é a asíntota a_2 .



Trazado dunha hipérbole equilátera dados un punto P da curva, as asíntotas e a distancia de P ás asíntotas

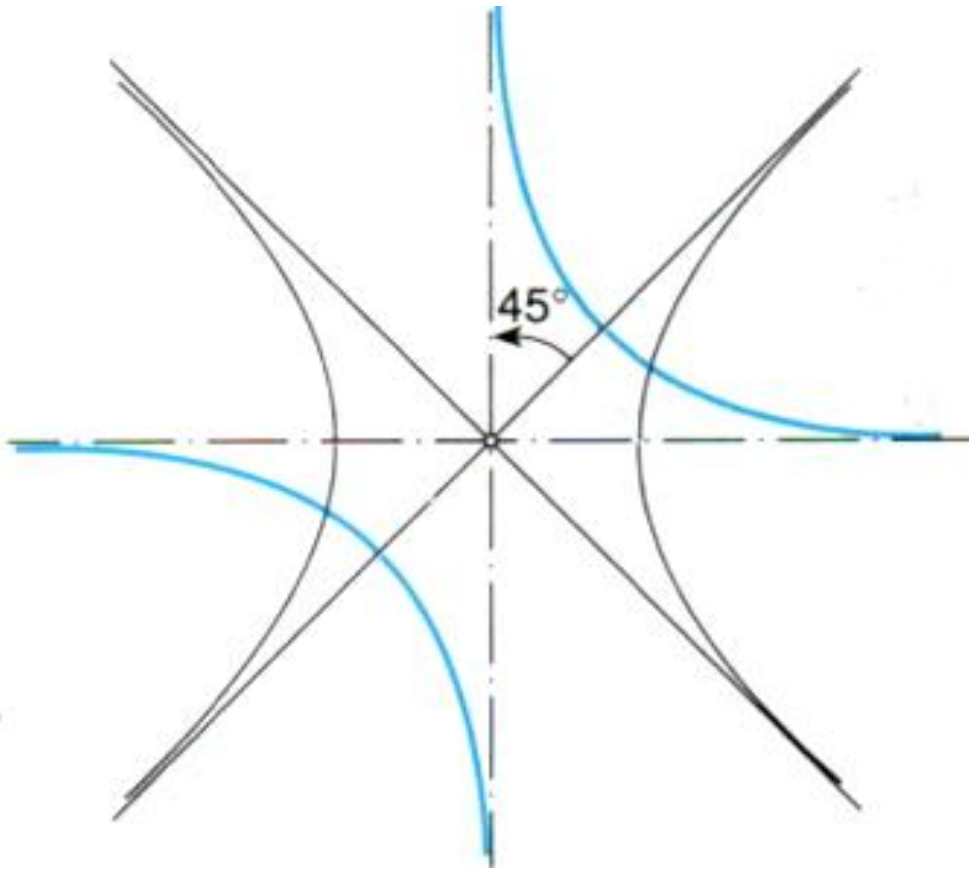
Observa a hipérbole representada na figura seguinte.



Se a lonxitude do eixe real dunha hipérbole coincide coa do seu eixe imaxinario, dise que a hipérbole é **equilátera**.

Fíxate en que as **asíntotas** dunha hipérbole equilátera son **perpendiculares entre si**. Logo pódense tomar como sistema de referencia, é dicir, como uns eixes de coordenadas.

Agora observa atentamente a figura seguinte.



Fíxate en que se xiramos 45° a hipérbole da figura anterior, as súas asíntotas convértense nuns novos eixes de coordenadas.

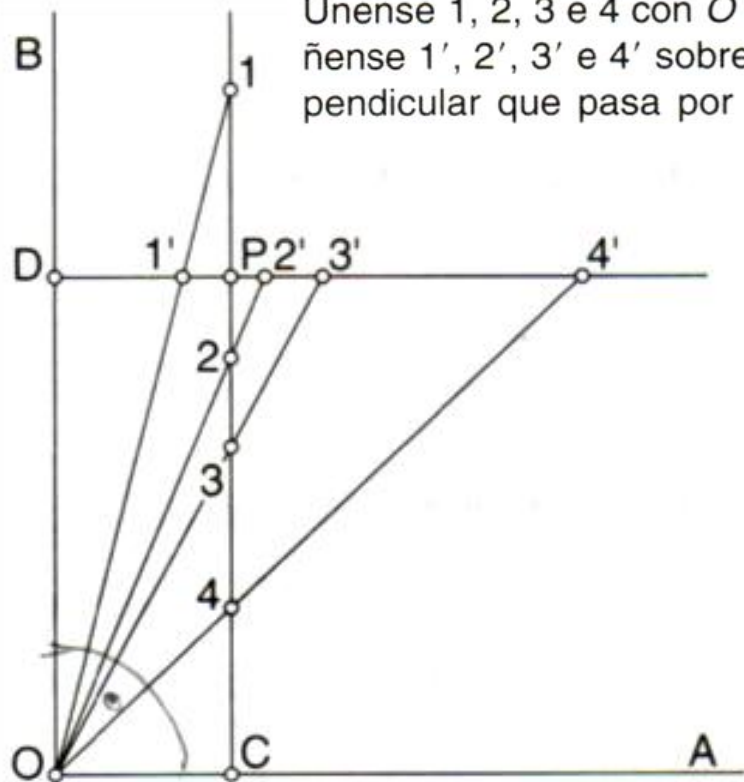
Este movemento resulta moi interesante en xeometría analítica porque nos permite obter a ecuación dunha hipérbole equilátera referida ás súas asíntotas.

De seguida veremos cómo construír unha hipérbola equilátera a partir dos datos proporcionados no enunciado.

1. Trázanse as asíntotas OA e OB . Sitúase o punto P e fanse pasar por este, paralelas ás asíntotas determinando os puntos C e D .

Sobre a perpendicular que pasa por P e C sitúanse diversos puntos, por exemplo, 1, 2, 3 e 4.

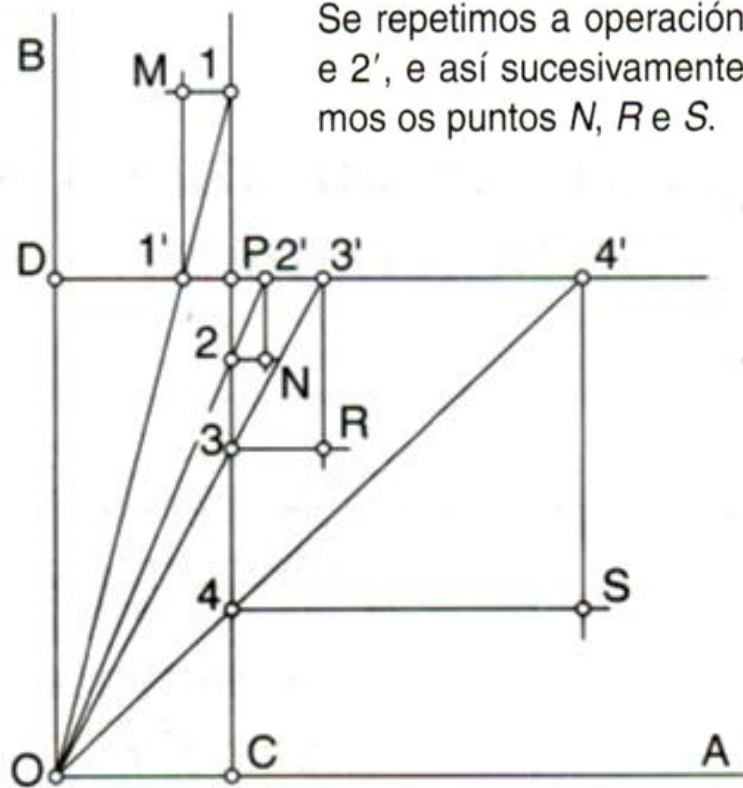
Únense 1, 2, 3 e 4 con O e obtéñense $1'$, $2'$, $3'$ e $4'$ sobre a perpendicular que pasa por P e D .

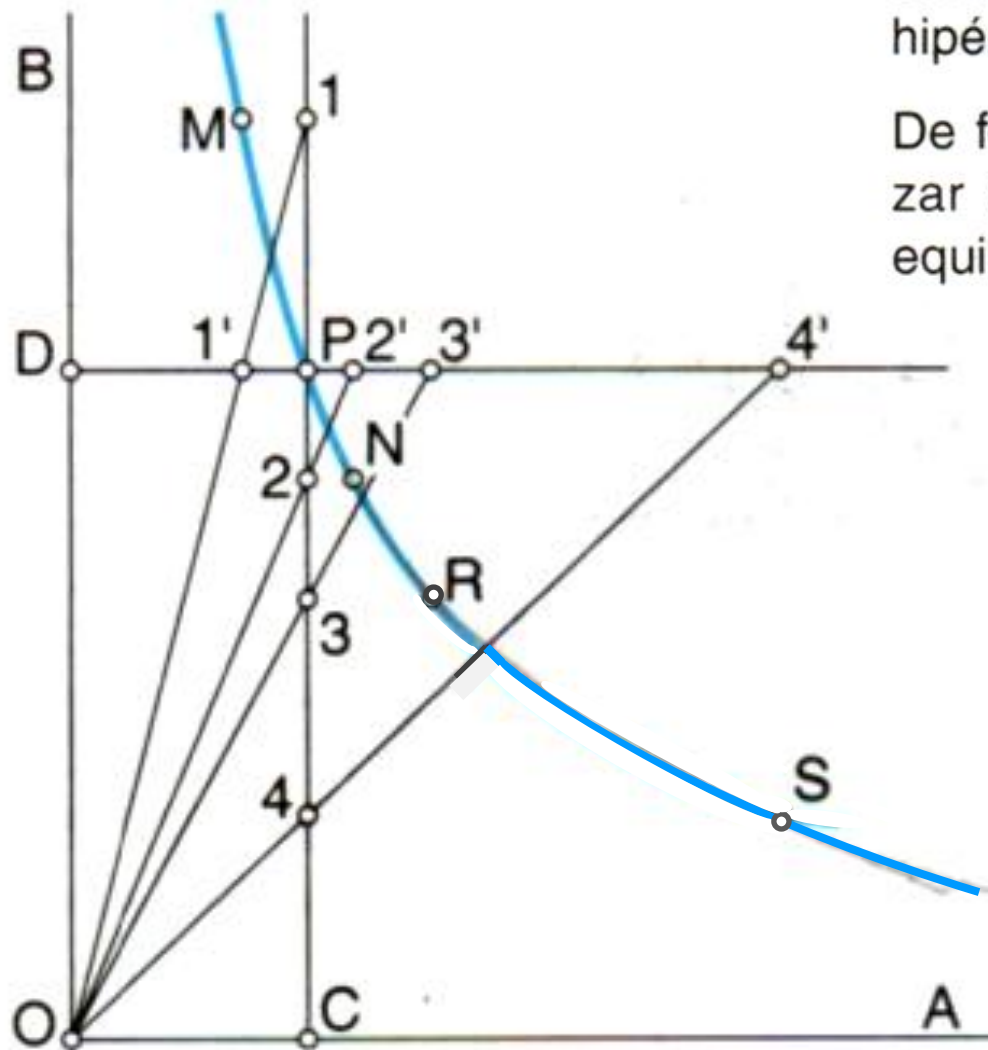


2. Por $1'$, $2'$, $3'$ e $4'$ trázanse paralelas a \overline{PC} e por 1, 2, 3 e 4 trázanse outras paralelas a \overline{PD} .

A intersección da paralela que pasa por $1'$ coa paralela que pasa por 1 determina o punto M .

Se repetimos a operación con 2 e $2'$, e así sucesivamente, obtemos os puntos N , R e S .





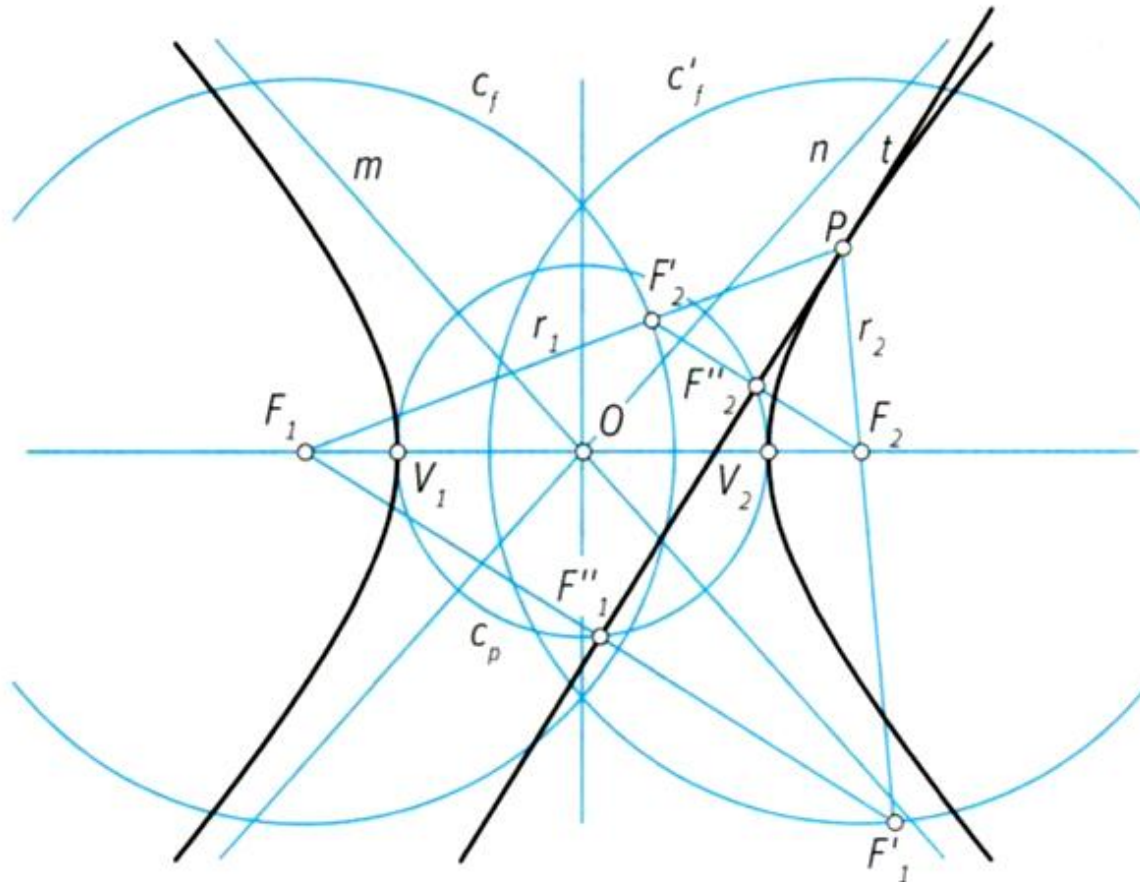
3. Unimos os pontos cun patrón de curvas e obtemos unha rama da hipérbole equilátera.

De forma análoga podemos trazar a outra rama da hipérbole equilátera.

Rectas tanxentes á hipérbola

- Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia principal (fig. 25).
- El punto simétrico de un foco respecto de cualquier tangente a la hipérbola pertenece a la circunferencia focal, cuyo centro es el otro foco.

- Las asíntotas de la hipérbola, m y n , son las rectas tangentes a la curva en los puntos del infinito. Son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro.
- Se llama *hipérbola equilátera* a la hipérbola cuyas asíntotas forman 45° con los ejes.
- Todo rayo que parte de un foco rebota, de manera que su prolongación pasa por el otro foco.

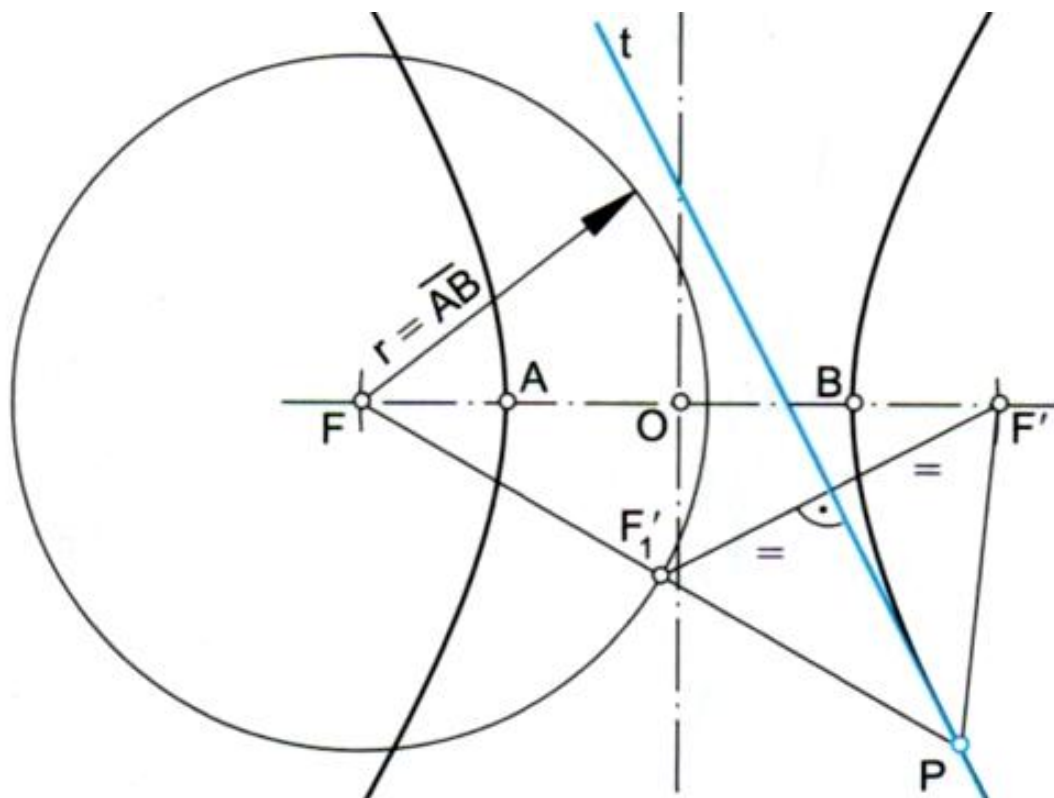


Mediante a circunferencia focal.

. Trazado de rectas tanxentes a unha hipérbole mediante a circunferencia focal

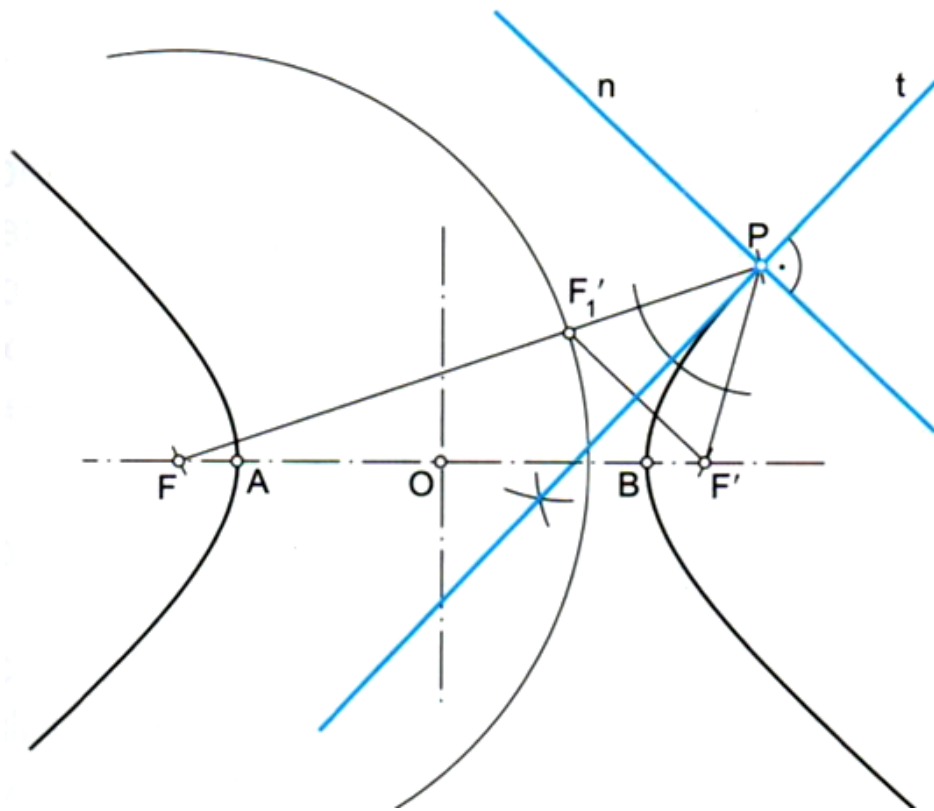
As circunferencias focais dunha hipérbole teñen por centro un dos focos, F ou F' e por raio a lonxitude do eixe real \overline{AB} . Así pois, unha hipérbole ten dúas circunferencias focais.

A circunferencia focal da hipérbole é o lugar xeométrico que ocupan os puntos simétricos dun foco respecto das tanxentes da súa rama correspondente.



Trazado da recta tanxente e da recta normal por un punto P da hipérbole

Despois de construír a hipérbole e de situar o punto da hipérbole P polo que queremos trazar a tanxente t , debuxamos a circunferencia focal de F . Por F e P trázase unha recta que corta a circunferencia focal en F'_1 .



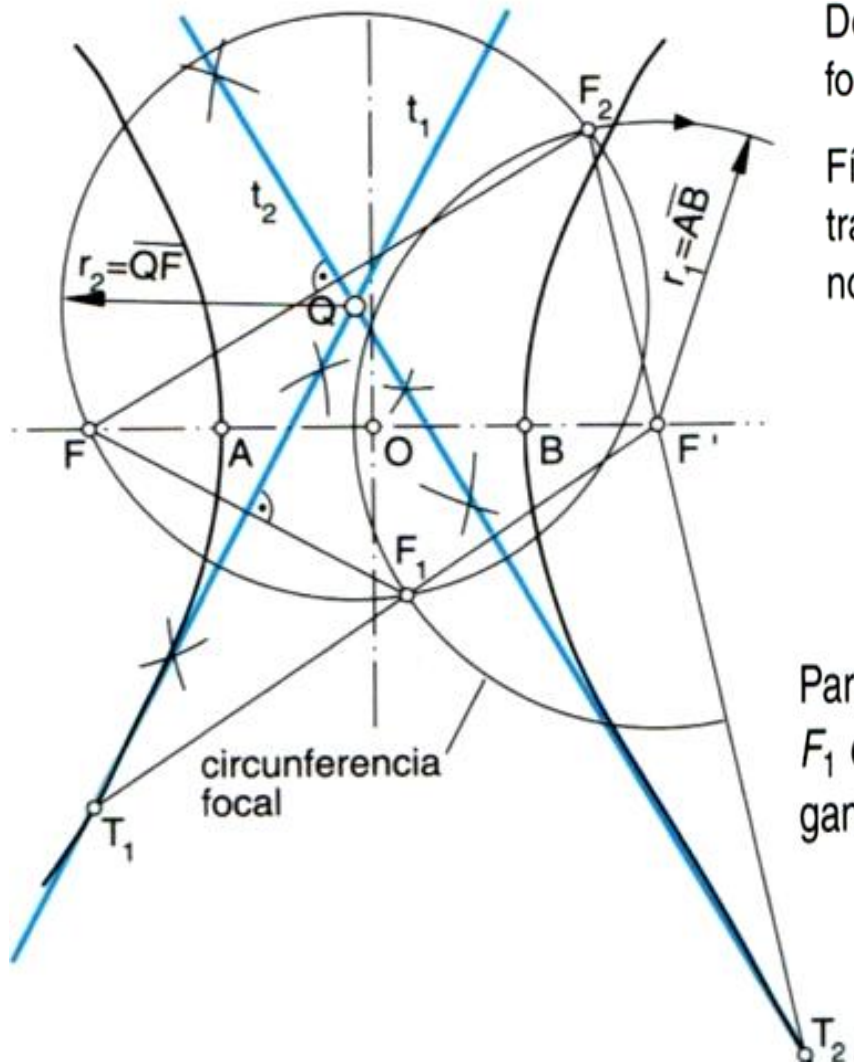
A **recta tanxente**, t , á hipérbole por un punto P desta é a bisectriz do ángulo formado polos segmentos \overline{PF} e $\overline{PF'}$.

Fíxate en que unha recta é tanxente a unha hipérbole cando o punto simétrico dun dos focos respecto a esa recta está situado na circunferencia focal correspondente ó outro foco.

Observa na figura que F'_1 é simétrico de F' respecto á recta t , e, posto que se calcula na circunferencia focal correspondente a F , a recta t é tanxente á hipérbole.

A **recta normal**, n , á hipérbole polo punto P é a perpendicular á recta tanxente t por ese punto.

Trazado das rectas tanxentes a unha hipérbole desde un punto exterior dado, Q



Despois de construír a hipérbole, trázase a circunferencia focal de centro F' e raio $r_1 = \overline{AB}$.

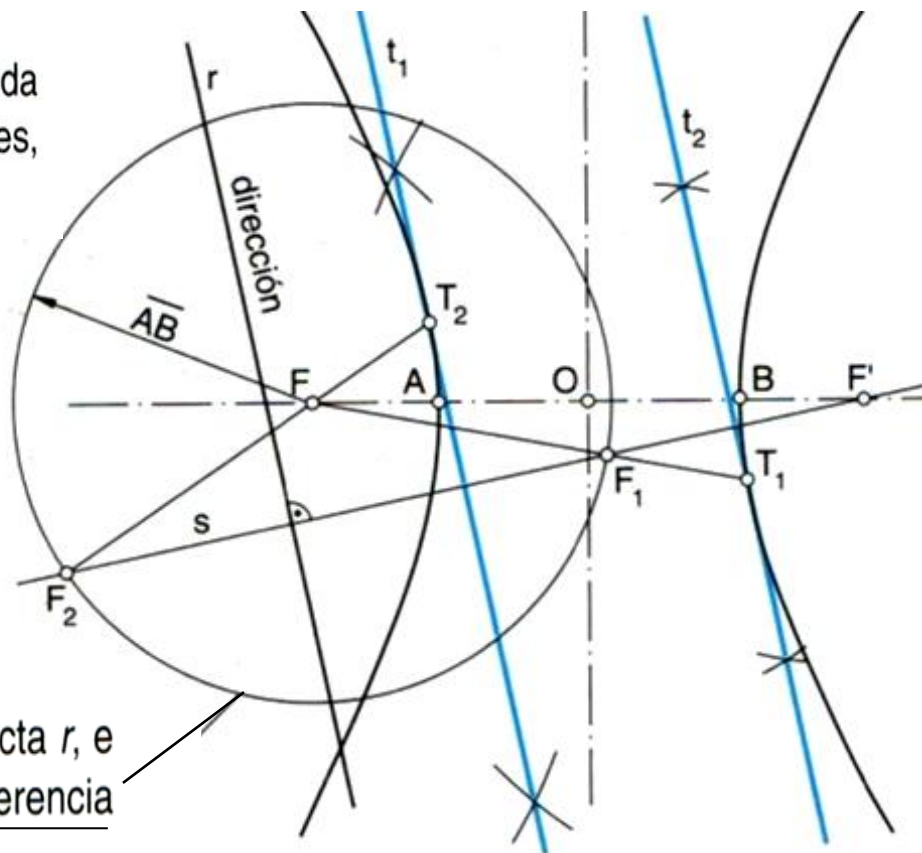
Fíxase un punto Q exterior. Con centro en Q e raio $r_2 = \overline{QF}$, trázase unha circunferencia que corta a circunferencia focal nos puntos F_1 e F_2 .

As mediatrices dos segmentos $\overline{F_1F}$ e $\overline{F_2F}$ son as rectas tanxentes t_1 e t_2 que buscamos.

Para obter os puntos de tanxencia T_1 e T_2 , únense os puntos F_1 e F_2 co foco F' , centro da circunferencia focal, e prolónganse ata que corten as dúas ramas da hipérbole.

Trazado das rectas tanxentes a unha hipérbole paralelas á dirección dunha recta dada, r

Despois de construír a hipérbole e de trazar a recta r dada como dirección de referencia para o trazado das tanxentes, describimos a circunferencia focal de centro F .

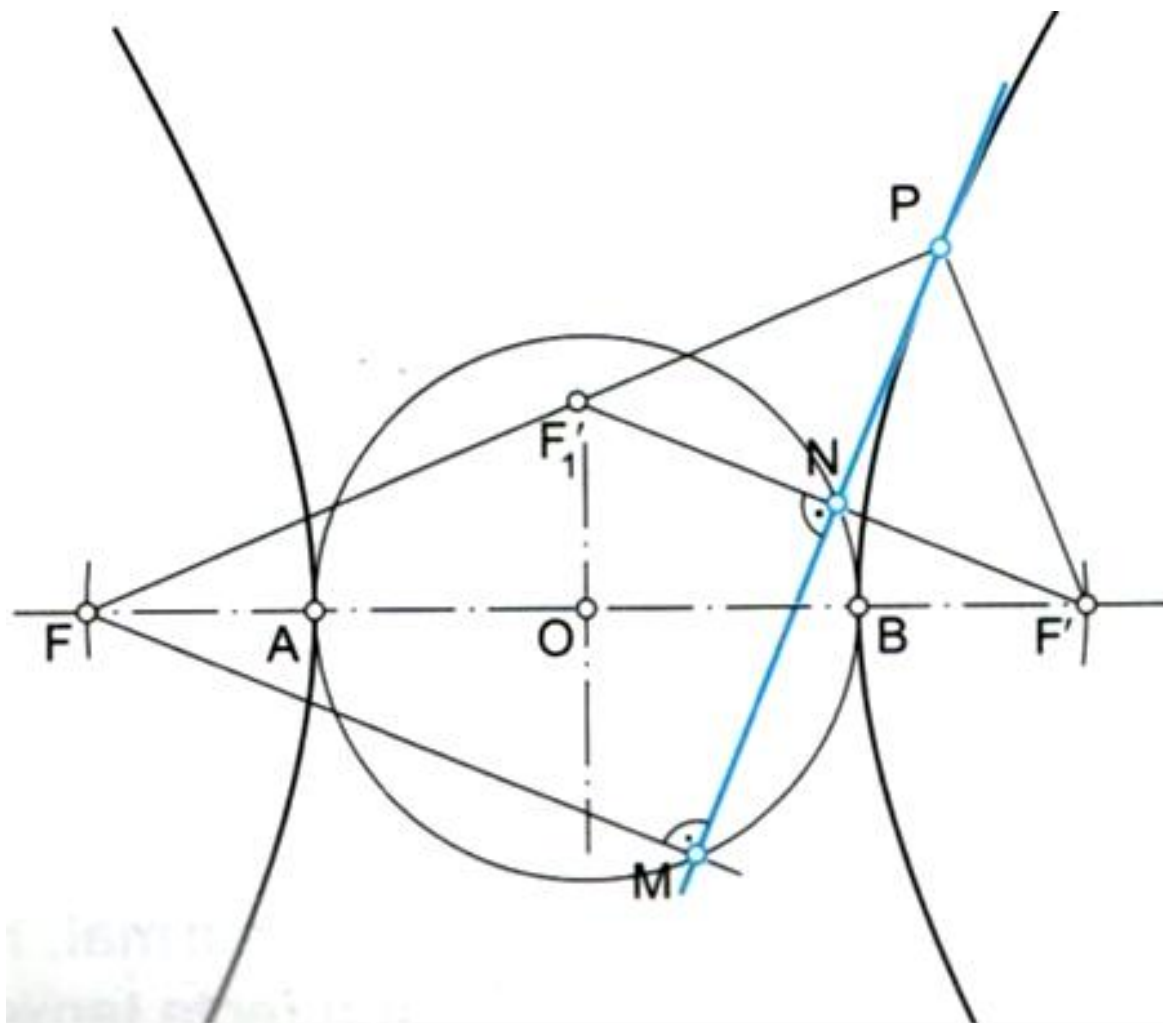


Polo outro foco, F' , trázase unha perpendicular s á recta r , e determínanse dous puntos de intersección coa circunferencia focal, F_1 e F_2 .

As mediatrices dos segmentos $\overline{F_1F'}$ e $\overline{F_2F'}$ son as rectas tanxentes á hipérbole, t_1 e t_2 .

Para obter os puntos de tanxencia, T_1 e T_2 , unimos os puntos F_1 e F_2 co foco F , centro da circunferencia focal, e prolongámoslos ata que corten as dúas ramas da curva.

Mediante a
circunferencia
principal.



A circunferencia principal dunha hipérbole ten por centro o centro da hipérbole e raio a lonxitude do semieixe real \overline{AB} .

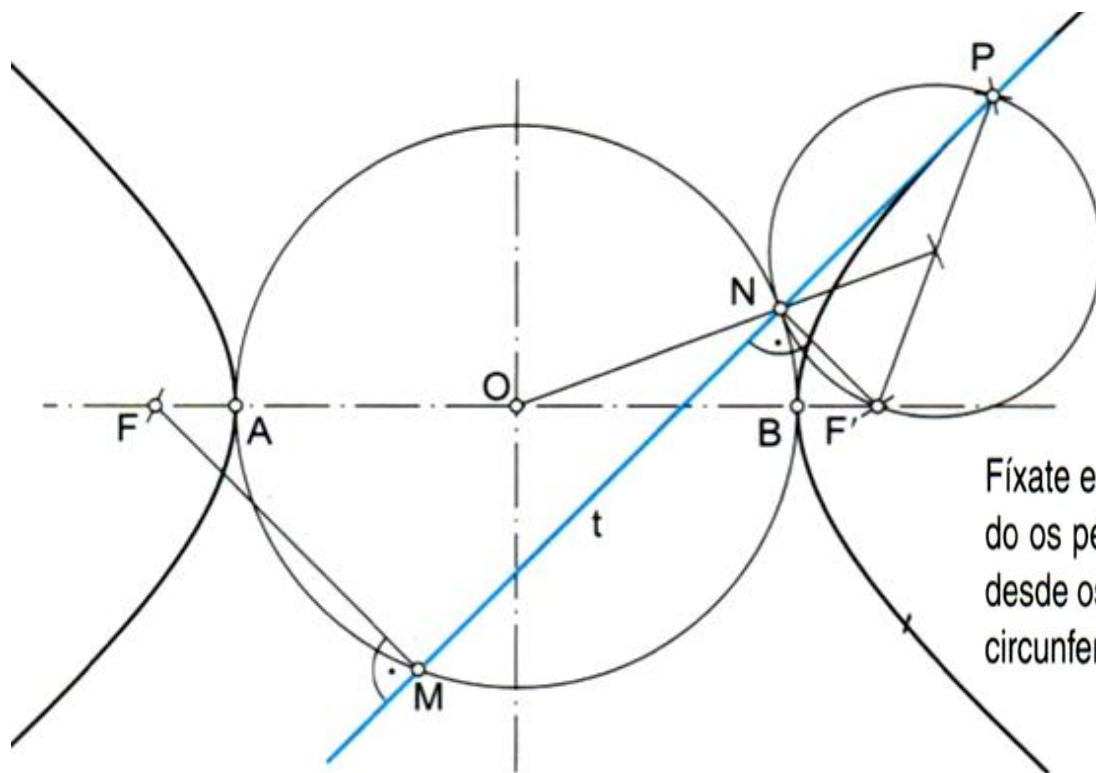
A circunferencia principal da hipérbole é o lugar xeométrico dos pés das perpendiculares trazadas desde os focos ás tanxentes da hipérbole.

Trazado da recta tanxente por un punto P da hipérbole

Despois de construír a hipérbole e de situar o punto da hipérbole P polo que queremos trazar a tanxente, con cen-

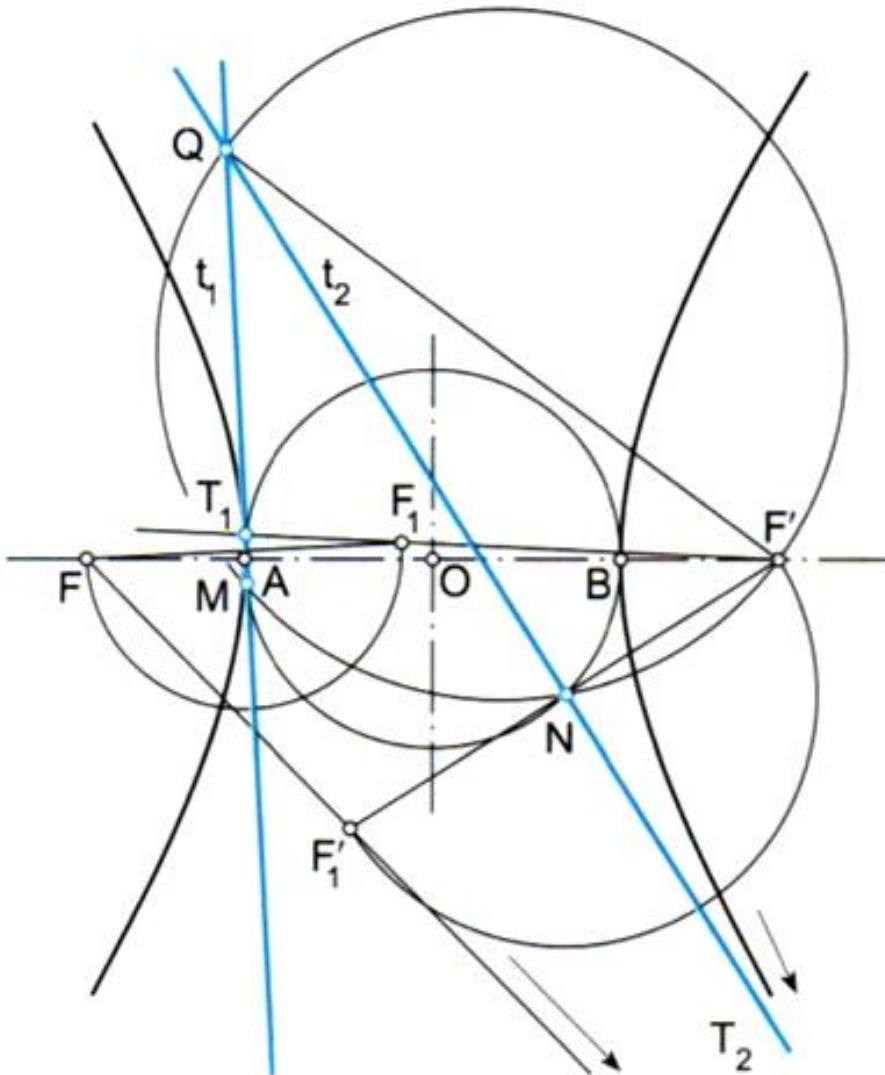
tro en O e raio $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, trazamos a circunferencia principal.

Unimos o punto P co foco F' , e trazamos a circunferencia de diámetro $\overline{F'P}$, que é tanxente á circunferencia principal no punto N . Unimos N co punto dado P e obtemos a recta tanxente t buscada.



Fíxate en que unha recta é tanxente a unha hipérbole cando os pés M e N , das perpendiculares \overline{FM} e $\overline{F'N}$ trazadas desde os focos á tanxente t da hipérbole, están situados na circunferencia principal da hipérbole.

Trazado das rectas tanxentes a unha hipérbole desde un punto exterior dado, Q



Despois de construír a hipérbole e de situar o punto exterior Q desde o que queremos trazar as rectas tanxentes t_1 e t_2 , con centro en O e raio $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, trázase a circunferencia principal.

Unimos o punto Q co foco F' , e trazamos a circunferencia de diámetro $F'Q$ que intercepta a circunferencia principal en dous puntos M e N que pertencen ás tanxentes.

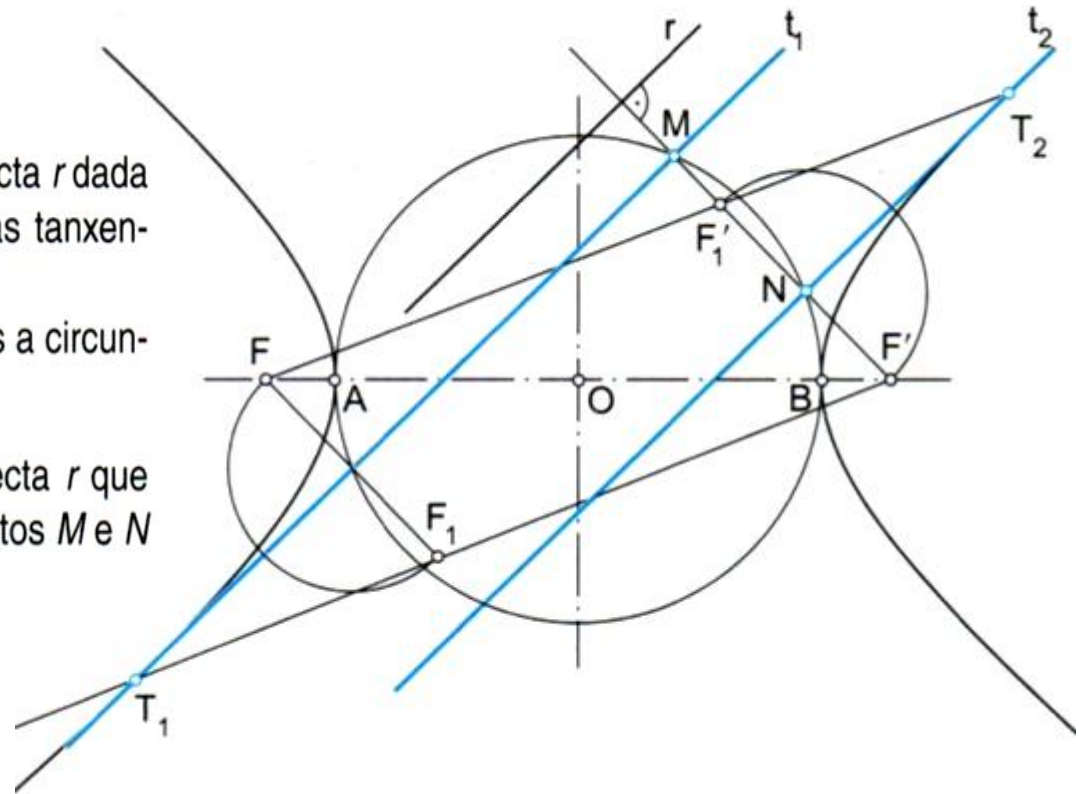
Unimos M e N con Q e obtemos as rectas tanxentes buscadas t_1 e t_2 .

Os puntos de tanxencia T_1 e T_2 son, respectivamente, as interseccións dos segmentos $F'F_1$ e FF'_1 coas tanxentes t_1 e t_2 . Sendo F_1 e F'_1 , respectivamente, os simétricos dos focos F e F' respecto a estas tanxentes.

Trazado das rectas tanxentes a unha hipérbole paralelas á dirección dunha recta dada, r

Despois de construír a hipérbole e de trazar a recta r dada como dirección de referencia para o trazado das tanxentes, con centro en O e raio $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, describimos a circunferencia principal.

Trazamos polo foco F' unha perpendicular á recta r que intercepta a circunferencia principal en dous puntos M e N que pertencen ás tanxentes.



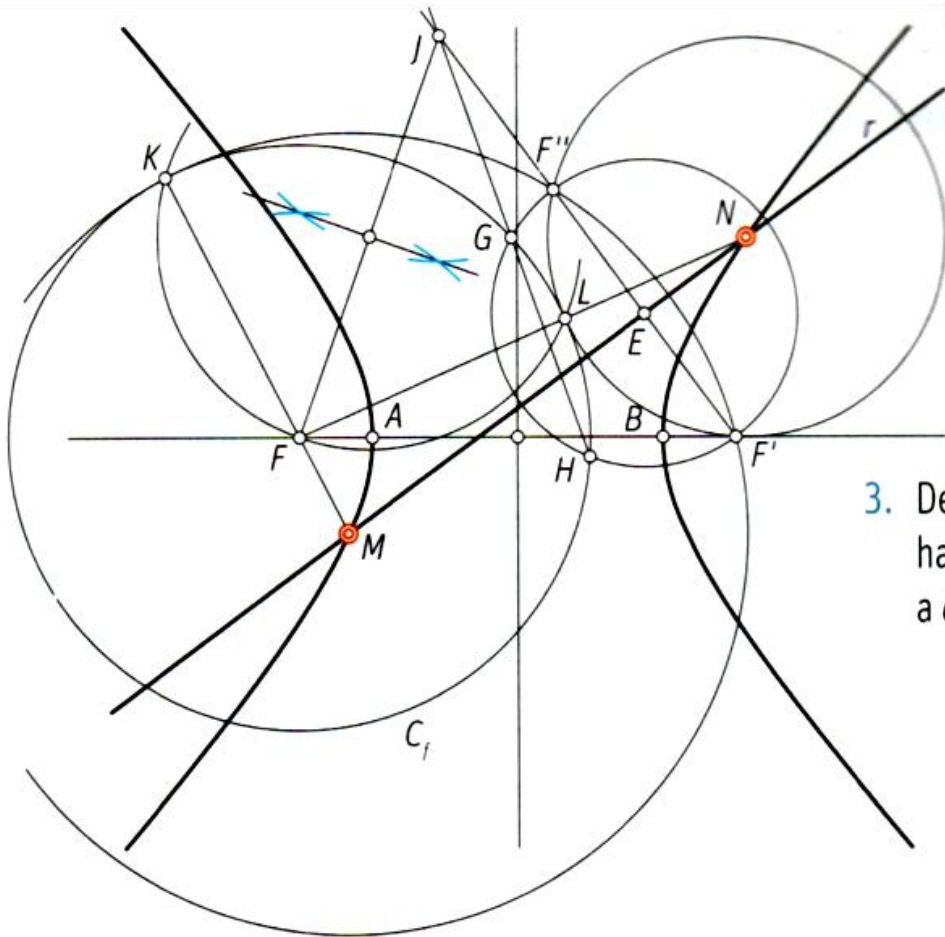
As rectas tanxentes buscadas t_1 e t_2 pasan polos puntos M e N e son paralelas á recta dada r .

Os puntos de tanxencia T_1 e T_2 son, respectivamente, as interseccións dos segmentos F_1F' e FF'_1 coas tanxentes t_1 e t_2 . Sendo F_1 e F'_1 , respectivamente, os simétricos dos focos F e F' respecto a estas tanxentes.

Intersección de recta e hipérbola

Dadas la hipérbola de eje AB y distancia focal FF' y la recta r

1. Se dibuja, con centro en F y radio AB , la circunferencia focal c_f y se halla el punto F'' simétrico de F' respecto de la recta r . Los puntos de intersección son los centros de las circunferencias que pasan por los puntos F' y F'' y son tangentes a la circunferencia focal c_f .



2. Se traza una circunferencia cualquiera con centro en E que pasa por los puntos F' y F'' y se corta con la circunferencia focal en los puntos G y H .
3. Desde el punto J de intersección de las rectas $F'F''$ y GH se hallan los puntos de tangencia K y L de las rectas tangentes a c_f , trazadas desde el punto J .
4. Las rectas que unen los puntos K y L con el foco F se cortan con la recta r en los puntos M y N , puntos de intersección de la recta r con la elipse.

A parábola

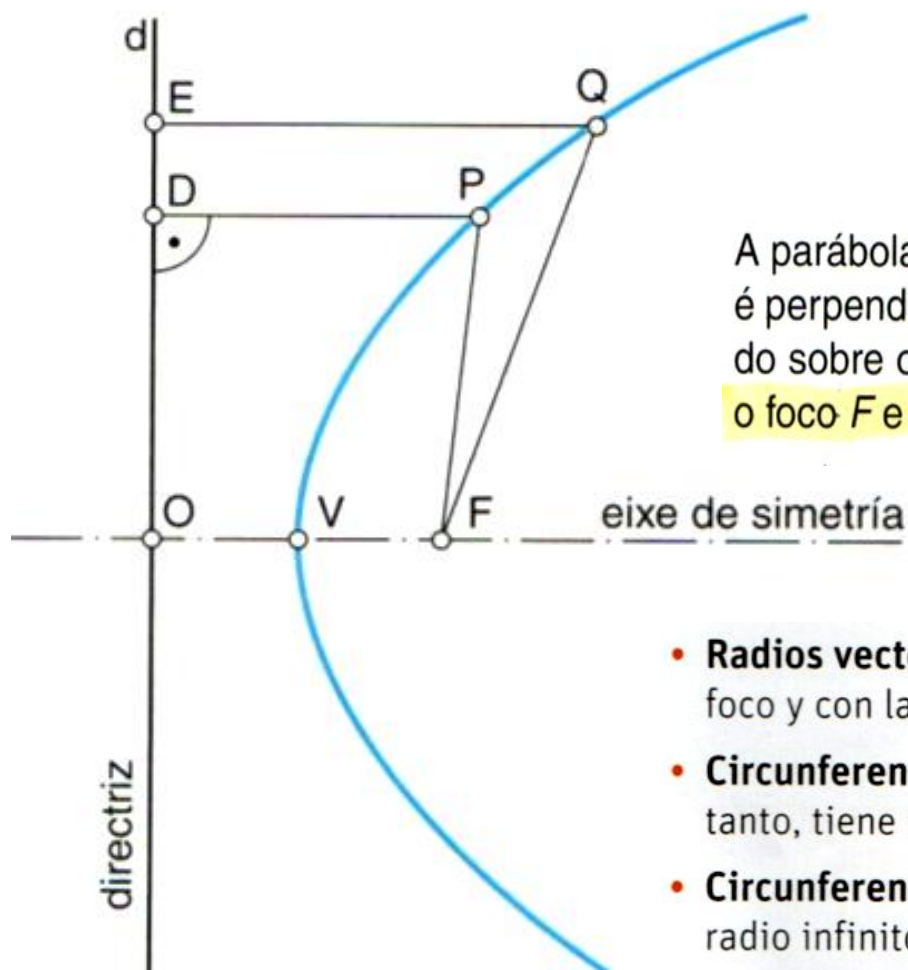
A **parábola** é unha curva aberta e plana, dunha soa rama, cuns puntos que constitúen un lugar xeométrico coa propiedade de que cada un deles equidista dunha recta fixa chamada **recta directriz, d** , e dun punto fixo chamado **foco, F** .

Así pois, os puntos da parábola cumpren:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

onde \overline{PD} é sempre perpendicular á directriz d .

A parábola ten un só eixe de simetría, e , que contén o foco F , e é perpendicular á recta directriz, d . O seu **vértice, V** , está situado sobre o eixe de simetría, no punto medio da distancia entre o foco F e a directriz d .



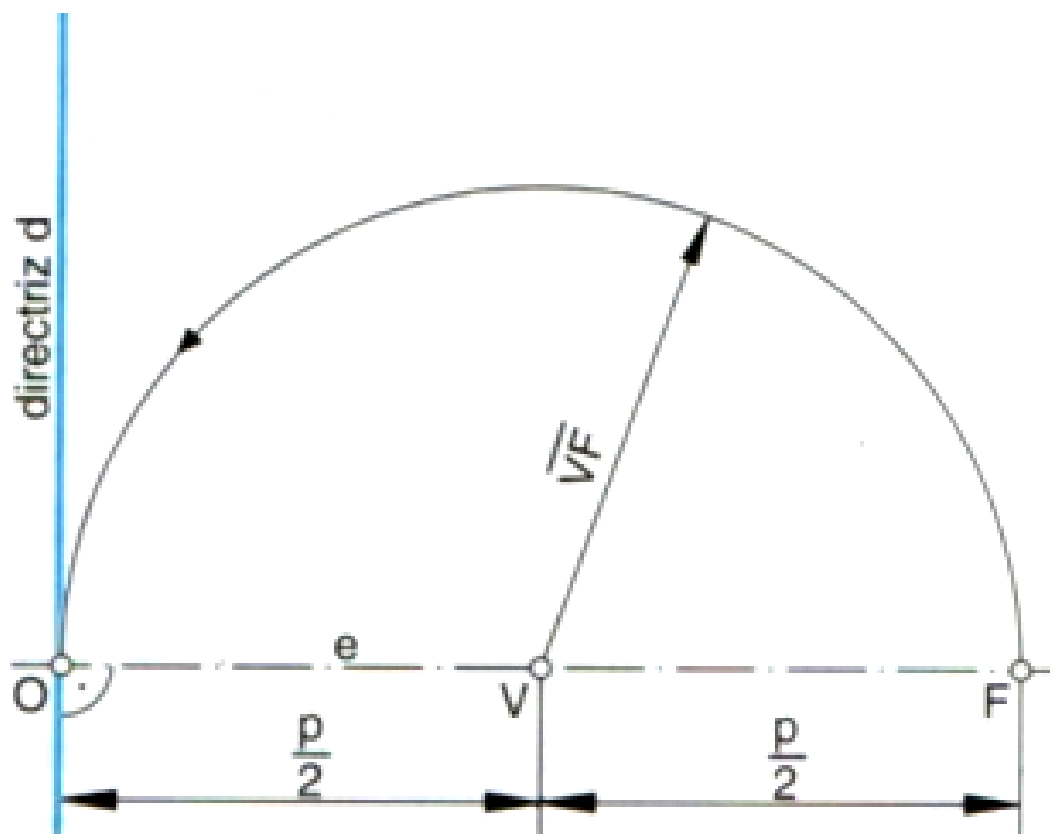
- **Radio vector:** son as rectas PF e PF' que unen un punto con el foco y con a directriz.
- **Circunferencia principal:** es la recta tangente en el vértice y, por tanto, tiene radio infinito.
- **Circunferencia focal:** es la propia directriz y, por tanto, tiene radio infinito.
- **Parámetro $2p$:** es la longitud AB de la cuerda perpendicular al eje en el foco F .

Trazado da directriz dunha parábola dados o vértice V e o foco F

A distancia entre a recta directriz dunha parábola e o foco chámase **parámetro**, e denótase por p .

Se V é o vértice dunha parábola, F o seu foco e p o seu parámetro, tense que:

$$d(V, F) = \frac{p}{2}$$

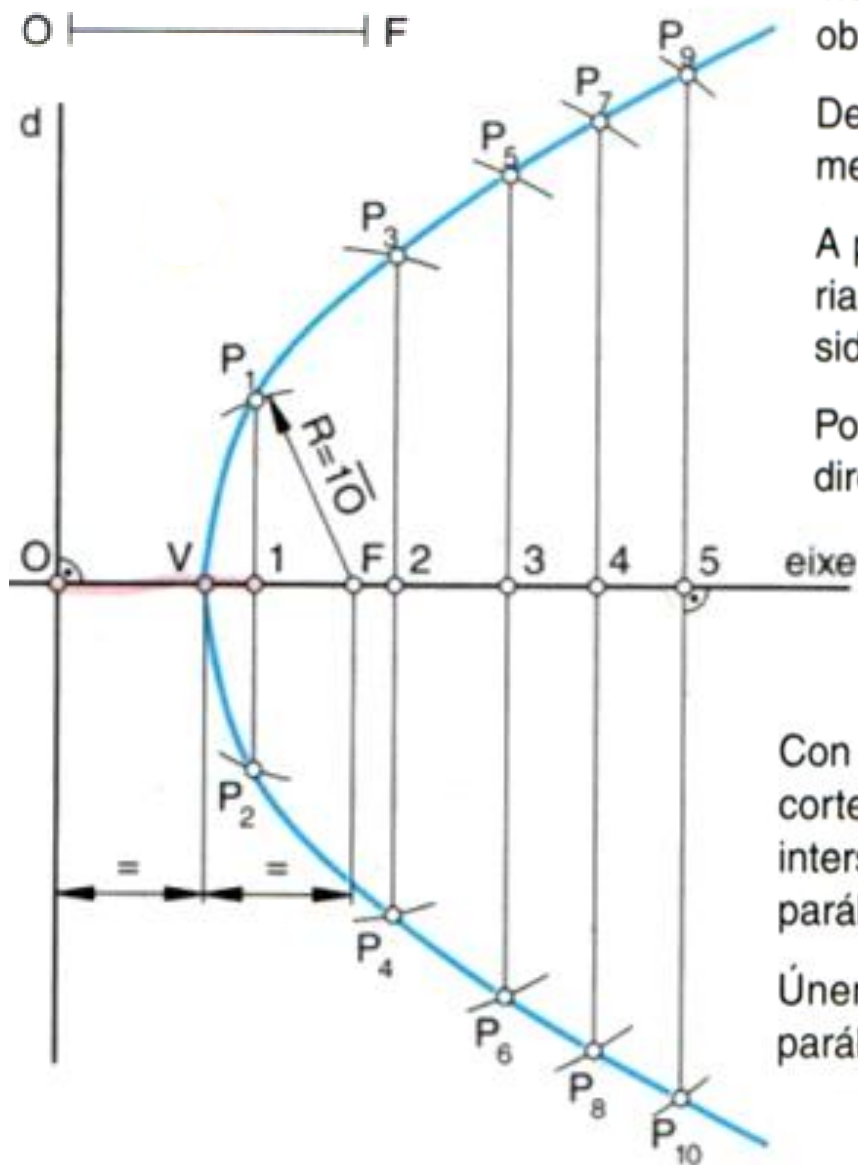


Representátese sobre un eixe horizontal o vértice V da parábola e o foco F .

Sobre o vértice V e con raio \overline{VF} descríbese un arco que corte o eixe de simetría no punto O .

Polo punto O trázase unha perpendicular ó eixe de simetría, que resulta ser a directriz d que buscamos.

Trazado dunha parábola por puntos, dados o eixe e a distancia focal



Trázase por O unha perpendicular ó eixe, co que se obtén a recta directriz d .

Determinábase o vértice, V , como o punto medio do segmento \overline{OF} .

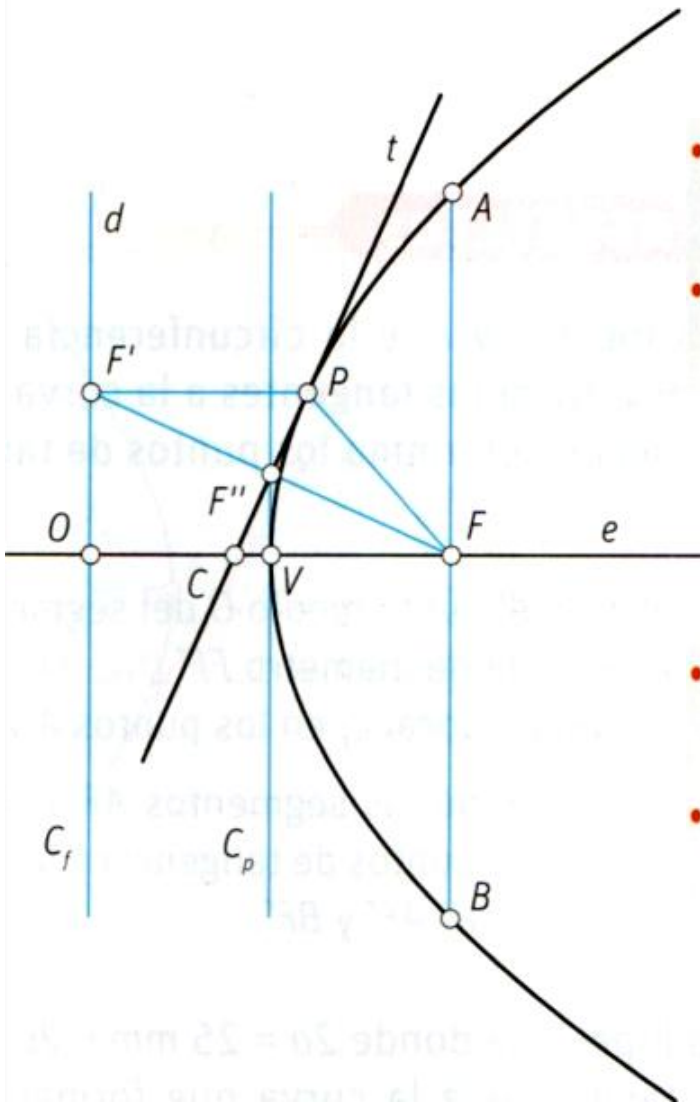
A partir de V e sobre o eixe de simetría márcase arbitrariamente unha serie de puntos, 1, 2, 3... No exemplo consideraremos 5.

Polos puntos 1, 2... 5, trázanse rectas paralelas á recta directriz d .

Con centro en F e raios $\overline{F1}$, $\overline{F2}$... $\overline{F5}$ trázanse arcos que corten as rectas que pasan polos puntos 1, 2... 5. A súa intersección determina os puntos de P_1, P_2, P_3 ... P_{10} da parábola.

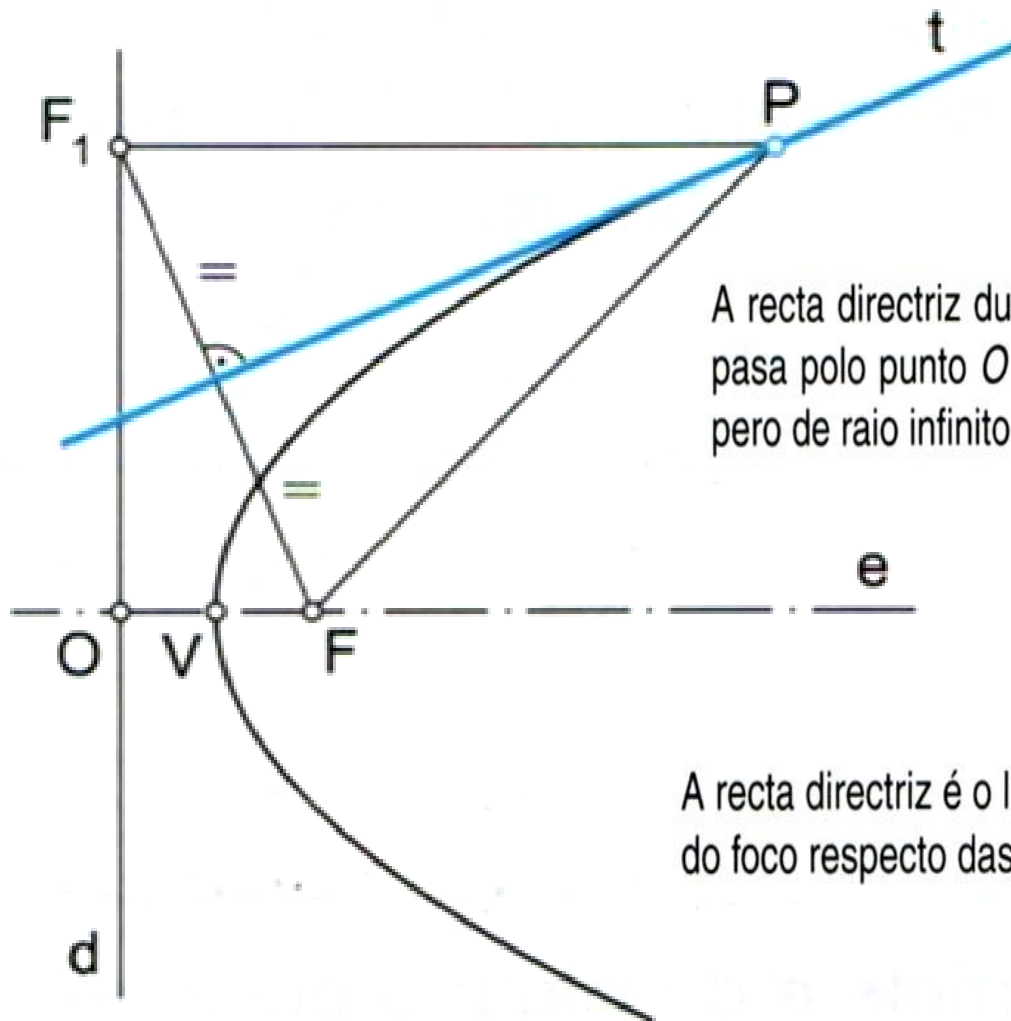
Únense os puntos cun patrón de curvas e obtense a parábola.

Rectas tanxentes á parábola



- La proyección del foco sobre una tangente pertenece a la circunferencia principal, es decir, a la tangente en el vértice (fig. 34).
- La directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco F respecto de cada tangente.
- El foco F equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde esta corta al eje de la parábola $FP = FC$.
- Todo rayo que parte de un foco rebota según rectas paralelas al eje.

Trazado de rectas tanxentes a unha parábola mediante a recta directriz

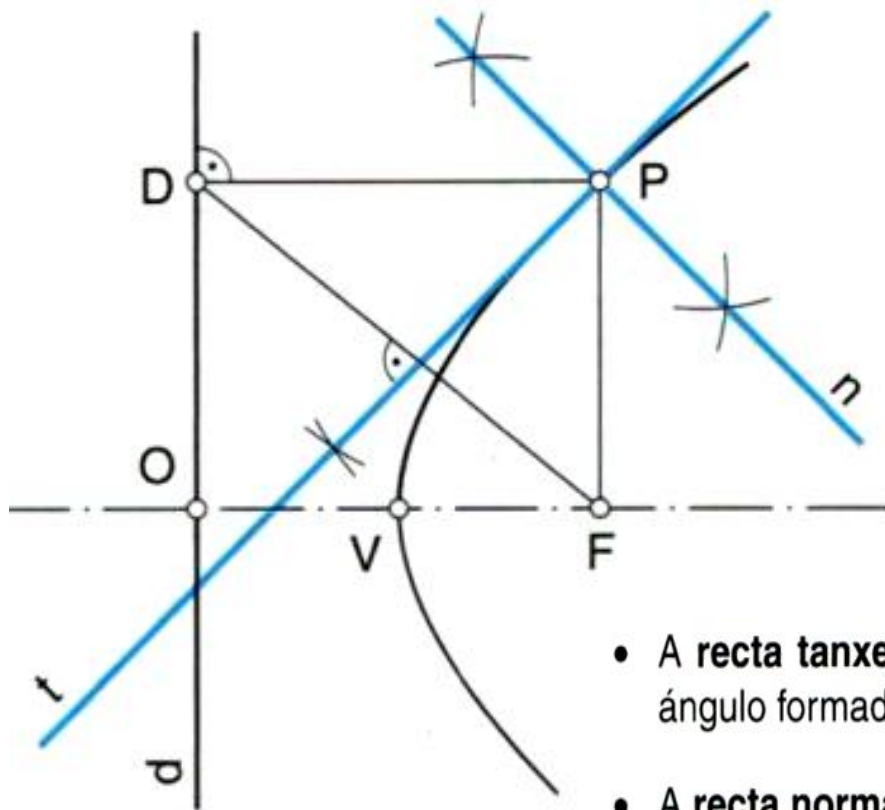


A recta directriz dunha parábola é a recta perpendicular ó eixe e que pasa polo punto O e que equivale á circunferencia focal da parábola, pero de raio infinito (fig. 2).

A recta directriz é o lugar xeométrico que ocupan os puntos simétricos do foco respecto das tanxentes á parábola.

Trazado da recta tanxente t e da normal n por un punto P da parábola

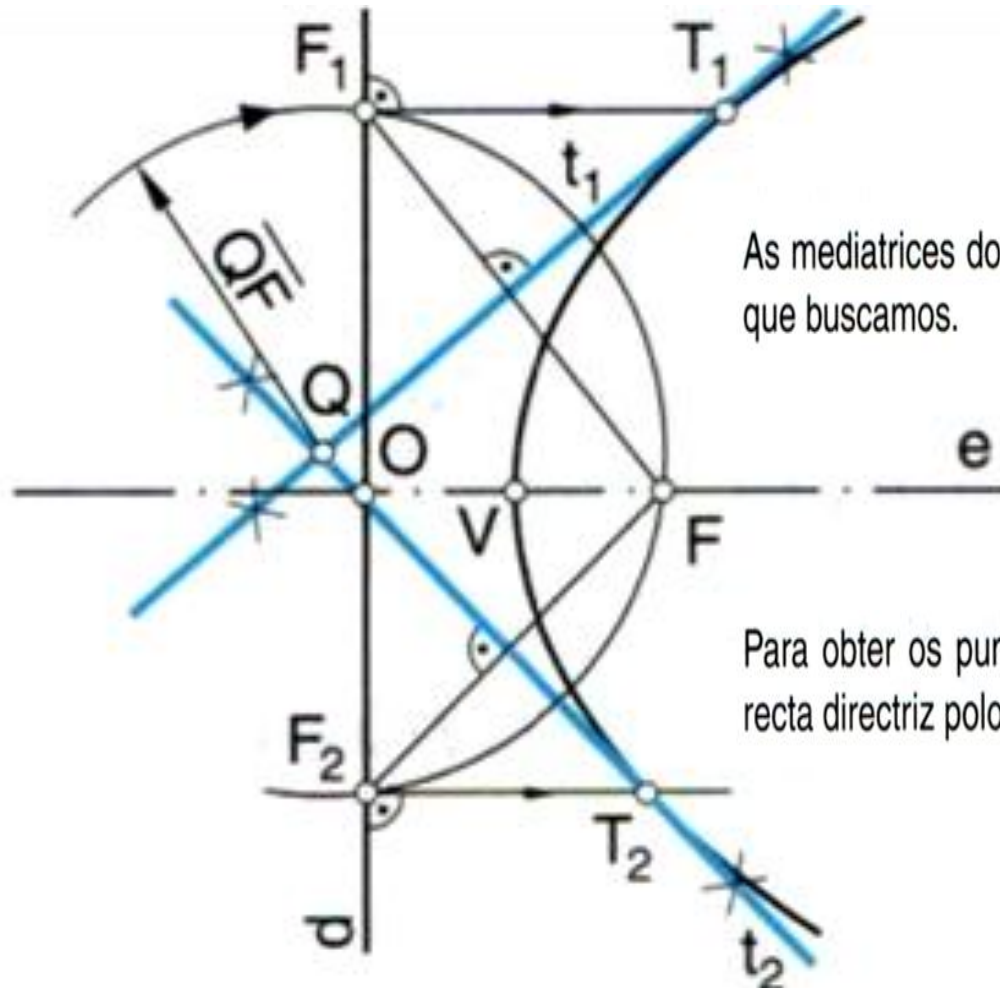
Despois de construír a parábola e de situar o punto P polo que queremos trazar a recta tanxente, únese o punto P co foco F e trázase unha perpendicular á recta directriz d por P , co que se determina o punto D .



- A **recta tanxente**, t , á parábola por un punto P dela é a bisectriz do ángulo formado polos segmentos \overline{PF} e \overline{PD} .
- A **recta normal**, n , á parábola por un punto P dela é a perpendicular á recta tanxente t que pasa por este punto.

Trazado das rectas tanxentes a unha parábola desde un punto exterior dado, Q

Despois de construír a parábola e de situar o punto exterior Q , con centro en Q e raio \overline{QF} , descríbese un arco que corta a recta directriz d nos puntos F_1 e F_2 .



As mediatrices dos segmentos $\overline{F_1F}$ e $\overline{F_2F}$ son as rectas tanxentes t_1 e t_2 que buscamos.

Para obter os puntos de tanxencia T_1 e T_2 , trázanse perpendiculares á recta directriz polos puntos F_1 e F_2 .

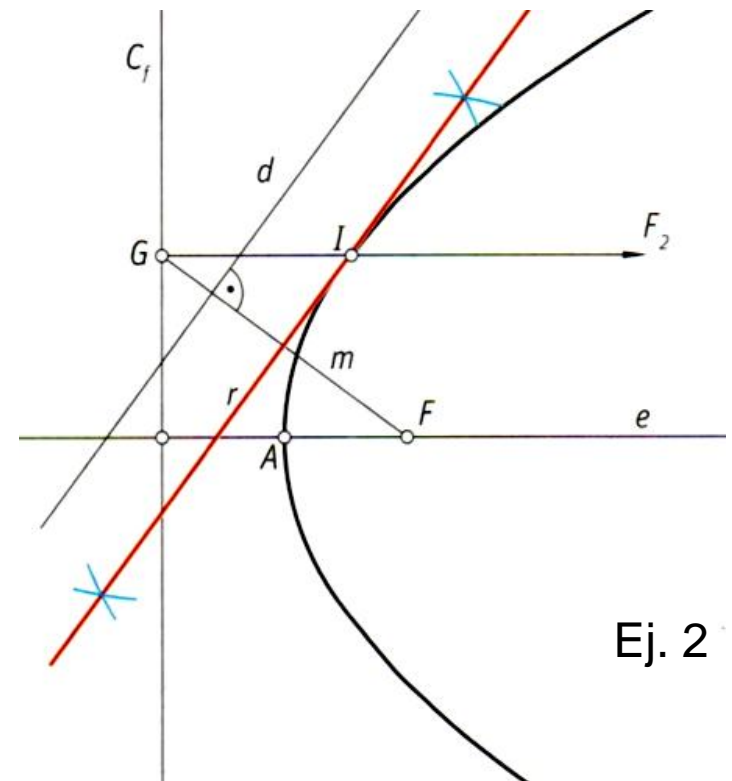
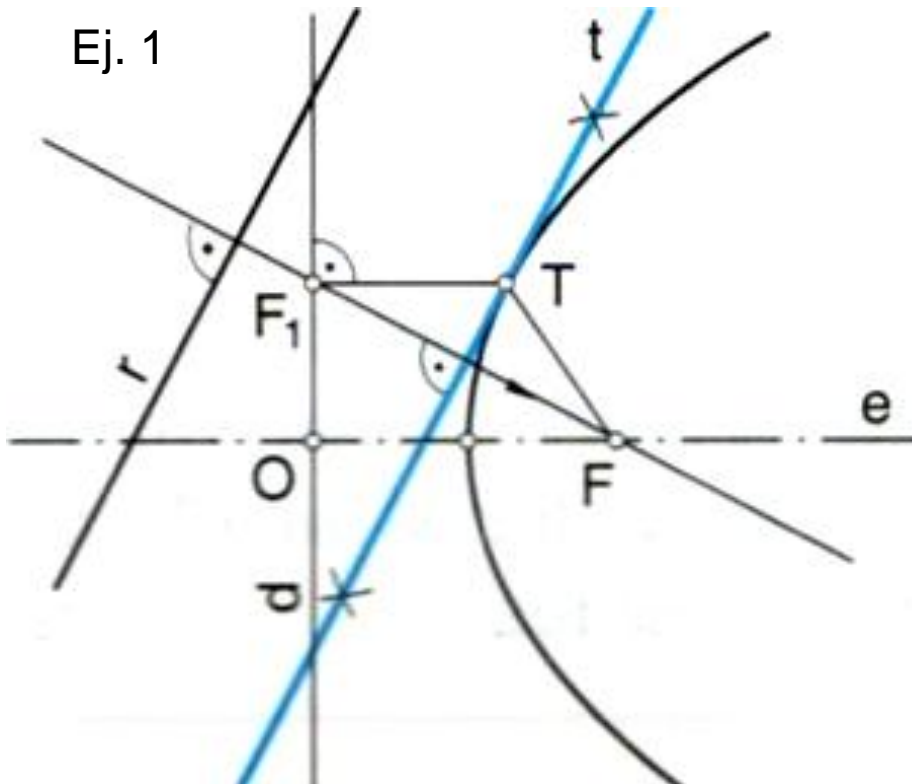
Trazado das rectas tanxentes a unha parábola paralelas á dirección dunha recta dada, r

Despois de construír a parábola e de trazar a recta r dada como dirección de referencia para o trazado da recta tanxente, polo foco F trázase unha perpendicular á recta r , que corta a recta directriz no punto F_1 .

A mediatriz do segmento $\overline{FF_1}$ é a recta tanxente, t , que buscamos.

Para obter o punto de tanxencia T , trázase por F_1 unha perpendicular á recta directriz e prolóngase ata cortar a parábola. O punto que obtemos é o punto de tanxencia T .

Ej. 1

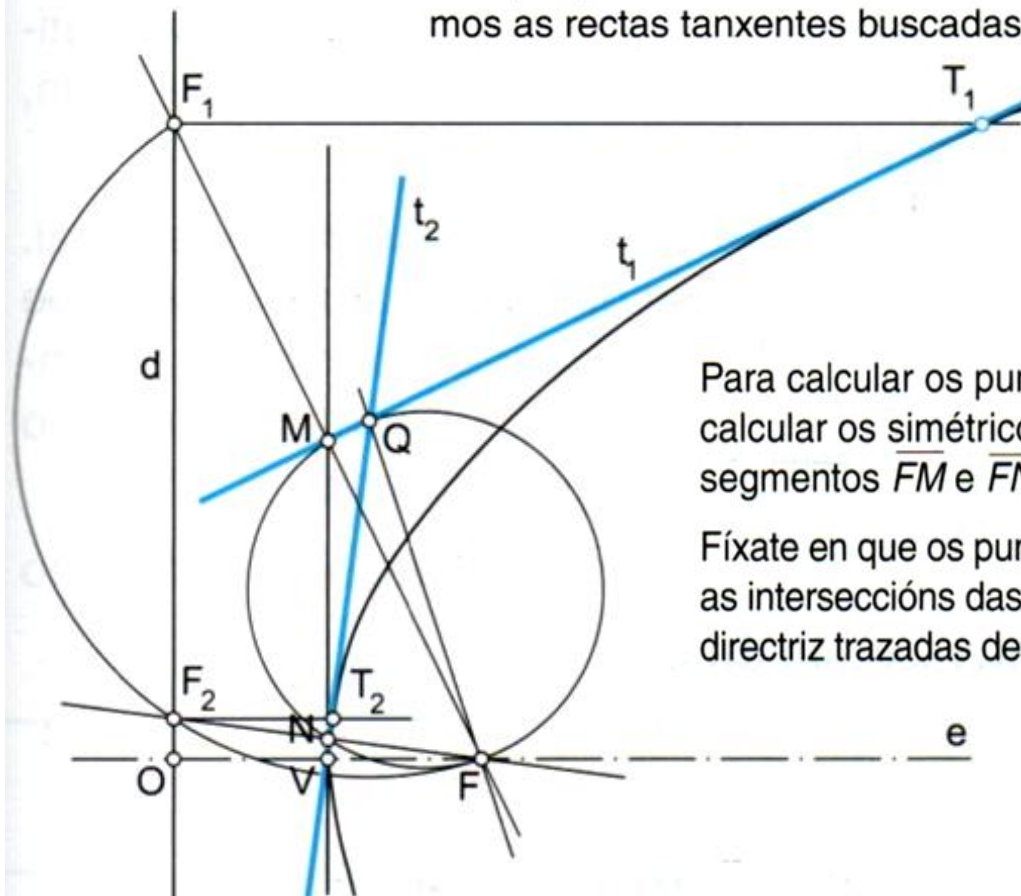


Ej. 2

Trazado das rectas tanxentes a unha parábola desde un punto exterior dado, Q

Despois de construír a parábola e de situar o punto exterior Q polo que queremos trazar as rectas tanxentes t_1 e t_2 , determínase a tanxente no vértice V perpendicular ó eixe e .

Unimos o punto Q co foco F , e trazamos a circunferencia de diámetro FQ que intercepta a tanxente no vértice en dous puntos M e N que pertencen ás tanxentes. Unimos M e N con Q e calculamos as rectas tanxentes buscadas, t_1 e t_2 .



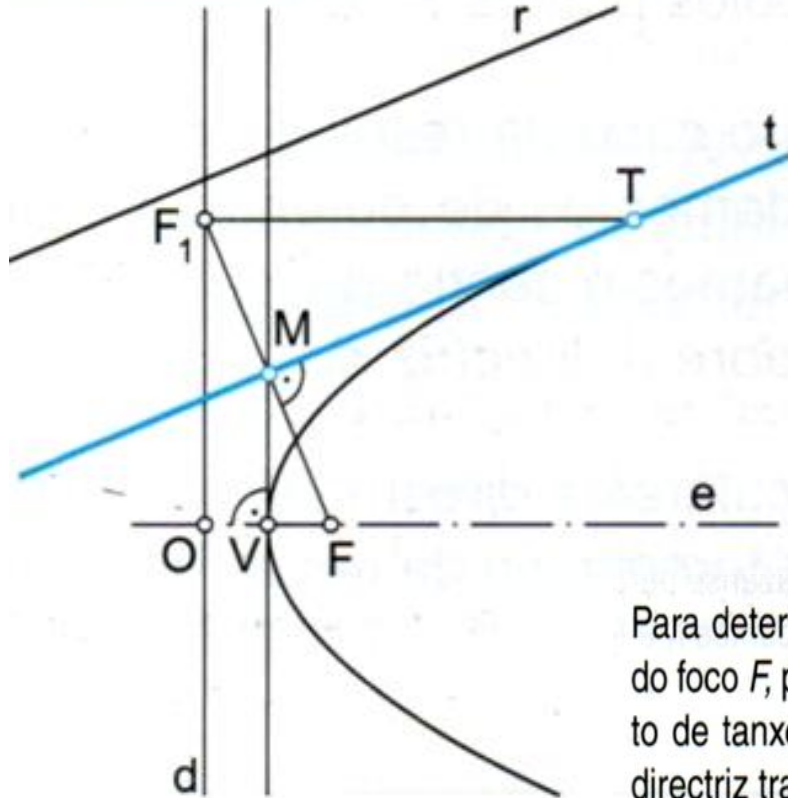
Para calcular os puntos de tanxencia T_1 e T_2 , primeiro temos que calcular os simétricos F_1 e F_2 do foco F . Para iso prolongamos os segmentos FM e FN ata que corten a directriz en F_1 e F_2 .

Fíxate en que os puntos de tanxencia T_1 e T_2 son, respectivamente, as interseccións das rectas tanxentes t_1 e t_2 coas perpendiculares á directriz trazadas desde os simétricos ó foco F_1 e F_2 .

Trazado das rectas tanxentes a unha parábola paralelas á dirección dunha recta dada, r

Despois de construír a parábola e de trazar a recta r dada como dirección de referencia para o trazado da recta tanxente, polo foco F , determínase a tanxente no vértice V perpendicular ó eixe e .

Polo foco F trazamos unha perpendicular á recta r que intercepta a tanxente no vértice no punto M que pertence á tanxente. A recta que pasa polo punto M e é paralela a r é a recta tanxente buscada t .



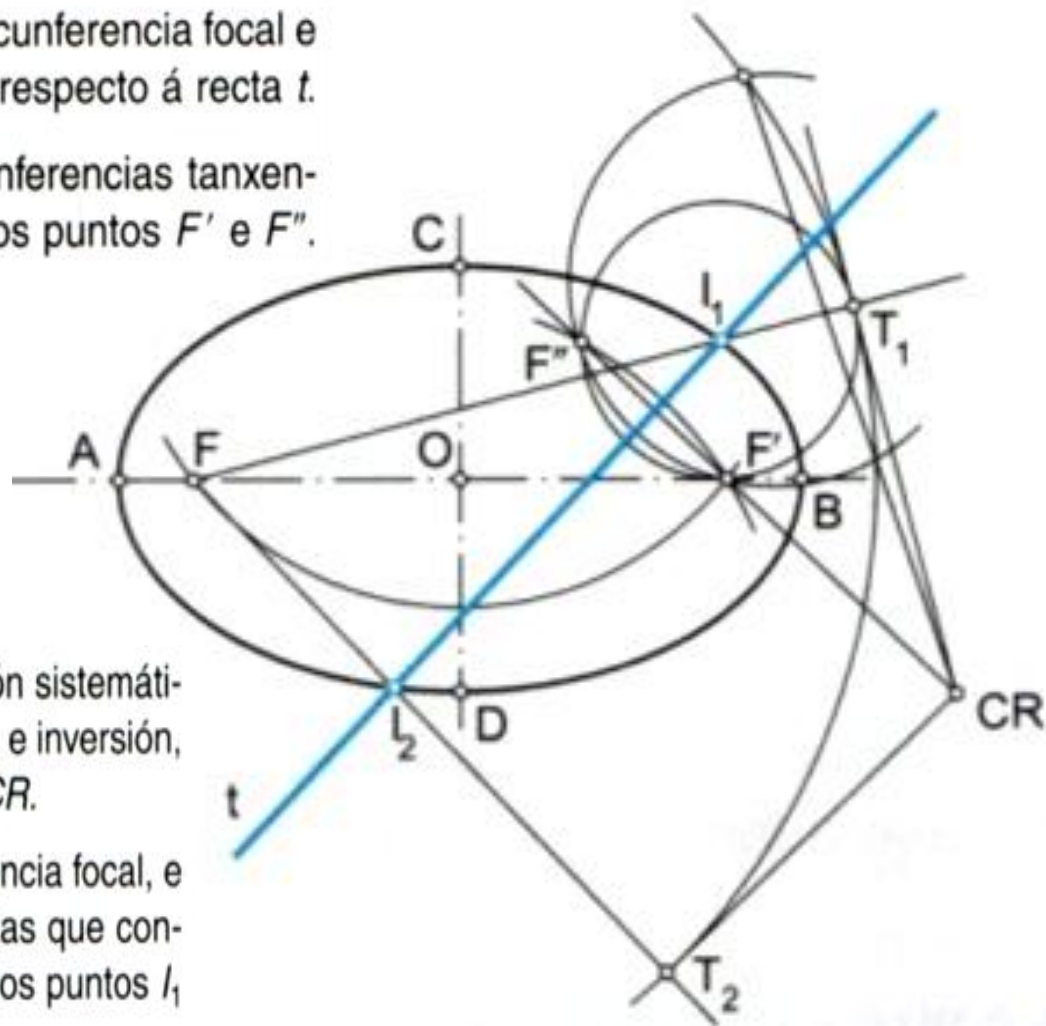
Para determinar o punto de tanxencia T , primeiro calculamos o simétrico F_1 do foco F , prolongando o segmento \overline{FM} ata que corte a directriz en F_1 . O punto de tanxencia T é a intersección da recta tanxente t coa perpendicular á directriz trazada desde o simétrico ó foco F_1 .

Rectas secantes ás curvas cónicas

Intersección dunha recta t cunha elipse

Despois de construír a elipse, trázase a circunferencia focal e calcúlase o punto F'' simétrico do foco F' respecto á recta t .

O problema redúcese ó trazado das circunferencias tanxentes á circunferencia focal e que pasen polos puntos F' e F'' .



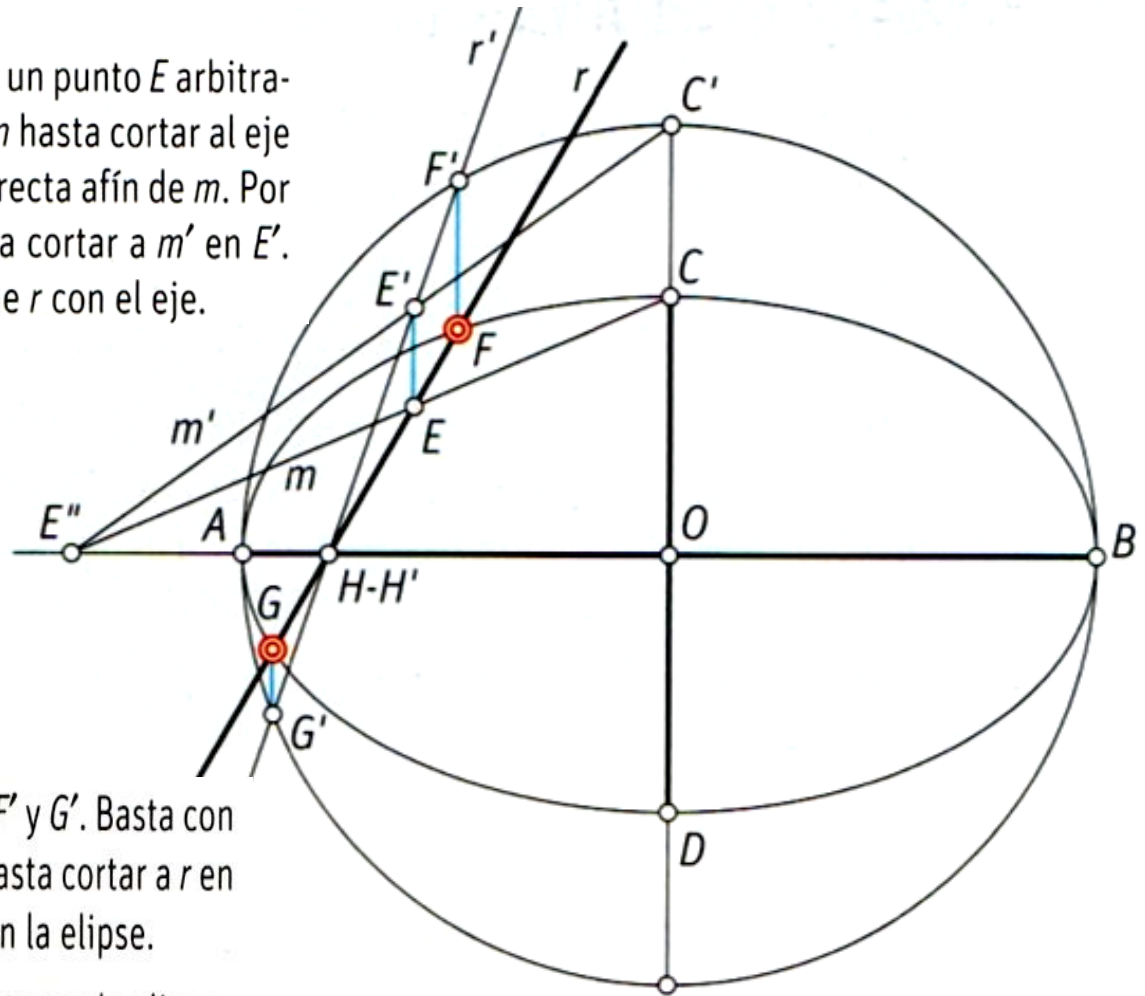
Observa que equivale ó cuarto caso da resolución sistemática de tanxencias por procedementos de potencia e inversión, páx. 61, co que determinamos o centro radical, CR .

Por CR trázanse as rectas tanxentes á circunferencia focal, e obtemos os puntos de tanxencia T_1 e T_2 . As rectas que conteñen os segmentos $\overline{FT_1}$ e $\overline{FT_2}$ cortan a recta t nos puntos I_1 e I_2 de intersección da recta t coa elipse.

Hallar la intersección de recta y elipse: método de afinidad

1. Se traza la circunferencia de diámetro AB y se establece una relación de afinidad con la elipse. El eje de afinidad es AB y dos puntos afines, C y C' , marcan la dirección de afinidad.

2. Se determina r' , afín de la recta r : se elige un punto E arbitrario de r y se une con C mediante la recta m hasta cortar al eje en E'' . La recta m' que une E'' con C' es la recta afín de m . Por el punto E se traza la paralela a CC' hasta cortar a m' en E' . La recta r' une E' con $H-H'$, intersección de r con el eje.



3. La recta r' se corta con la circunferencia en F' y G' . Basta con trazar por estos puntos las paralelas a CC' hasta cortar a r en F y G , que son los puntos de intersección con la elipse.

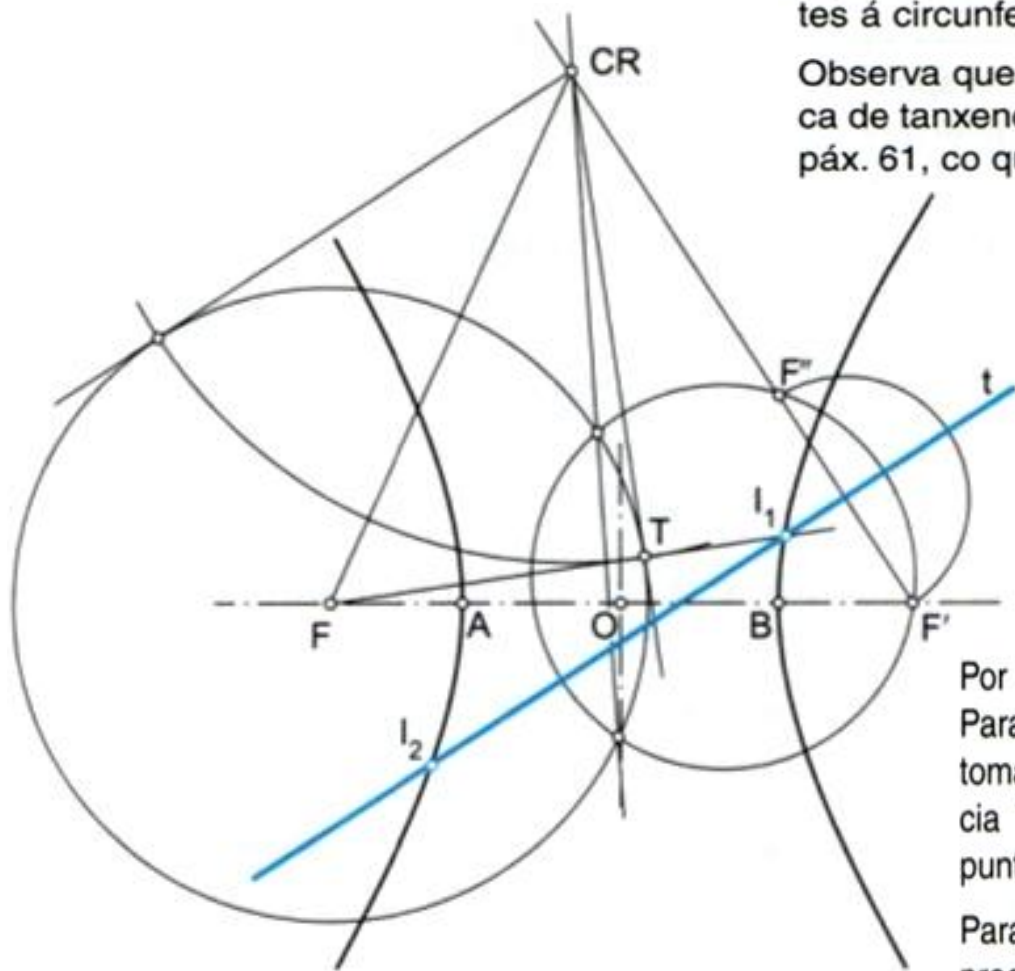
Para resolver el problema no ha sido necesario trazar la elipse.

Intersección dunha recta t cunha hipérbole

Despois de construír a hipérbole, trázase a circunferencia focal do centro F e calcúlase o punto F'' simétrico do foco F' respecto á recta t .

O problema redúcese ó trazado das circunferencias tanxentes á circunferencia focal e que pasen polos puntos F' e F'' .

Observa que equivale ó cuarto caso da resolución sistemática de tanxencias por procedementos de potencia e inversión, páx. 61, co que determinamos o centro radical, CR .



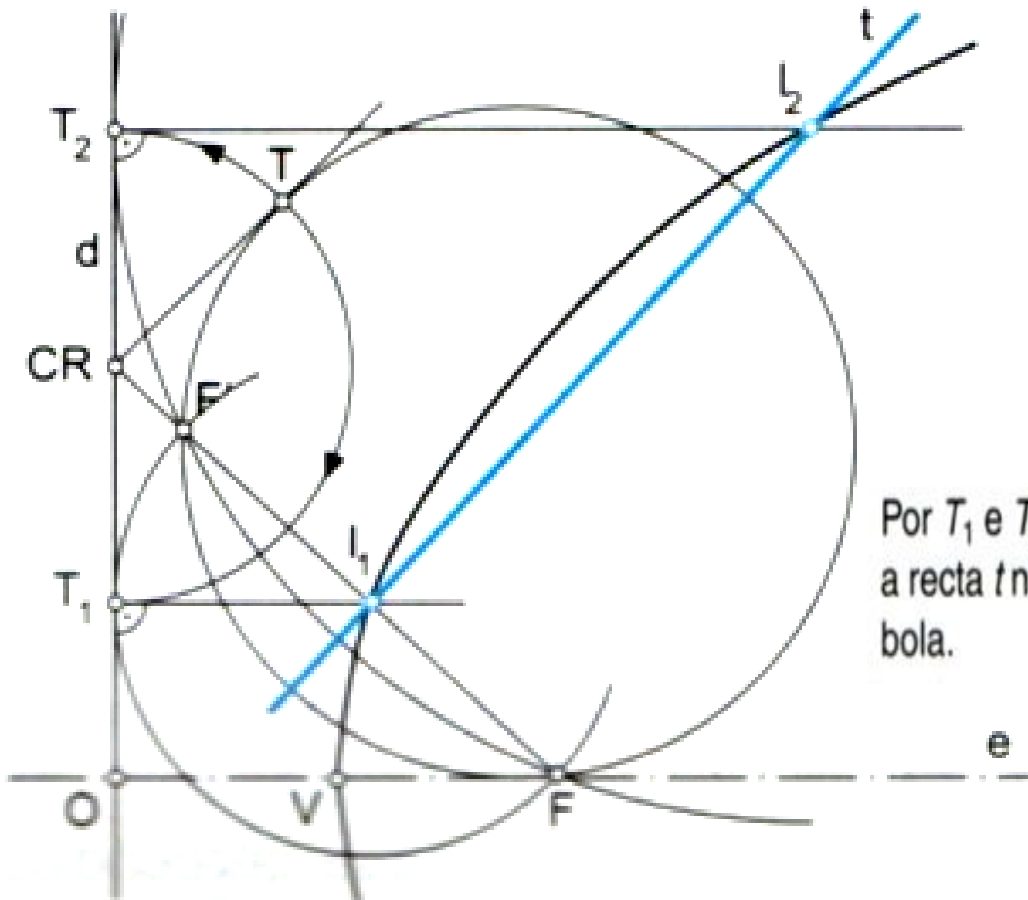
Por CR trázanse as rectas tanxentes á circunferencia focal. Para a hipérbole debe estudiarse qué recta tanxente se debe tomar. Neste caso é a que nos determina o punto de tanxencia T . A recta que contén o segmento \overline{FT} corta a recta t no punto I_1 de intersección da recta t coa hipérbole.

Para calcular o punto de intersección I_2 séguese o mesmo procedemento pero a partir do foco F .

Intersección dunha recta t cunha parábola

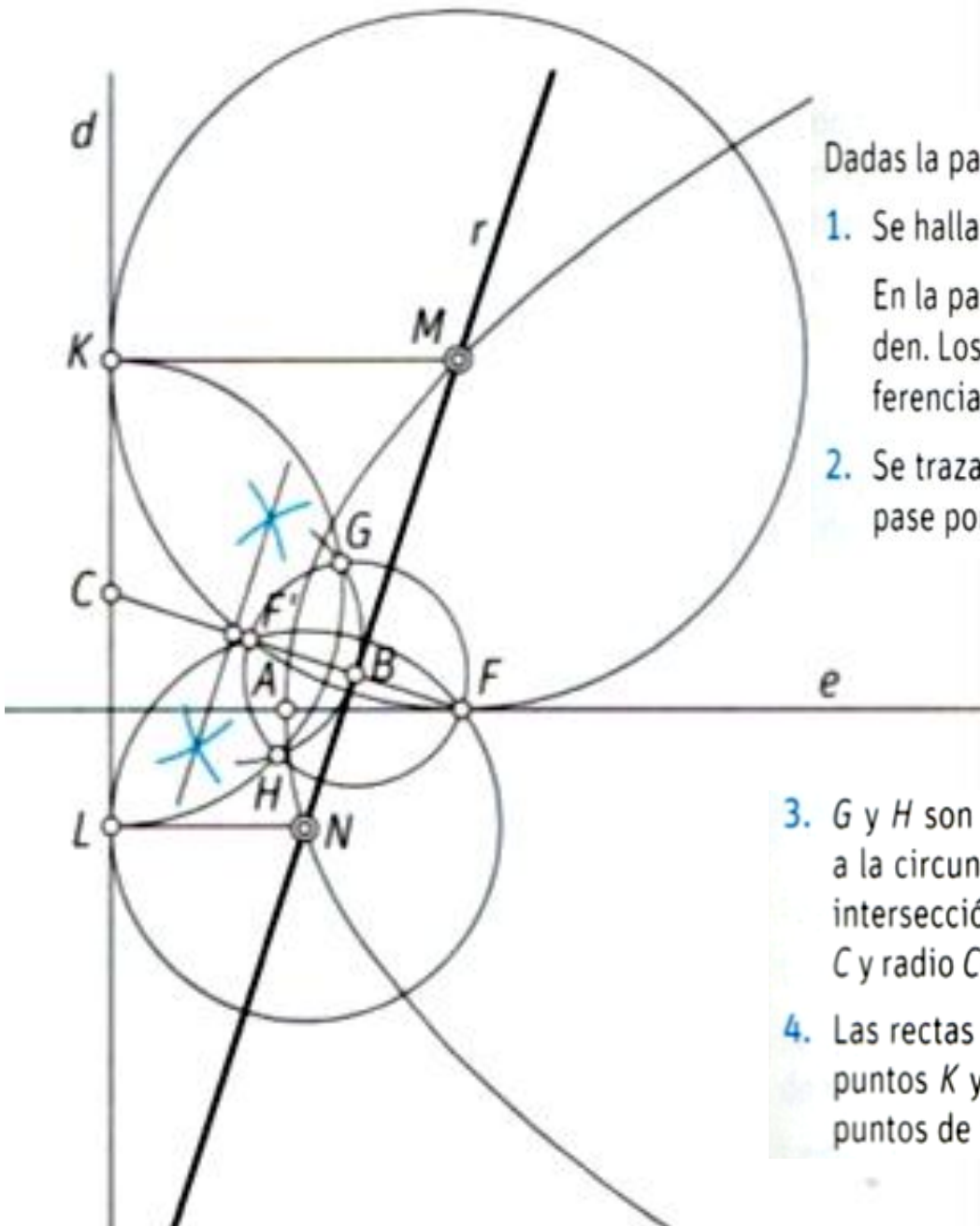
O problema redúcese ó trazado das circunferencias tanxentes á directriz d e que pasen polos puntos F' e F'' .

Observa que equivale ó terceiro caso da resolución sistemática de tanxencias por procedementos de potencia e inversión, páx. 60, co que determinamos o centro radical, CR e os puntos de tanxencia T_1 e T_2 sobre a directriz d .



Por T_1 e T_2 trázanse perpendiculares á directriz d , que cortan a recta t nos puntos I_1 e I_2 de intersección da recta t coa parábola.

OUTRO EXEMPLO



- Dadas la parábola de foco F y directriz d y la recta r
1. Se halla el punto F' simétrico de F respecto de la recta r .
En la parábola, la directriz d y la circunferencia focal coinciden. Los puntos de intersección son los centros de las circunferencias que pasan por F y F' y son tangentes a la directriz.
 2. Se traza una circunferencia cualquiera con centro en B que pase por los puntos F y F' .
 3. G y H son los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia de centro B , trazadas desde C , punto de intersección de la recta FF' con la directriz d . Con centro en C y radio CG se traza un arco que corta a la directriz en K y L .
 4. Las rectas perpendiculares a la directriz d , trazadas por los puntos K y L , se cortan con la recta r en los puntos M y N , puntos de intersección de la recta r con la elipse.