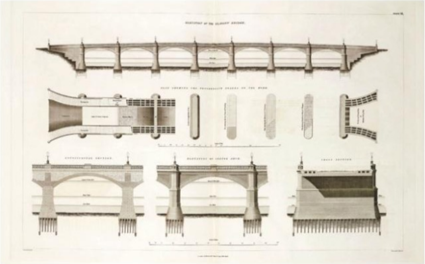
2.1 Sistema diédrico (I): métodos

¡EMPEZAMOS!

Una mirada lo altera todo



La geometría descriptiva es la parte del dibujo técnico que estudia los sistemas de representación, que consisten en desarrollar diversas formas o métodos para representar objetos de tres dimensiones en una superficie de dos dimensiones. Este gran invento se le ocurrió al matemático francés Gaspard Monge (1746-1818), razón por la que, a uno de estos sistemas, al sistema diédrico, también se lo llama sistema Monge.

La invención de este sistema dio lugar a que los planos de cualquier proyecto, bien sea arquitectónico o industrial, se representen mayoritariamente mediante plantas, alzados y perfiles. Los principios teóricos en los que se basa esta forma de representación parten de la proyección de elementos sobre dos planos, generalmente perpendiculares entre sí.

El sistema diédrico utiliza métodos como los abatimientos, los giros y los cambios de plano para observar elementos desde posiciones más ventajosas, permitiéndonos así un mejor entendimiento de ellos. Son movimientos que podemos reconocer cuando dos personas observan un mismo objeto desde distintas ubicaciones, cuando una peonza gira alrededor de su eje o cuando las hojas de un libro se abaten unas sobre otras al pasar de página. Como vemos, se trata de buscar la manera de mirar adecuadamente las cosas, y este es un proceso delicado, como ocurre en el mundo de la física cuántica, donde cada mirada supone una alteración del mundo de lo diminuto.

- ¿Qué movimientos de tu vida cotidiana te permiten percibir las cosas con más claridad?

RUTA DE APRENDIZAJE

① Repasar los conceptos de punto, recta, plano.

② Intersecar elementos.

③ Trabajar paralelismo y perpendicularidad.

④ Calcular distancias.

⑤ Establecer abatimientos.

⑥ Saber hacer cambios de plano.

⑦ Realizar giros y determinar ángulos.

1 Repasamos punto, recta y plano

1.1. Mundo trazado

El suelo y una pared sobre los que se proyectan las sombras de diversos objetos nos dan una idea de su representación, algo que se utiliza en el teatro de sombras.

1.2. Representamos el punto

El **sistema diédrico** se compone de dos planos perpendiculares que se cortan según la línea de tierra (*LT*). Sobre ellos se proyectan los objetos a representar.

Cómo representar un punto en sistema diédrico

Para representar un punto *A* (fig. 1):

1. Proyecta ortogonalmente *A* sobre el plano horizontal (*PH*) en A_1 y sobre el vertical (*PV*) en A_2.
2. Abate *PV* sobre *PH* y coloca este haciéndolo coincidir con la hoja de papel. Verás la *LT* y las dos proyecciones unidas mediante una línea de referencia del punto, perpendicular a la *LT*.

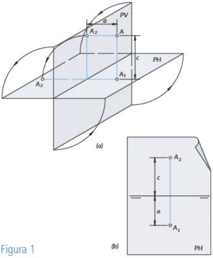


Figura 1

Algunas definiciones importantes sobre el punto son:

Cota del punto, *c*, es la distancia del punto a *PH*, o distancia de A_2 a *LT*.

Alejamiento del punto, *a*, es la distancia del punto a *PV*, o distancia de A_1 a *LT*.

Según el **cuadrante** en que esté situado el punto, sus proyecciones horizontal y vertical estarán por debajo o por encima de *LT* (fig. 2).

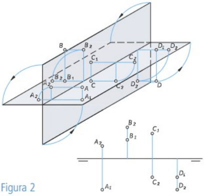


Figura 2

Sea un origen *O* sobre *LT* (fig. 3), un punto *P* queda definido por sus coordenadas diédricas $P(x, y, z)$:

x: distancia de O a la línea de referencia

Si $x > 0$, se toma a la derecha del origen.

Si $x < 0$, se toma a la izquierda del origen.

y: alejamiento o posición de P_1

Si $y > 0$, está por debajo de *LT*.

Si $y < 0$, está por encima de *LT*.

z: cota o posición de P_2

Si $z > 0$, está por encima de *LT*.

Si $z < 0$, está por debajo de *LT*.

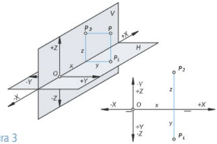


Figura 3

En el **sistema diédrico directo**, como los planos de proyección no tienen una posición concreta, se utiliza un sistema de coordenadas relativas entre dos puntos (fig. 4). La posición de un punto *B* respecto de otro *A* queda determinada por las distancias que hay entre ellos dos.

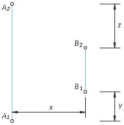


Figura 4

1.3. Representamos la recta

Una recta, en sistema diédrico, se obtiene uniendo dos puntos del sistema.

Cómo representar una recta en sistema diédrico

Para representar una recta *r* (fig. 5):

1. Proyecta ortogonalmente todos los puntos de la recta sobre *PH* en r_1 y sobre *PV* en r_2.
2. Abate *PV* sobre *PH* en sentido trigonométrico.

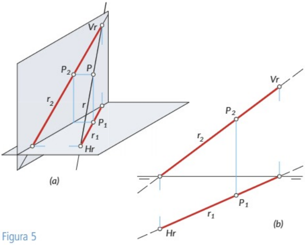


Figura 5

Algunas definiciones importantes sobre la recta son:

Traza horizontal

La traza horizontal, *Hr*, es la intersección de *r* con *PH*. Se determina trazando por el punto donde r_2 corta a *LT* la perpendicular hasta cortar a r_1.

Traza vertical

La traza vertical, *Vr*, es la intersección de *r* con *PV*. Se determina trazando por el punto donde r_1 corta a *LT* la perpendicular hasta cortar a r_2.

La recta puede adoptar cualquier posición en el espacio, representándose por sus proyecciones y sus trazas (fig. 6). Solo lo que se encuentra en el primer cuadrante se considera visto y, como las trazas marcan los puntos en los que la recta pasa de un cuadrante a otro, las trazas son los puntos que separan las partes vistas y ocultas de la recta.

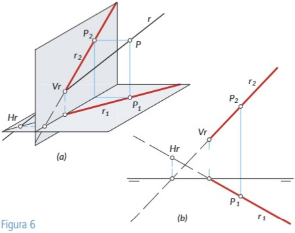


Figura 6

Según la posición que adopte una recta respecto de los planos de proyección (fig. 7), la denominarás:

Horizontal, *r*, es paralela a *PH*.

Frontal, *s*, es paralela a *PV*.

Vertical, *a*, es perpendicular a *PH*.

De punta, *b*, es perpendicular a *PV*.

De perfil, *c*, contenida en un plano de perfil.

Paralela a *LT*, *m*, o **que corta a *LT***, *n*.

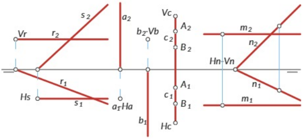


Figura 7

Una recta queda determinada por dos de sus puntos *r*: *A*(*x*, *y*, *z*) *B*(*x'*, *y'*, *z'*). Por tanto, basta con situar en primer lugar las proyecciones de ambos puntos (fig. 6) para que la proyección horizontal r_1 se obtenga al unir las proyecciones horizontales A_1 y B_1 y la proyección vertical r_2 al unir las proyecciones verticales A_2 y B_2.

Para encontrar las proyecciones de una recta en **sistema diédrico directo**, une las proyecciones homónimas, es decir, las que tienen el mismo nombre o subíndice (fig. 8).

En sistema diédrico directo, al no tener los planos de proyección una posición fija, las rectas no tienen trazas.

Si dos rectas *r* y *s* se cortan, significa que tienen un punto *P* común que pertenece a ambas, por tanto, la intersección de las proyecciones horizontales P_1 y de las proyecciones verticales P_2 coinciden en la misma línea de referencia (fig. 9).

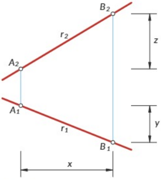


Figura 8

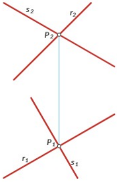


Figura 9

1.4. Representamos el plano

No puedes representar planos mediante proyecciones, como los puntos y las rectas, sino como intersecciones.

Cómo representar un plano en sistema diédrico

Para representar un plano α (fig. 10):

1. Marca las intersecciones α_1 y α_2 del plano α con los planos horizontal y vertical, respectivamente.
2. Abate *PV* sobre *PH* y observarás *LT* y las dos rectas de intersección α_1 y α_2, denominadas trazas del plano α.

Algunas definiciones importantes sobre el plano son:

Traza horizontal

La traza horizontal del plano, α_1, es la intersección del plano con el plano horizontal de proyección.

Traza vertical

La traza vertical del plano, α_2, es la intersección del plano con el plano vertical de proyección.

Las dos trazas del plano se cortan siempre en un punto de la línea de tierra al que se denomina **vértice del plano**.

Establecido un origen *O*, en la determinación del plano intervienen tres coordenadas $\alpha(x, y, z)$, con significado distinto a las del punto (fig. 11), donde *x* es la distancia del origen al vértice del plano, *y* es el alejamiento de la traza horizontal α_1 en el origen y *z* señala la cota de la traza vertical α_2 en el origen.

Dado un plano α (fig. 12), para que una recta *r* pertenezca a dicho plano, la traza horizontal *Hr* de la recta debe estar situada en la traza horizontal α_1 del plano y la traza vertical *Vr* de la recta debe estar en la traza vertical α_2 del plano.

Encontrarás rectas particulares del plano (fig. 13) como:

Horizontal, *r*

$r \parallel PH$, $r_1 \parallel \alpha_1$, $r_2 \parallel LT$

Frontal, *s*

$s \parallel PV$, $s_1 \parallel LT$, $s_2 \parallel \alpha_2$

De máxima pendiente, *a*

$a \perp \alpha_1$, $a_1 \perp \alpha_1$

De máxima inclinación, *b*

$b \perp \alpha_2$, $b_2 \perp \alpha_2$

En cuanto a la representación del plano en **sistema diédrico directo**, encontrarás diversas maneras de determinarlo: por un polígono cerrado y plano, por dos rectas que se cortan, por una recta y un punto exterior, por tres puntos no alineados o por dos rectas paralelas.

Puedes comprobar que una recta pertenece a un plano en sistema diédrico directo observando que dicha recta se corta con dos rectas del plano (fig. 14).

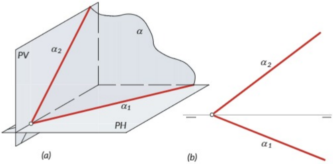


Figura 10

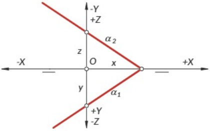


Figura 11

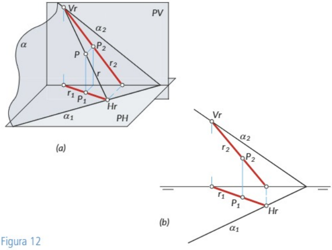


Figura 12

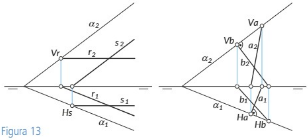


Figura 13

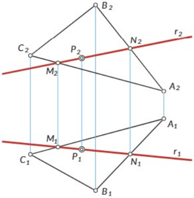
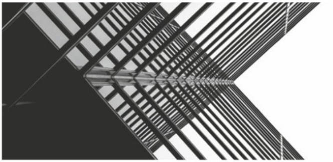


Figura 14

2 Hallamos intersecciones

2.1. Mundo trazado

Hablar de intersecciones es hablar de cruces, de encuentros. Las verás en todas partes, como en los edificios modernos: proezas de la geometría urbana.



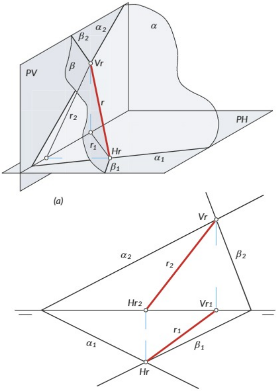
2.2. Hallamos la intersección de dos planos

La intersección de dos planos es una recta que pertenece a ellos y, por tanto, debe cumplir con cada uno las condiciones para que una recta pertenezca a un plano: las trazas de la recta deben estar contenidas en las trazas homónimas de cada uno de los planos.

Cómo hallar la intersección de dos planos

Dados los planos $\alpha(\alpha_1-\alpha_2)$ y $\beta(\beta_1-\beta_2)$ (fig. 15):

1. Determina la traza horizontal *Hr* de la recta *r* en la intersección de α_1 y β_1 y la traza vertical *Vr* de la recta en la intersección de α_2 y β_2.
2. Une la proyección horizontal Vr_1 de la traza vertical *Vr* con la traza horizontal *Hr*, obteniendo así la proyección horizontal r_1 de la recta. Une la proyección Hr_2 de *Hr* con la traza vertical *Vr*, hallando la proyección vertical r_2 de la recta.



(a)

(b)

Figura 15

2.3. Hallamos la intersección entre recta y plano

La intersección de una recta y un plano es un punto.

Cómo intersecar de forma general una recta y un plano

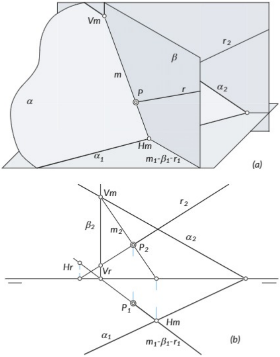
En el espacio, dados el plano α y la recta *r* (fig. 16a):

1. Traza un plano cualquiera β que contenga a la recta *r*.
2. Halla la recta *m* de intersección entre los planos α y β.
3. El punto *P* de intersección de las rectas *r* y *m* es el punto de intersección buscado. La solución es independiente del plano β elegido.

Cómo hallar el punto de intersección entre recta y plano

Dados el plano $\alpha(\alpha_1-\alpha_2)$ y la recta $r(r_1-r_2)$ (fig. 16b):

1. Traza un plano cualquiera β que contenga a la recta *r*. Si β es proyectante, las operaciones se simplifican.
2. Halla la recta *m* de intersección entre α y β. La proyección m_1 coincide con β_1 por ser β proyectante.
3. La proyección vertical P_2 del punto de intersección está donde se cortan las proyecciones m_2 y r_2.
4. Como las proyecciones horizontales m_1 y r_1 coinciden, halla la proyección horizontal P_1 trazando la perpendicular a *LT* desde P_2 hasta cortarlas.



(a)

(b)

Figura 16

2.4. Hallamos la intersección de una recta con un plano en sistema diédrico directo

Aprenderás la manera de obtener la intersección entre una recta con un plano dado por dos rectas secantes.

Cómo hallar la intersección de una recta con un plano paralelo a uno de los planos de proyección

Todos los puntos del plano tienen su proyección vertical en la traza vertical del plano. Sean la recta *t* y el plano dado por las rectas *r* y *s* (fig. 17):

1. La intersección de la proyección vertical t_2 de la recta con la traza vertical α_2 del plano, que coincide con r_2 y s_2, es la proyección vertical A_2 del punto.
2. Por A_2, traza la perpendicular a α_2 hasta la proyección horizontal t_1 y obtendrás A_1.

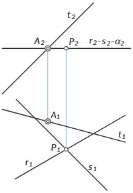


Figura 17

Cómo intersecar una recta con un plano proyectante

Si se trata de un plano proyectante vertical, las proyecciones verticales de las rectas que definen el plano se confunden con la traza vertical. El caso, por tanto, es igual al anterior (fig. 18).

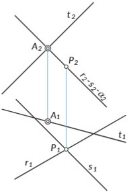


Figura 18

Cómo intersecar una recta con un plano oblicuo

Sean una recta *r* y un plano dado por dos rectas *m* y *n* que se cortan (fig. 19a): el proceso consiste en dibujar un plano proyectante β que contenga a *r* y hallar los puntos *A* y *B* de intersección de las rectas que definen el plano con β. La recta *p*, que une *A* y *B*, es la intersección de los planos y se cortará con *r* en *P*.

En diédrico, dadas la recta *r* y las rectas *m* y *n* que definen un plano (fig. 19b):

1. Traza un plano proyectante auxiliar β que contenga a la recta *r*. Su traza horizontal β_1 coincide con r_1.
2. Halla el punto *A* de intersección de *m* con el plano β y el punto *B* de intersección de *n* con el plano β.
3. La recta *p* que une *A* y *B* es la recta de intersección del plano β con el plano definido por *m* y *n*.
4. La intersección de las dos rectas *r* y *p* es el punto *P*.

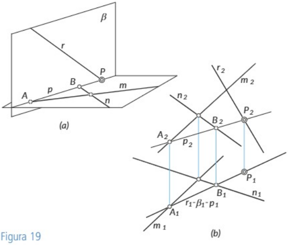


Figura 19

Actividades resueltas

① **Halla la intersección de *r* con el triángulo *ABC* (fig. 20).**

1. Observa que el plano proyectante vertical que contiene a *r* corta a los lados *AB* y *AC* del triángulo en los puntos *M* y *N*.
2. Donde *r* corta con la recta *MN* se encuentra el punto *P* de intersección. Halla la proyección horizontal P_1 donde se cortan r_1 y M_1N_1. Determina la proyección P_2 trazando por P_1 la correspondiente vertical hasta r_2.

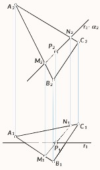


Figura 20

3 Trabajamos el paralelismo

3.1. Mundo trazado

Una fila de columnas paralelas arroja sombras paralelas. En diédrico sucede algo parecido, y puedes comprobarlo si colocas dos lápices de forma paralela: las sombras que arrojan cada uno de ellos sobre un suelo, una pared u otra superficie también son paralelas.

3.2. Conocemos el paralelismo entre rectas

En diédrico, la condición para que dos rectas sean paralelas (fig. 21) es que sus proyecciones horizontales r_1–s_1, y sus proyecciones verticales r_2–s_2, sean paralelas entre sí. Esto se cumple en todos los casos, a excepción de las rectas de perfil. Las proyecciones de una recta de perfil son perpendiculares a la línea de tierra, pero eso no significa que todas las rectas de perfil sean paralelas entre sí. Tiene que suceder que además, sean paralelas sus terceras proyecciones.

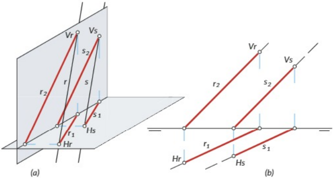


Figura 21

3.3. Conocemos el paralelismo entre planos

En diédrico, la condición para que dos planos α y β sean paralelos (fig. 22) es que sus trazas horizontales α_1–β_1 y sus trazas verticales α_2–β_2 sean paralelas entre sí. Esto se cumple en todos los casos, a excepción de los planos paralelos a la línea de tierra, cuyas trazas, además, deben ser paralelas en tercera proyección.

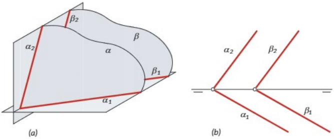


Figura 22

3.4. Vemos el paralelismo entre recta y plano

Una recta *r* es paralela a un plano α si en este existe al menos una recta *s* paralela a *r* (fig. 23). Por tanto, en diédrico deberás poder trazar una recta *s* que esté contenida en el plano α (las trazas de la recta *s* deben estar contenidas en las trazas del plano α, es decir, que la traza vertical de la recta *Vs* debe estar contenida en α_2, al igual que su traza horisontal *Hs* debe estar contenida en α_1) y que cumpla la condición de ser paralela a la recta *r* (sus proyecciones horizontales r_1–s_1, y sus proyecciones verticales r_2–s_2 deben ser paralelas).

Cuando una recta es paralela a un plano, las proyecciones de la recta y las trazas del plano, en diédrico, no guardan una relación especial entre ellas.

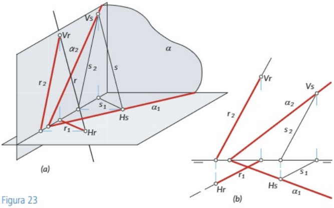


Figura 23

Actividades resueltas

② **Traza por el punto *P*(−10, 15, 15), una recta paralela a la recta *r*: *A*(5, 10, 0) *B*(25, 20, 15).**

1. Dos rectas son paralelas si sus proyecciones también lo son; luego, por la proyección horizontal P_1 del punto *P* (fig. 24), traza la paralela s_1 a la proyección horizontal r_1 de la recta *r*.
2. Por la proyección vertical P_2 del punto, traza la recta paralela s_2 a la proyección vertical r_2 de la recta dada en el enunciado.

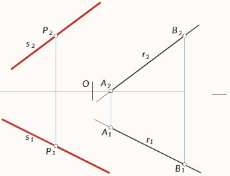


Figura 24

3.5. Trazamos por un punto un plano paralelo a otro dado

Para trazar por un punto un plano paralelo a otro dado, traza una recta horizontal o frontal que pertenezca al plano solución y utiliza la traza de dicha recta para hacer pasar por ella la traza homóloga del plano solución.

Cómo trazar por un punto un plano paralelo a otro

Dados el plano α y el punto $P(P_1 - P_2)$ (fig. 25):

1. Traza una recta horizontal *r*, que contenga a *P*, de manera que r_1 sea paralela α_1. Será paralela también a la traza horizontal β_1 del plano buscado.
2. Por la traza vertical *Vr* de la recta *r*, dibuja la traza vertical β_2 paralela a la traza vertical α_2 del plano dado.
3. Por el vértice del plano (punto donde la traza vertical β_2 corta a *LT*), dibuja la traza horizontal β_1 paralela a α_1.

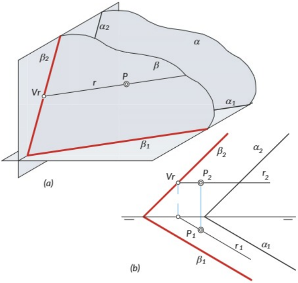
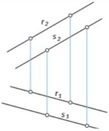


Figura 25

3.6. Vemos el paralelismo en diédrico directo

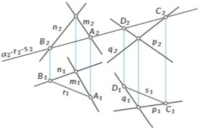
En sistema diédrico directo encontrarás paralelismo entre distintos elementos sujetos a algunas condiciones:

Entre 2 rectas *r* y *s*



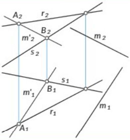
$r_1 \parallel s_1$, $r_2 \parallel s_2$

Entre 2 planos *m*−*n* y *p*−*q*



Un plano los cortará en rectas $r \parallel s$.

Entre recta *m* y plano *r*−*s*



Mínimo una recta $m' \parallel m$ contenida en el plano.

Cómo determinar el paralelismo entre dos planos

Dados dos planos $\alpha(m-n)$ y $\beta(p-q)$ (fig. 26):

1. Traza un plano δ proyectante vertical cualquiera.
2. Halla las rectas *r* y *s* de intersección de δ con α y β.
3. Si $r_1 - s_1$ y $r_2 - s_2$ son paralelas, α y β son paralelos.

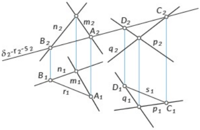


Figura 26

Actividades resueltas

③ **Traza por el punto $P(-15, 15, 15)$, un plano paralelo al plano $\alpha(15, 15, -15)$.**

1. Por *P*, traza la recta horizontal *r* (fig. 27), de manera que r_1 sea paralela a la traza horizontal α_1.
2. Por la traza vertical *Vr* de la recta, dibuja la traza vertical β_2 paralela a la traza vertical α_2.
3. Por el vértice del plano, dibuja la traza horizontal β_1 paralela a α_1.

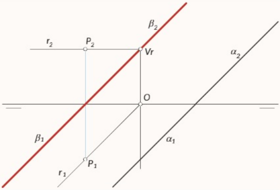


Figura 27

4 Trabajamos la perpendicularidad

4.1. Mundo trazado

Los árboles crecen rectos cuando su tronco forma 90° con el suelo. Hay perpendicularidad entre recta y plano.

4.2. Vemos la perpendicularidad entre recta y plano

En diédrico, a diferencia de lo que ocurre en paralelismo, dos rectas o dos planos que son perpendiculares no guardan relación especial entre sí.

En cambio, en el espacio (fig. 28), si una recta *r* es perpendicular a un plano α, la proyección r_1 de la recta sobre otro plano π cualquiera es siempre perpendicular a la intersección α_1 de ambos planos.

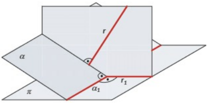


Figura 28

Si aplicas lo anterior al sistema diédrico (fig. 29), y consideras que el plano π es ahora *PH*, la proyección horizontal r_1 de la recta es perpendicular a la traza horizontal α_1 del plano; y con *PV* ocurrirá lo mismo, es decir, la proyección vertical r_2 de la recta será perpendicular a la traza vertical α_2 del plano.

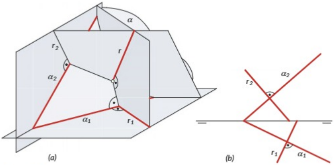


Figura 29

Cómo hallar un plano perpendicular a una recta y que contenga a un punto

Dados el punto $P(P_1-P_2)$ y la recta $r(r_1-r_2)$ (fig. 30):

1. Por *P*, traza una recta que pertenezca al plano solución: elige una recta horizontal *m* cuya proyección horizontal m_1 sea perpendicular a r_1, que será paralela a la traza α_1 del plano que se busca.
2. Halla la traza vertical *Vm*, y por este punto dibuja la traza vertical α_2 perpendicular a r_2.
3. Por el vértice del plano, dibuja α_1 perpendicular a r_1.

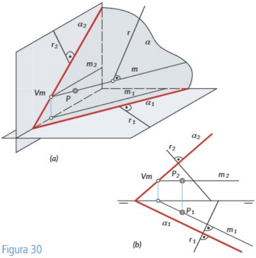


Figura 30

4.3. Vemos la perpendicularidad en sistema diédrico directo

El **teorema de las tres perpendiculares** determina que, si dos rectas son perpendiculares en el espacio y una de ellas es paralela a un plano, las proyecciones ortogonales de las rectas sobre el plano son perpendiculares entre sí.

Cómo hallar la recta perpendicular a una recta frontal que contenga a un punto

Sean la recta frontal *r* y un punto *P* (fig. 31):

1. Por la proyección vertical P_2 traza la perpendicular s_2 a la proyección r_2.
2. Determina la proyección horizontal A_1 del punto de intersección de ambas rectas y únelo con P_1 para obtener la proyección horizontal s_1 de la recta.

Si se trata de una recta horizontal, son las proyecciones horizontales r_1 y s_1 las que son perpendiculares (fig. 32).

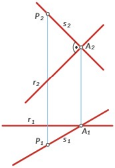


Figura 31

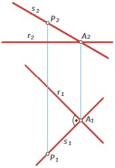


Figura 32

5 Trabajamos las distancias en diédrico

5.1. Mundo trazado

Muchos paneles indican la distancia entre lugares, siendo tanto más corta cuanto más recta es la línea que los une.

EQUATOR 5133 km
958 km
E
TOKYO 9567 km

5.2. Hallamos distancias

La distancia que separa dos puntos en el espacio no es la misma que la distancia que hay entre sus dos proyecciones horizontales A_1 y B_1, salvo que el segmento AB fuese paralelo al plano horizontal. Y lo mismo ocurre con la proyección vertical A_2B_2 del segmento.

Cómo hallar la distancia entre dos puntos

Sean los puntos $A(A_1-A_2)$ y $B(B_1-B_2)$ (fig. 33):

1. Por la proyección vertical B_2 de B, traza la paralela a LT hasta cortar a la línea de referencia de A en A'_2.
2. Por la proyección horizontal A_1 del otro punto, traza la perpendicular a la proyección horizontal A_1B_1.
3. Sobre la perpendicular a A_1B_1 lleva la diferencia de cotas $A_1A_0 = A'_2A_2$, siendo A_0B_1 la verdadera magnitud de AB.

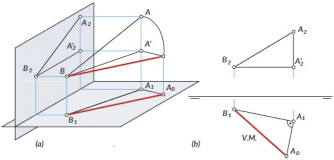


Figura 33

Cómo hallar la distancia de un punto a un plano

Sean el punto P y el plano α (fig. 34):

1. Por el punto P, traza la recta r perpendicular al plano a que interseca con él en el punto M.
2. Halla la distancia entre los puntos P y M.

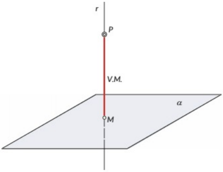


Figura 34

Cómo hallar la distancia de un punto a una recta

Sean el punto P y la recta r (fig. 35):

1. Por el punto P, traza el plano a perpendicular a r que interseca con la recta en el punto M.
2. Halla la distancia entre los puntos P y M.

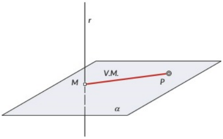


Figura 35

Cómo hallar la distancia entre dos rectas paralelas

Dadas las rectas r y s (fig. 36):

1. Traza un plano a perpendicular a las dos rectas r y s y halla los puntos M y N de intersección de α con r y s.
2. Halla la distancia entre los puntos M y N.

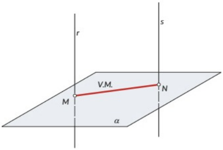


Figura 36

Cómo hallar la distancia entre dos planos paralelos

Dados los planos α y β (fig. 37):

1. Traza una recta r perpendicular a los dos planos α y β y halla los puntos M y N de intersección de r con α y β.
2. Halla la distancia entre los puntos M y N.

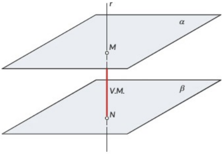


Figura 37

6 Trabajamos con abatimientos (I)

6.1. Mundo trazado

Cuando leemos un libro y pasamos de página lo que hacemos es abatir una página sobre otra.

6.2. Conocemos los abatimientos

Abatir un plano sobre otro es hacerlos coincidir al girar uno de ellos alrededor de la recta de intersección de ambos, a la que se denomina **charnela**. En diédrico, si abates un plano α sobre el plano horizontal, la charnela es su traza horizontal α_1, y si lo haces sobre el plano vertical, es α_2.

Abatirás siempre un plano, por tanto, cuando se habla de abatir puntos o rectas, se abate el plano que los contiene.

6.3. Realizamos el abatimiento de un punto

Al abatir un punto que se encuentra en un plano, el punto describe alrededor de la charnela un arco de circunferencia situado en un plano β perpendicular a ella.

Cómo abatir un punto sobre el plano horizontal

Dados el plano α y un punto *A* contenido en él:

En el espacio (fig. 38) se observa que:

1. La proyección horizontal A_1 y el punto abatido A_0 se sitúan en una recta perpendicular a la charnela α_1.
2. El radio del arco que describe el punto *A* es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con el punto *A*, su proyección A_1 y el punto *A'* de intersección de α_1 con la perpendicular por A_1.
3. Se abate sobre *PH* el triángulo AA_1A' en $A''A_1A'$.

En sistema diédrico (fig. 39):

1. Por la A_1 traza la paralela y la perpendicular a α_1.
2. Sobre la paralela, y a partir de A_1, lleva una longitud A_1A'' igual a la cota *c* del punto.
3. Con centro en *A'* y radio *A'A''*, describe un arco de circunferencia hasta cortar a la perpendicular en A_0.

Cómo abatir un punto sobre el plano vertical

Dados el plano α y un punto *A* contenido en él:

En el espacio (fig. 40), se repite el anterior cambiando las proyecciones horizontales por verticales, es decir, cambiando los subíndices 1 por 2 y *PH* por *PV*.

En sistema diédrico (fig. 41):

1. Por A_2 traza la paralela y la perpendicular a α_2.
2. Sobre la paralela, y a partir de A_2, traslada una longitud A_2A'' igual al alejamiento *a* del punto.
3. Con centro en *A'* y radio *A'A''* describe un arco de circunferencia hasta cortar a la perpendicular en A_0.

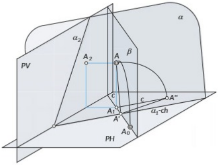


Figura 38

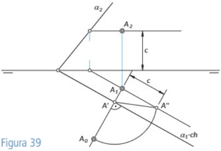


Figura 39

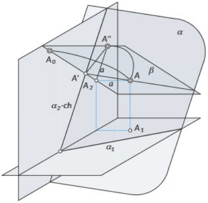


Figura 40

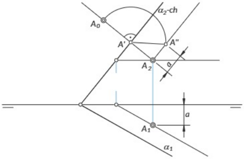


Figura 41

6.4. Realizamos el abatimiento de una recta

Aprenderás a abatir rectas sobre los planos de proyección o las trazas de un plano.

Cómo abatir una recta sobre el plano horizontal

Dados la recta *r* y el plano α que la contiene (fig. 42):

1. Elige un punto arbitrario $A(A_1–A_2)$ de la recta $r(r_1–r_2)$ y abátelo sobre el plano horizontal.
2. Une el punto abatido A_0 con la traza horizontal *Hr* de la recta que, al estar en la charnela, es un punto doble.

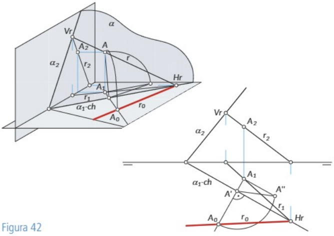


Figura 42

Cómo abatir las trazas de un plano

Dado el plano α del que vamos a abatir su traza $α_2$ (fig. 43):

1. Elige un punto arbitrario $A(A_1–A_2)$ de la traza vertical $α_2$ (los puntos situados en la traza vertical de un plano, tienen su proyección horizontal A_1 en la línea de tierra).
2. Por A_1 traza la perpendicular a la charnela $α_1$.
3. Con centro en el vértice *O* y radio OA_2, describe un arco que corta a la perpendicular anterior en A_0, pues en el espacio se cumple que $OA_2 = OA_0$.
4. Une A_0 con el vértice *O* del plano, obteniendo así $α_0$ que es la traza vertical del plano abatido.

El ángulo φ que forman $α_1$ y $α_0$ es la **amplitud del plano**.

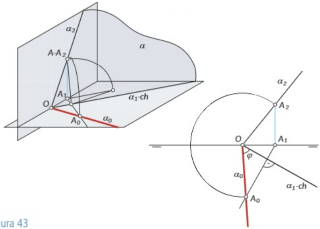


Figura 43

6.5. Abatimos una figura plana

El procedimiento de abatir las trazas de un plano te resultará práctico cuando tengas que abatir muchos puntos, como sucede al hacerlo con una figura contenida en un plano. En este caso, se hacen pasar por los vértices de la figura rectas horizontales del plano.

Cómo abatir una figura plana

Sean el plano α y la figura *ABC* (fig. 44):

1. Por el punto $A(A_1–A_2)$, traza la recta horizontal *a*.
2. Abate la traza vertical del plano en $α_0$, tomando como punto auxiliar, por ejemplo, la traza vertical *Va*.
3. Por V_0, traza la recta abatida a_0, paralela a $α_1$.
4. Halla el punto abatido A_0 allí donde se corta $α_0$ con la perpendicular a la charnela $α_1$ trazada por A_1.

El resto de los puntos se abaten igual que el punto *A*

5. Por B_1, traza la paralela a $α_1$ hasta cortar a la *LT*; por este punto, traza la perpendicular a $α_1$ hasta cortar a $α_0$; por este punto, traza la paralela a $α_1$; y por B_1 traza la perpendicular a $α_1$ hasta cortar a la paralela anterior en B_0.

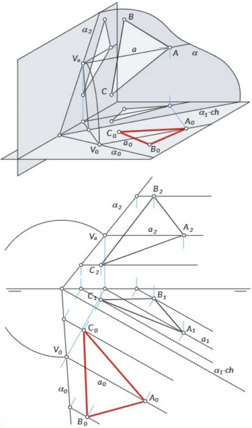


Figura 44

7 Trabajamos con abatimientos (II)

7.1. Mundo trazado

Hay móviles modernos que se pliegan, es decir, se abren y se cierran en un constante abatir y desabatir.

7.2. Desabatimos una figura plana

Para hallar las proyecciones de un hexágono regular contenido en un plano α conocido su centro O (fig. 45a), en primer lugar, abate O en O_0, dibuja el hexágono en V.M. de centro O_0 y, por último, desabate los vértices del hexágono.

Cómo situar un hexágono regular en un plano

Sean un plano α y un punto O contenido en él (fig. 45b):

1. Abate la traza vertical de α en α_0 y el punto O en O_0.
2. Con centro en O_0 dibuja el hexágono $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$.
3. Para hallar la proyección horizontal A_1, por ejemplo, traza a_0 paralela a α_1 hasta cortar a α_0, de ahí la perpendicular a α_1 hasta LT y de ahí a_1 paralela a α_1 hasta cortar a la perpendicular trazada por A_0 en A_1.
4. Traza la perpendicular a LT desde donde a_1 la corta hasta llegar a α_2 en Va, y luego la paralela a_2 a LT. Obtén A_2 con la perpendicular desde A_1 hasta a_2.

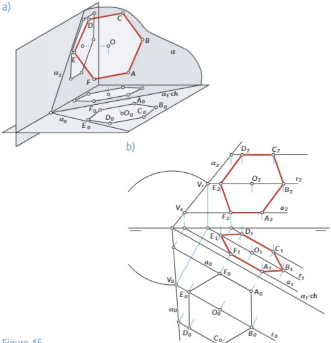


Figura 45

7.3. Proyectamos la circunferencia

Las proyecciones de una circunferencia situada en un plano son dos elipses, de las que trazarás sus ejes.

Cómo proyectar la circunferencia situada en un plano

Sean un plano α y un punto O contenido en él (fig. 46):

1. Abate la traza vertical de α en α_0 y el punto O en O_0.
2. Con centro en O_0 dibuja la circunferencia.
3. Divide la circunferencia en varias partes y desabate los puntos usando rectas horizontales.

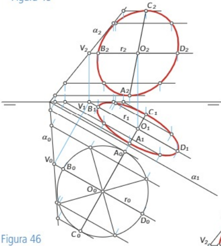


Figura 46

Cómo determinar los ejes de las elipses proyección

Para hallar los ejes de las elipses (fig. 47):

1. Abate la traza vertical de α en α_0 y el punto O en O_0.
2. Dibuja la circunferencia y divídela trazando por O_0 la paralela B_0D_0 y la perpendicular A_0C_0 a α_1, así como la paralela E_0G_0 y la perpendicular F_0H_0 a α_0.
3. Desabate los puntos. En proyección horizontal, A, C, B y D son los ejes de la elipse, y en proyección vertical son dos diámetros conjugados. En proyección horizontal, E, G, F y H son dos diámetros conjugados, y en proyección vertical, los ejes de la elipse.

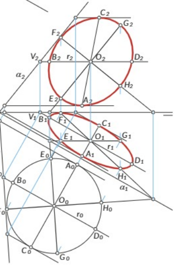


Figura 47

7.4. Abatimos en sistema diédrico directo

Abatir una figura plana cuando no se coloca línea de tierra consiste en hacerla girar alrededor de un eje, que se denomina **charnela**, hasta colocarla en posición horizontal o frontal. Si el eje es horizontal, el elemento queda abatido sobre un plano horizontal que contiene al eje; si este es frontal, el elemento queda abatido sobre un plano vertical.

Cómo abatir un punto en sistema diédrico directo

Sean el punto *P* y la recta horizontal *e* (fig. 48):

1. Por la proyección horizontal P_1 del punto, traza la paralela y la perpendicular a la charnela e_1.
2. Sobre la paralela, y a partir de P_1, lleva una longitud P_1P'' igual a la diferencia *x* de alturas entre el punto y la recta.
3. Con centro en *P'* y radio *P'P''*, describe un arco hasta cortar a la perpendicular en el punto P_0.

Si la recta es frontal (fig. 49), el proceso es similar.

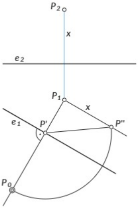


Figura 48

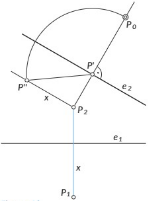


Figura 49

Cómo abatir una recta en sistema diédrico directo

Abatir una recta *r* alrededor de un eje horizontal *e* que la corta es lo mismo que abatir el plano que determinan ambas rectas hasta colocarlo horizontal (fig. 50).

Sean la recta *r* y la recta horizontal *e* (fig. 51) que corta a *r* en el punto *A*:

1. Elige un punto *B* cualquiera de la recta *r* y abate alrededor de la charnela *e*, como en el caso anterior.
2. La recta r_0 que une los puntos abatidos B_0 y A_0 es la recta *r* abatida.

Si las rectas *r* y *e* pertenecen a un plano proyectante horizontal (sus proyecciones horizontales r_1 y e_1 coinciden), las operaciones se simplifican (fig. 52):

1. Elige un punto *B* cualquiera de la recta *r* y abate alrededor de la charnela *e*: a) por la proyección horizontal B_1, traza la perpendicular a e_1; b) sobre la perpendicular traslada la distancia B_1B_0 igual a la diferencia *x* de cotas entre los puntos *A* y *B*.
2. La recta r_0 que une los puntos abatidos B_0 y A_0 es la recta *r* abatida.

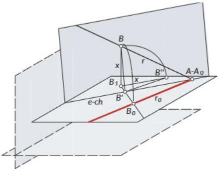


Figura 50

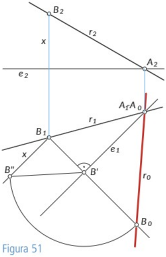


Figura 51

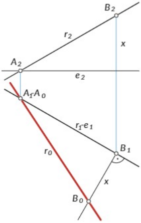


Figura 52

Cómo abatir un plano en sistema diédrico directo

Dados el plano determinado por las rectas *r* y *s*, y la recta horizontal *e* contenida en dicho plano (fig. 53):

1. Abate el punto *P* de intersección de las rectas *r* y *s*, tal y como se ha explicado anteriormente.
2. Las rectas r_0 y s_0 que unen el punto abatido P_0 con A_1 y B_1 determinan el plano abatido de manera que ambas pueden verse en verdadera magnitud.

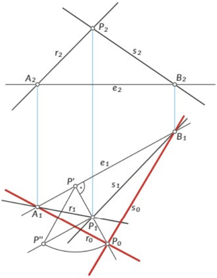


Figura 53

8 Hacemos cambios de plano (I)

8.1. Mundo trazado

En un plató de televisión, varias cámaras filman desde distintos ángulos. El telespectador percibe cambios de plano cuando se cambia de una cámara a otra. Cuando se cambia de plano, todos los elementos proyectados o contenidos en él cambian de posición, pero no cambian de posición ni los elementos del espacio ni las proyecciones sobre el otro plano. Esto sirve para colocar los elementos en posiciones más favorables de cara a la resolución de ejercicios.

8.2. Cambiamos de plano un punto

En un cambio de *PV*, cambia la posición de la *LT*, que se distingue de la primitiva porque se representa con dos rayitas en cada extremo en lugar de con una. Para indicar el tipo de cambio que se efectúa se coloca *PV'* en un extremo de la *LT*.

Cómo cambiar un punto en un cambio de plano vertical

En el espacio (fig. 54a):

1. El punto *P* y su proyección P_1 sobre el *PH* no cambian de posición, su cota sigue siendo la misma.
2. La proyección vertical P_2, al desaparecer el plano vertical, pasa a estar en otro lugar.

En diédrico (fig. 54b):

1. La proyección horizontal primitiva P_1 coincide con la nueva proyección horizontal P'_1.
2. Traza, por la proyección horizontal P'_1, la perpendicular a la nueva línea de tierra y, a partir de ella, traslada la cota *c* que hay desde P_2 a la línea de tierra primitiva, determinando así la nueva proyección P'_2.

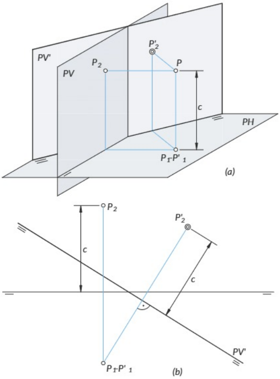


Figura 54

Al cambiar el *PH*, cambia la posición de *LT*, que también se representa con dos rayitas por debajo de los extremos, indicando el tipo de cambio *PH'*.

Cómo cambiar un punto en un cambio de plano horizontal

En el espacio (fig. 55a):

1. El punto *P* y su proyección P_2 sobre el *PV* no cambian, su alejamiento sigue siendo el mismo.
2. La proyección horizontal P_1, al desaparecer el plano horizontal, pasa a estar en otro lugar.

En diédrico (fig. 55b):

1. La proyección vertical P_2 primitiva coincide con la nueva proyección vertical P'_2.
2. Traza, por la proyección vertical P'_2, la perpendicular a la nueva línea de tierra, y a partir de ella, traslada el alejamiento *a* que hay desde P_1 a la *LT* primitiva, hallando así la nueva proyección horizontal P'_1.

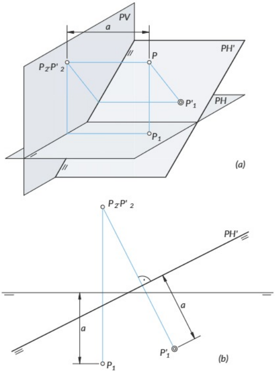


Figura 55

8.3. Cambiamos de plano una recta

El procedimiento de cambio de plano de una recta consiste en cambiar de plano dos puntos de ella.

Cómo cambiar una recta en un cambio de plano vertical

Sean la recta *r* y una nueva línea de tierra (fig. 56):

1. Toma dos puntos $A(A_1–A_2)$ y $B(B_1–B_2)$ de la recta *r*.
2. Por las proyecciones horizontales A_1 y B_1, traza las perpendiculares a la nueva línea de tierra.
3. Sobre las perpendiculares anteriores, y a partir de la nueva línea de tierra, traslada las cotas de los puntos *A* y *B*, respectivamente, hallando así las nuevas proyecciones verticales A'_2 y B'_2.
4. Une las proyecciones A'_2 y B'_2 para determinar la nueva proyección vertical r'_2 de la recta.

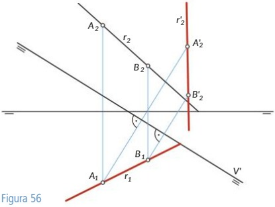


Figura 56

Actividades resueltas

④ **Convierte, mediante cambios de plano, la recta *r*: *A*(0; 14,5; 6,5) *B*(30, 0, 19) en una recta frontal.**

1. Sitúa la recta *r* mediante los puntos *A* y *B* (fig. 57). Une las proyecciones homónimas de ambos puntos.
2. Coloca el plano vertical paralelo a la recta *r*, para lo cual dibuja la nueva línea de tierra paralela a la proyección horizontal r_1 de la recta, sin importar la distancia a la que la coloques.
3. Toma dos puntos cualesquiera de la recta *r* y determina sus nuevas proyecciones (uno de los dos puntos puede ser la traza horizontal *Hr*, tal y como sucede en la figura).
4. Para convertir una recta cualquiera en horizontal, efectúa un cambio de plano horizontal, colocando este paralelo a la recta; la línea de tierra será ahora paralela a la proyección vertical r_2 de la recta. A continuación, toma dos puntos y efectúa el cambio de plano horizontal.

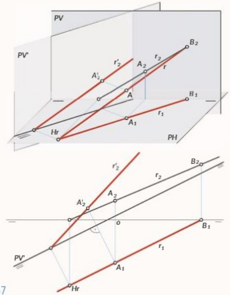


Figura 57

⑤ **Convierte, por cambios de plano, la recta frontal *r*: *A*(10, 10, 10) *B*(–10, 10, 30) en una recta vertical.**

1. Sitúa la recta *r* mediante los puntos *A* y *B* (fig. 58). Une las proyecciones homónimas de ambos puntos.
2. Coloca el plano horizontal perpendicular a la recta *r*, para lo cual dibuja la nueva línea de tierra perpendicular a la proyección vertical r_2 de la recta.
3. Toma dos puntos de la recta, por ejemplo, *A* y *B*, y halla sus nuevas proyecciones. Como se trata de un cambio de plano horizontal, las proyecciones verticales A'_2 y B'_2 coinciden con las primitivas y las proyecciones horizontales A'_1 y B'_1 coinciden entre sí por tener el mismo alejamiento.

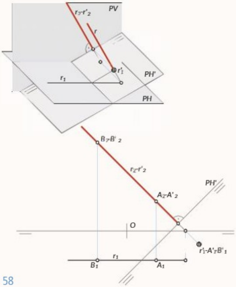


Figura 58

9 Hacemos cambios de plano (II)

9.1. Mundo trazado

Muchas ilusiones ópticas dependen del plano desde el que se miran. Basta un cambio para perderlas de vista.

9.2. Cambiamos de plano un plano

En un cambio de plano vertical (fig. 59), la traza horizontal α_1 del plano sigue siendo la misma, pero la traza vertical α_2, es decir, la intersección del plano α con el nuevo plano vertical es otra; el nuevo vértice *O′* del plano está donde se corta la traza α_1 con la nueva línea de tierra.

La recta de intersección de los dos planos verticales, *PV* y *PV′*, se corta con la traza vertical α_2 en un punto *M* cuya proyección horizontal está donde se cortan ambas líneas de tierra; dicho punto *M* es un punto doble que pertenece a las dos trazas verticales α_2 y α'_2 del plano.

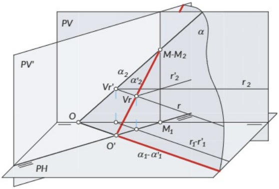


Figura 59

Cómo cambiar las trazas de un plano en un cambio de plano

Primer procedimiento (fig. 60):

1. Toma el punto *M* de la traza vertical α_2 del plano cuya proyección horizontal M_1 coincide con el punto de intersección de las dos líneas de tierra.
2. Halla las nuevas proyecciones de *M*: por $M_1-M'_1$ traza la perpendicular a la nueva *LT* y transporta la cota del punto, determinando M'_2.
3. Determina la nueva traza vertical α'_2 uniendo M'_2 con el nuevo vértice *O′* (donde α_1 se corta con la nueva *LT*). La traza horizontal α'_1 es la misma que antes: α_1.

Segundo procedimiento (es útil cuando las dos líneas de tierra no se cortan dentro de los límites del dibujo) (fig. 61):

4. Elige una recta horizontal $r(r_1-r_2)$ cualquiera.
5. Halla la nueva proyección vertical r'_2 mediante un punto cualquiera *N*, y halla su nueva traza vertical *Vr′*.
6. Une *Vr′* con el nuevo vértice *O′* y obtendrás α'_2 (en caso de no disponer de *O′*, elige otra recta horizontal y halla su nueva traza vertical).

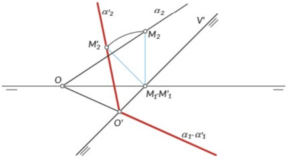


Figura 60

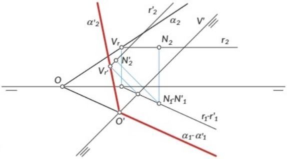


Figura 61

Actividades resueltas

6 **Convierte, mediante cambios de plano, el plano α(−30, 17, 12) en un plano proyectante vertical.**

1. Sitúa α (fig. 62) y coloca el *PV* perpendicular a él, para lo cual dibuja la nueva *LT* perpendicular a α_1, sin importar la distancia a la que la coloques.
2. Toma el punto *M* de la traza vertical α_2 cuya proyección horizontal M_1 coincide con el punto de intersección de las dos *LT* y halla la nueva proyección vertical M'_2 que, unida con el nuevo vértice del plano, determina la nueva proyección vertical α'_2.

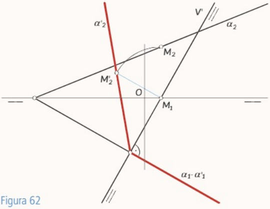


Figura 62

9.3. Cambiamos de plano en diédrico directo

En sistema diédrico directo también te resultarán muy útiles los cambios de plano de puntos, rectas y planos.

Cómo cambiar un punto en un cambio de plano

Al efectuar un cambio de plano vertical (fig. 63) la dirección *d* de las nuevas líneas de referencia de los puntos será perpendicular a la hipotética línea de tierra que no se dibuja.

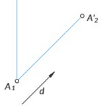


Figura 63

Cómo cambiar una recta en un cambio de plano

Dadas la recta *r* y la dirección *d* de un cambio de plano vertical (fig. 64):

1. Elige dos puntos *A* y *B* cualesquiera de la recta.
2. Por las proyecciones horizontales A_1 y B_1 traza paralelas a la dirección *d* y sitúa las nuevas proyecciones verticales A'_2 y B'_2, tal que la diferencia de cotas entre ambas sea la misma.

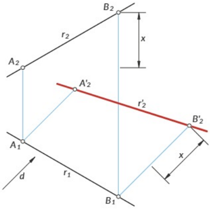


Figura 64

Cómo cambiar un plano en un cambio de plano

Para determinar las nuevas proyecciones de un plano (dado por un polígono, dos rectas que se cortan, etc.), basta con cambiar tres puntos cualesquiera, teniendo en cuenta la diferencia de cotas entre ellos.

Para convertir un plano cualquiera, dado por las rectas *r* y *s*, en un plano proyectante vertical (fig. 65):

1. Traza la recta horizontal *t* del plano dado. La dirección *d* del cambio de plano será paralela a la proyección horizontal t_1.
2. Efectúa el cambio de plano de los puntos *A*, *B* y *P* teniendo en cuenta la diferencia *x* de cotas entre ellos.
3. Une las proyecciones verticales de los puntos y obtén las proyecciones verticales de *r* y *s* que definen el plano.

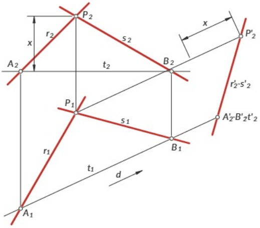


Figura 65

Actividades resueltas

7 Determina la verdadera magnitud del segmento *AB*.

1. El problema consiste en convertir el segmento dado en un segmento frontal (fig. 66), es decir, paralelo a un hipotético plano vertical. La dirección *d* de proyección correspondiente al cambio de plano vertical será, pues, perpendicular a la proyección horizontal A_1B_1.
2. Por las proyecciones horizontales A_1 y B_1, traza paralelas a la dirección *d* y sitúa las proyecciones verticales A'_2 y B'_2 de manera que la diferencia de cotas se mantenga. La nueva proyección vertical $A'_2B'_2$ está en verdadera magnitud.

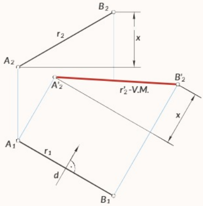


Figura 66

10 Hacemos giros (I)

10.1. Mundo trazado

Los coches giran en torno a la rotonda ocupando distintas posiciones; se trata de un giro alrededor de un eje.

10.2. Conocemos los giros

Cuando un punto gira alrededor de una recta describe una circunferencia cuyo plano es perpendicular a la recta, el centro es la intersección de la recta con el plano y el radio es la distancia del punto a la recta.

A la recta alrededor de la que se gira se la denomina eje de giro. Los ejes serán perpendiculares a uno de los dos planos de proyección, es decir, los giros se realizarán alrededor de una recta vertical o de una recta de punta.

Al girar un punto alrededor de un eje vertical (fig. 67a), el punto describe alrededor del eje una circunferencia paralela al *PH*; la proyección horizontal de esa circunferencia tiene el mismo radio que la anterior, cuyo centro coincide con la proyección horizontal del eje, que es un punto; y la proyección vertical de la circunferencia es un segmento paralelo a la *LT*, cuya longitud es igual al diámetro de la circunferencia. Tendrás en cuenta las mismas consideraciones anteriores en un giro alrededor de un eje de punta (fig. 68a).

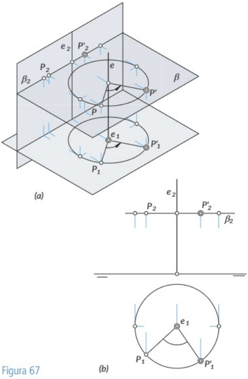


Figura 67

10.3. Realizamos el giro de un punto

Saber girar un punto es importante para, a partir de él, girar rectas y planos que colocar en posiciones favorables.

Cómo girar un punto alrededor de un eje vertical

Sean el eje *e* y un punto *P* (fig. 67b):

1. Haciendo centro en la proyección horizontal e_1 y radio e_1P_1, describe un arco de un determinado ángulo y sentido, hasta la posición P'_1
2. Por P_2 dibuja la paralela a la *LT* y traza vertical β_2 del plano que contiene a la circunferencia.
3. Por la nueva proyección horizontal P'_1, traza la perpendicular a la *LT* hasta cortar en P'_2 a la paralela trazada en el punto anterior.

Cómo girar un punto alrededor de un eje de punta

Sean el eje *e* y un punto *P* (fig. 68b):

1. Haciendo centro en la proyección vertical e_2 y radio e_2P_2, describe un arco de un determinado ángulo y sentido, hasta la posición P'_2.
2. Por P_1 dibuja la paralela a la *LT* y traza horizontal β_1 del plano que contiene a la circunferencia.
3. Por la nueva proyección vertical P'_2 traza la perpendicular a la *LT* hasta cortar en P'_1 a la paralela anterior.

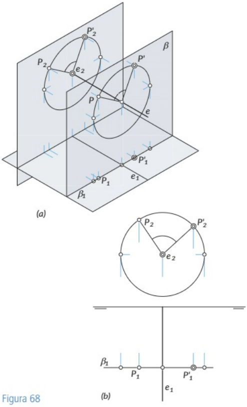


Figura 68

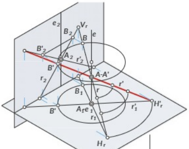
10.4. Realizamos el giro de una recta

Estudiarás los casos en los que la recta y el eje se cortan.

Cómo girar una recta

Sean el eje *e*, perpendicular al plano horizontal, y la recta *r*, que corta al eje en el punto *A* (fig. 69):

1. Elige un punto arbitrario $B(B_1-B_2)$ de la recta *r*.



2. Gira B, alrededor del eje, un ángulo determinado, hasta colocarlo en su nueva posición $B'(B'_1-B'_2)$.
3. Une el punto B' con A que, por pertenecer al eje, es un punto doble, obteniendo la recta r'; la proyección r'_1 se obtiene al unir A_1 y B'_1, y r'_2 se halla uniendo A_2 y B'_2.

Si e fuese perpendicular a PV, el proceso es análogo.

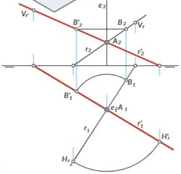


Figura 69

Cómo convertir una recta cualquiera en una frontal

Sea una recta r cualquiera (fig. 70):

1. Traza un eje e cualquiera, perpendicular al plano horizontal, que corte a r, por ejemplo, en $A(A_1-A_2)$; por tanto, la proyección horizontal e_1 está en r_1.
2. Elige un punto cualquiera $B(B_1-B_2)$ de la recta r.
3. Haciendo centro en e_1 y con radio e_1B_1, describe un arco de circunferencia, de manera que A_1 y B'_1 queden alineados según una paralela a la LT.
4. Halla la nueva proyección vertical B'_2, trazando por B_2 la paralela a la LT y por B'_1 la perpendicular.
5. Une el punto B' con A, que, por pertenecer al eje, es un punto doble, obteniendo la recta $r'(r'_1-r'_2)$.

Para convertir una recta cualquiera en horizontal, se elige un eje cualquiera que, cortando a la recta, sea perpendicular al PV, girando a continuación la recta hasta que su proyección vertical sea paralela a LT.

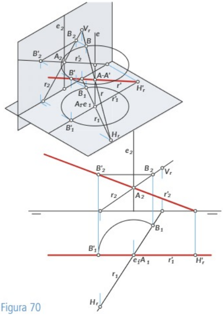


Figura 70

10.5. Realizamos el giro de un plano

Estudiarás el caso de giro de un plano oblicuo.

Cómo girar un plano

Sean el eje e y el plano α (fig. 71):

1. Halla el punto A de intersección de α con el eje: traza la recta horizontal r de forma que r_1 pase por e_1 (A_1 coincide con e_1 y A_2 está donde se cortan r_2 y e_2).
2. Gira α_1: elige el punto M de intersección de α_1 con la perpendicular trazada desde e_1, después, gira M hasta la posición M'. Traza por M' la perpendicular α'_1 al segmento e_1M', que corta a LT en O'.
3. La nueva traza vertical α'_2 parte de O'; otro punto de α'_2 es la traza vertical Vr' de la recta horizontal r', que tiene su proyección horizontal $r'1$ paralela a α'_1. Uniendo O' y Vr' se obtiene α'_2.

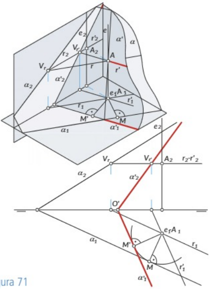


Figura 71

---

11 Hacemos giros (II)

11.1. Mundo trazado

No solo giran los molinos y los ventiladores, sino también muchas partes de nuestro cuerpo. Fíjate en los gimnastas.

11.2. Realizamos giros en diédrico directo

El giro de un punto y una recta en sistema diédrico directo es idéntico al empleado con línea de tierra.

Cómo girar un punto en sistema diédrico directo

Sean el eje *e* vertical y un punto *P* (fig. 72):

1. Haciendo centro en la proyección horizontal e_1 y radio e_1P_1, describe un arco de un determinado ángulo y sentido, hasta la posición P'_1.
2. Por la proyección vertical P_2 del punto, dibuja la perpendicular a la proyección vertical e_2 del eje.
3. Por la nueva proyección horizontal P'_1 traza la línea de referencia del punto hasta cortar en P'_2 a la perpendicular anterior.

Si el eje hubiera sido una recta de punta (fig. 73), el procedimiento habría sido similar.

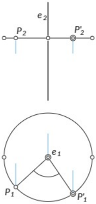


Figura 72

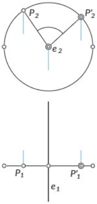


Figura 73

Cómo girar una recta en sistema diédrico directo

De forma análoga al caso anterior, la *LT* tampoco interviene; por tanto, el proceso es el mismo que se emplea cuando se utiliza la *LT* (fig. 74).

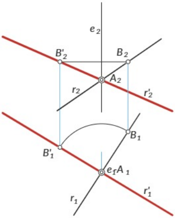


Figura 74

Cómo girar un plano en sistema diédrico directo

Sea el plano dado por las rectas *r* y *s* (fig. 75). Para convertirlo en un plano proyectante vertical:

1. Traza un eje vertical cualquiera y halla el punto de intersección con el plano dado; en nuestro caso, se ha hecho pasar por el punto *P* de intersección de *r* y *s*.
2. Dibuja una recta *t* horizontal del plano dado que corta a las rectas *r* y *s* en *A* y *B*, respectivamente.
3. La recta *t* se ha de convertir en una recta de punta cuando el plano sea proyectante vertical. Gira *t* hasta colocarla de punta: toma M_1 que se encuentra en la intersección de t_1 y la perpendicular trazada desde e_1 y gira hasta colocarlo de manera que el segmento $e_1M'_1$ sea paralelo a *PV*. La nueva proyección horizontal t'_1 es perpendicular a $e_1M'_1$.
4. Gira los puntos *A* y *B*, pertenecientes a *t*, hasta situarlos en *t'* girada: con centro en e_1 y radios e_1A_1 y e_1B_1 se describen arcos hasta cortar a t'_1. La cota de A'_2 y B'_2 no varía por ser una recta horizontal.
5. Las rectas *r'* y *s'* que definen el plano girado se obtienen al unir *A'* y *B'* girados con el punto *P*.

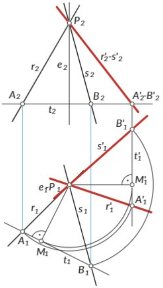


Figura 75

---

12 Calculamos ángulos

12.1. Mundo trazado

Los faldones de un tejado forman un ángulo entre planos.

12.2. Hallamos el ángulo de dos rectas

Para hallar el valor del ángulo que forman dos rectas que se cortan basta con abatir el plano que determinan.

Cómo determinar el ángulo entre dos rectas secantes

Sean las rectas *r* y *s* que se cortan en el punto *A* (fig. 76):

1. Halla la traza horizontal α_1 del plano que determinan *r* y *s* uniendo las trazas horizontales *Hr* y *Vr* de ambas rectas.
2. Abate *A*: por A_1 traza la perpendicular y la paralela a la charnela α_1; sobre la paralela traslada la cota de *A*; con centro en *A'* y radio *A'A''* describe un arco que corta a la perpendicular en el punto abatido A_0.
3. Halla las rectas abatidas r_0 y s_0 uniendo el punto A_0 con las trazas horizontales *Hr* y *Vr*, respectivamente. El ángulo φ que forman las rectas abatidas r_0 y s_0 está en verdadera magnitud.

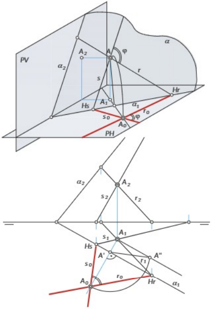


Figura 76

12.3. Hallamos los ángulos que forma una recta con los planos de proyección

Para hallar el ángulo que forma una recta *r* con *PH* basta con abatir el plano proyectante horizontal que la contiene. Para determinar el ángulo con *PV* se abate el plano proyectante vertical que la contiene.

Cómo hallar el ángulo de una recta con los planos de proyección

Sea la recta $r(r_1 – r_2)$ (fig. 77):

1. Por la proyección horizontal de la traza vertical *Vr* de *r*, traza la perpendicular a r_1 y lleva sobre esta la cota de *Vr*, obteniendo Vr_0 que, unido con la traza horizontal *Hr*, determina la recta abatida r_0.
2. Por la proyección vertical de la traza horizontal *Hr* de *r*, traza la perpendicular a r_2 y lleva sobre esta el alejamiento de *Hr*, obteniendo Hr_0 que, unido con la traza vertical *Vr*, determina la recta abatida r'_0. El ángulo φ entre r_0 y r_1 es el que forma *r* con el *PH* y el ángulo φ' entre r'_0 y r_2 es el que forma *r* con el *PV*.

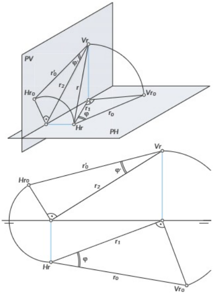


Figura 77

12.4. Conocemos los ángulos que forma un plano con los planos de proyección

El ángulo que forma un plano cualquiera con *PH* es el que forma una recta de máxima pendiente con él (fig. 78), y el ángulo con *PV*, el de una recta de máxima inclinación.

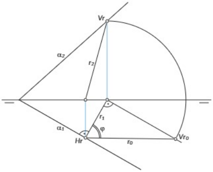


Figura 78

---

13 Panorámica

13.1. El sistema Monge: un secreto de Estado

UN PEQUEÑO GRAN TRAZO

Gaspard Monge nació en Beaune en 1746. Con verdaderas dotes para las ciencias, con tan solo 16 años ya enseñaba Física en el colegio de los Oratorios de Lyon.

Monge demostró que poseía una visión espacial extraordinaria al dibujar un plano a gran escala de Beaune en 1762. Un coronel, que contempló tal proeza, propuso a Gaspard para ingresar en la escuela de ingenieros militares de Mézières, pero al no ser noble de cuna, tuvo que conformarse con ser admitido como aparejador.

Gaspard Monge fue un gran revolucionario en el diseño y la construcción de fortificaciones. En aquella época se usaban engorrosos métodos matemáticos para hacer cálculos de optimización de emplazamientos, problemas que Gaspard resolvía de forma sencilla con los métodos geométricos desarrollados por él mismo. Por ello, en el año 1769 ocuparía la cátedra de Matemáticas e iniciaría sus famosos cursos sobre Geometría Descriptiva, considerada como un secreto militar hasta 1795.

Gaspard Monge fue un magnífico profesor, admirado por sus alumnos. En París fundó el Instituto Nacional de Francia y la Escuela Politécnica. Llegó a ser ministro de Marina y amigo confidente de un joven Napoleón, con quien participó en una famosa expedición a Egipto. Tras la caída de Bonaparte, con quien llegó a ser conde y senador, fue expulsado de sus funciones y murió sin recursos económicos y condenado al ostracismo en 1818.

1 **Argumenta por qué crees que el trabajo de Gaspard Monge fue considerado un secreto de Estado.**

2 **Visita la obra original de Gaspard Monge en www.e-sm.net/revdib2bach04_01, busca las ilustraciones y anota las similitudes que encuentras con los procedimientos que has aprendido.**

13.2. Dar el paso al BIM: La importancia de un plan de implementación

DESAFÍO BIM

Un **plan de implementación BIM** (PIB en español o BIP por sus siglas en inglés) consiste en una hoja de ruta que te guiará para que siempre sepas en qué punto estás y adónde quieres llegar cuando tu despacho de arquitectura o ingeniería quiera dar el salto al BIM.

Los meses de implantación de este plan son los más difíciles y menos productivos. Se trata de una época de autoanálisis, formación y de cambios en los que definirás algunos elementos clave:

Programas

Una vez hecho el análisis inicial, habrá que elegir los programas con los que se trabajará en tu despacho teniendo en cuenta sus prestaciones y el uso en el mercado. Todos los miembros de tu equipo deben trabajar con estas mismas herramientas, que permitirán la elaboración de proyectos o trabajos de forma colaborativa.

Tareas

Es importante definir el papel que tendrá cada persona. Por ejemplo, un modelador BIM es quien dibuja el proyecto que ha diseñado el arquitecto o ingeniero jefe, mientras que un coordinador BIM se encargaría de la revisión y la detección de fallos del proyecto y de repartir el trabajo entre los modeladores.

Formación

Como las cosas se harán de forma diferente de como se hacían antes, el equipo tendrá que recibir formaciones para saber manejar uno o varios programas complejos. Será necesaria una previsión para cubrir adecuadamente las necesidades formativas del proyecto, ya que no se puede cambiar al BIM de un día para otro.

3 **¿Por qué crees que los meses de implantación de BIM son los más difíciles? ¿Qué otros puntos clave crees que son necesarios definir en un PIB? Explica con tus propias palabras las respuestas.**

CONCEPTOS CLAVE

SISTEMA DIÉDRICO

consta de

Elementos del sistema diédrico

que son

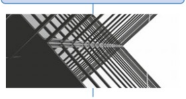
Punto, recta y plano: elementos básicos del sistema que permiten construir todo el sistema de representación.

que te permiten conocer

Posiciones.
Representación mediante coordenadas.
Representación en diédrico directo.
Trazas.

con los que podrás aplicar

Intersecciones



que son

Elementos comunes a otros elementos geométricos y permiten intersecar rectas, planos, y recta y plano.

Paralelismo

que es

Posición relativa que adoptan rectas y planos que se cortan en el infinito.

Perpendicularidad

que es

Posición relativa que adoptan rectas y planos que se cortan formando un ángulo recto.

Distancias

TOKYO 9567 km
SYDNEY 2000 km

que son

Verdaderas magnitudes que separan elementos geométricos.

Abatimientos

que son

Métodos para hacer coincidir dos planos que giran alrededor de una charnela o bisagra.

Cambios de plano

que consisten en

Colocación de planos de proyección en una posición distinta cuya vista sea más favorable para resolver problemas.

Giros

que consisten en

Situar puntos, rectas y planos en una posición distinta al girarlos alrededor de un eje.

Ángulos

que son

La porción de plano en verdadera magnitud limitada por dos rectas, dos planos, o una recta y un plano.

ACTIVIDADES CLAVE RESUELTAS

Paralelismo y distancias

1 **Halla las trazas de un plano α paralelo al plano β(27, 17, 27) situado 7 mm por debajo de α.**

Solución:

a. Traza una recta *r* cualquiera perpendicular al plano β (fig. 79) y halla el punto *A* de intersección.

b. Toma un punto *M* arbitrario de la recta *r* y determina la verdadera magnitud A_1M' del segmento *AM*.

c. Sobre A_1M', que está en verdadera magnitud, toma la distancia $A_1B' = 7$ mm y retrocede la operación: por *B'*, traza la perpendicular a la proyección horizontal r_1 hasta B_1 y sube la perpendicular hasta r_2, que determina la proyección vertical B_2.

d. Por el punto *B*, dibuja el plano α paralelo al plano β.

Escala 4:5

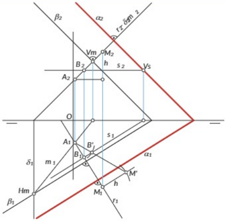


Figura 79

Perpendicularidad, giro y distancias

2 **Dibuja el plano que contiene a *r*: *A*(−30, 0, 35) *B*(15, 15, 0) y es perpendicular a α(−20, 20, 10).**

Solución:

a. Elige un punto *P* cualquiera de la recta *r* (fig. 80).

b. Por *P*, traza la recta *s* perpendicular al plano α.

c. Las rectas *r* y *s*, que se cortan en el punto *P*, determinan el plano β que se pide.

Escala 4:5

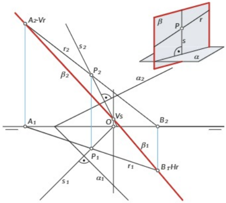


Figura 80

3 **A partir del punto *A*, de cota 15 y alejamiento 5 mm, perteneciente a α(−20, 10, 20), dibuja un segmento perpendicular a α de 30 mm.**

Solución:

a. Dibuja el punto *A* (fig. 81) situando en primer lugar la recta horizontal *m* de 15 mm de cota y la recta frontal *n* de 5 mm de alejamiento.

b. Por *A*, traza la recta *r* perpendicular al plano α y traza un eje *e* perpendicular al plano horizontal.

c. Elige un punto cualquiera de *r*, por ejemplo, *B*, y gira la recta hasta convertirla en frontal (la proyección horizontal r'_1 debe quedar paralela a la *LT*).

d. Sobre la proyección vertical r'_2 de la recta girada, que está en verdadera magnitud, y a partir del punto *A*, toma la distancia $A_2C'_2 = 30$ mm.

e. Restituye el punto *C* a la posición original de *r*. Para ello, traza por C'_2 la paralela a la *LT* hasta r_2.

Escala 4:5

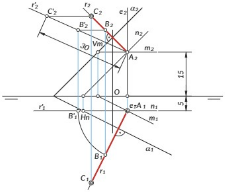


Figura 81

Distancias

4 **Halla la distancia del punto *P* a la recta *r* (fig. 82).**

Solución:

a. Elige un plano de perfil π y traslada *P* y *r* a tercera proyección.

b. El segmento P_3r_3 es la V.M de la distancia entre *P* y *r*.

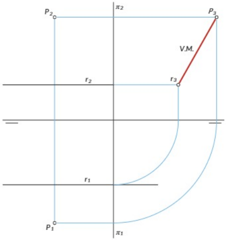


Figura 82

ACTIVIDADES CLAVE RESUELTAS

Abatimientos

5 **Dibuja las proyecciones de una circunferencia de radio 15 mm, situada en el plano $\alpha(-10, 10, 15)$ y tangente a los dos planos de proyección.**

Solución:

a. Sitúa α (fig. 83), abate su traza vertical en α_0 y dibuja la circunferencia de radio 15 tangente a α_1 y α_0. El centro O_0 está donde se cortan las paralelas a α_1 y a α_0 trazadas a 15 mm de distancia.

b. Las paralelas anteriores, junto con las perpendiculares trazadas desde O_0 a α_1 y a α_0, determinan ocho puntos de la circunferencia.

c. Desabate los ocho puntos que representan los ejes de las elipses, proyecciones de la circunferencia.

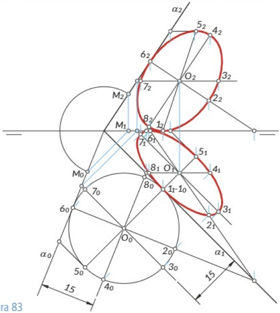


Figura 83

Cambios de plano

6 **Dadas las proyecciones horizontal y vertical de la figura (fig. 84) y la posición de la línea de tierra que representa un cambio de plano vertical, determina la nueva proyección de la figura.**

Solución:

a. Para determinar la nueva proyección vertical de todos los vértices de la figura, actúa como con el punto *P*: por P_1, que sigue siendo la misma, traza la perpendicular a la nueva *LT* y traslada sobre ella, también a partir de la *LT*, la cota del punto o distancia que hay desde P_2 a la *LT* antigua.

b. La nueva proyección vertical del arco de circunferencia es una elipse, que se traza tomando varios puntos.

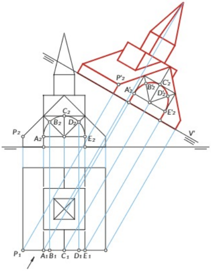


Figura 84

Ángulos y cambios de plano

7 **Determina el ángulo que forma el plano de la figura plana *ABCDEF* con un plano horizontal y señálalo con la letra α. Dibuja la verdadera magnitud de la figura.**

Solución:

a. Lo primero que debes hacer es trazar la recta horizontal *t* que pasa por el vértice *F* (fig. 85): dibuja la traza vertical t_2 que pasa por F_2; halla M_2 y N_2 donde t_2 corta a r_2 y s_2; obtén la proyección horizontal N_1 al bajar N_2 hasta s_1; une N_1 y F_1 para obtener t_1 que corta a r_1 en M_1.

b. Efectúa un cambio de plano para convertir *t* en una recta de punta, de manera que t_2 sea un punto. La nueva proyección vertical de la figura se ve entonces de canto y el ángulo α estará en *V.M.*

c. La verdadera magnitud de la figura se halla abatiéndola sobre un plano horizontal y utilizando como charnela t_1.

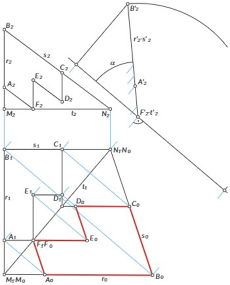


Figura 85

ACTIVIDADES FINALES

1. Dibuja las trazas del plano determinado por la recta horizontal *r*: *A*(–70, 0, 30) *C*(0, 40, 30) y la frontal *s*: *B*(–30, 40, 0) *C*(0, 40, 30). Representa en el plano las líneas de máxima pendiente y de máxima inclinación.

2. Por el punto *P*(0, 55, 25), traza un plano α paralelo al segundo plano bisector.

3. Dadas las proyecciones diédricas del punto *P*(–20, –30, 15) y la recta *r*: *A*(0, 20, 0) *B*(20, 20, 20), halla las trazas del plano α que determinan.

4. Halla la intersección de los planos dados (fig. 86).

5. Determina el punto de intersección de la recta *r* con el triángulo dado (fig. 87). Considerando el triángulo opaco, diferencia las partes vistas y ocultas de la recta en cada proyección.

6. Halla la intersección de los tres planos siguientes: α(–15, –15, 15), β(–45, 25, 25) y δ(25, 40, 10).

7. Halla la intersección de los planos dados (fig. 88).

8. Por el punto *P*(40, 40, 35), traza un plano α que sea paralelo a las dos rectas *r*: *A*(–45, 20, 0) *B*(0, 20, 35) y *s*: *C*(0, 0, 20) *D*(0, 30, 20).

9. Determina las trazas de un plano β del que se sabe que pasa por el punto *P*(0, 15, –30) y es paralelo al plano α que contiene a la línea de tierra y al punto *A*(–20, 25, 30). Indica los pasos que das en la resolución del problema.

10. Representa el plano β que contiene a la recta *r* dada por dos puntos *A*(0, 20, 20) y *B*(30, 0, 20) y que es perpendicular al plano α(–30, 30, 30).

11. Halla la distancia entre los dos planos paralelos α(–50, –50, 50) y β(–20, –20, 20).

12. Dibuja la verdadera magnitud de la distancia del punto *P*(–10, 15, 15) a la recta *t* definida por dos de sus puntos: *A*(0, 10, 10) *B*(20, 20, 15).

13. Dibuja el plano que contiene al punto *P*(–5, 15, 10) y es perpendicular a los planos α(–30, 15, 45) y β(30, 30, 15).

14. Halla la mínima distancia desde *A*(15, 0, 0) a la recta *r*: *B*(–15, 0, 15) *C*(15, 25, 35).

15. Halla la superficie de la cara que determinan los puntos *A*, *B* y *C* de la figura dada en perspectiva (fig. 89). Enumera los pasos que das en la resolución del problema.

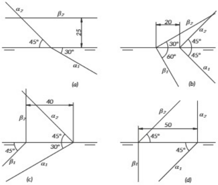


Figura 86

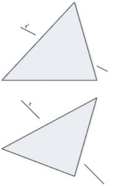


Figura 87

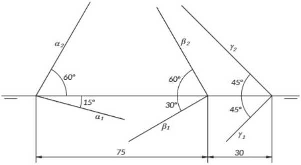


Figura 88

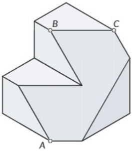


Figura 89

⑯ Dadas las rectas *r*: *A*(0, 10, 0) *B*(40, 10, 40) y *s*: *C*(−40, 40, 0) *D*(0, 40, 40) y el plano β(40, ∞, 40), determina: a) el plano α definido por las rectas *r* y *s*, y b) la recta *i* de intersección entre los planos α y β.

⑰ Dados el plano α(−20, ∞, 35) proyectante vertical, y los puntos *A* y *B* contenidos en su traza horizontal, de 30 y 70 mm de alejamiento, respectivamente, dibuja el pentágono regular contenido en α, situado en el primer cuadrante y que tiene por lado *AB*.

⑱ Dibuja un triángulo equilátero contenido en α (fig. 90), siendo A_2B_2 la proyección vertical de uno de sus lados.

⑲ Dibuja las proyecciones de una circunferencia de radio 10 mm, de centro *O*(−20, 10, 15), situada en un plano α que contiene a la línea de tierra.

⑳ Dados el plano α(40, 20, 40) y el punto *P* de cota 20 y alejamiento 10 situado en él, dibuja en dicho plano un cuadrado con centro en el punto *P*, de 40 mm de diagonal y con un vértice en el plano vertical.

㉑ Dados el punto *C*(−30, 35, 30) y la recta *r*: *A*(0, 55, 0) *B*(45, 0, 40), determina los puntos de intersección de la circunferencia, de centro *C* y radio 30 mm, con *r*. Nota: no es necesario hallar las proyecciones diédricas de la circunferencia.

㉒ Dibuja, en el sistema diédrico, las trazas del plano que contiene a los puntos *A*(50, −15, −30), *B*(−10, −20, 30) y *C*(−50, 60, −25) y determina el ángulo que forman dichas trazas.

㉓ Halla la nueva proyección vertical (fig. 91) en un cambio de plano cuya línea de tierra forma −60° con la primitiva.

㉔ Efectúa un cambio de plano horizontal (fig. 92), cuya línea de tierra forma −60° con la primitiva.

㉕ Halla la nueva proyección vertical (fig. 93) en un cambio de plano cuya línea de tierra forma 30° con la primitiva.

㉖ Halla sobre la recta *r*: *A*(−5, 20, 5) y *B*(10, 5, 15), un punto *C* a 15 mm del punto *A*.

㉗ Gira los puntos *A*(−15, −15, −10), *B*(10, 0'5, 15) y *C*(20, 5, −5) alrededor del eje *e*: *M*(0, 15, 0) *N*(0, 15, 10) 40° en el sentido contrario de las agujas del reloj, señalando a qué cuadrante pertenecen una vez girados.

㉘ En un sistema diédrico directo, halla la intersección de los triángulos *ABC* y *DEF* (fig. 94). Nota: determina los puntos de intersección de dos rectas cualesquiera de uno de los planos con el otro plano y une ambos puntos.

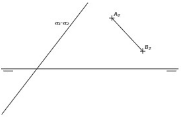


Figura 90

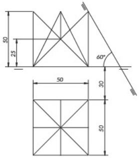


Figura 91

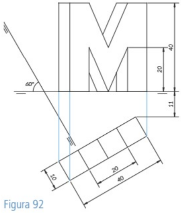


Figura 92

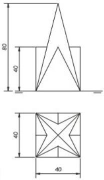


Figura 93

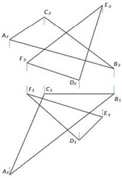


Figura 94

Mis competencias

Autoevaluación

NOS PROYECTAMOS: SKETCHUP (I)

Modelado tridimensional con SketchUp

SketchUp es una aplicación informática de modelado tridimensional basado en superficies y volúmenes 3D. Accede al enlace www.e-sm.net/revdib2bach04_02 para descargar el *software*. Observa la interfaz del programa (fig. 95). Las principales herramientas están representadas mediante iconos intuitivos sobre la barra principal de herramientas (fig. 96).

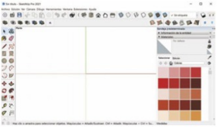


Figura 95

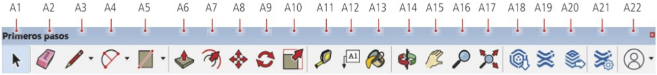


Figura 96

Primeros pasos con SketchUp

La barra de herramientas más importante de SketchUp cuando comenzamos a usar el *software* es *Primeros pasos* (fig. 96). Estas herramientas te permiten:

A1: seleccionar entidades que se van a modificar con otras herramientas o comandos.

A2: borrar, suavizar o alisar las entidades del modelo.

A3: hacer trazados rectilíneos según dos puntos.

A4: dibujar múltiples tipologías de arcos.

A5: insertar rectángulos, círculos y polígonos.

A6: empujar entidades de caras o tirar de ellas para esculpir modelos tridimensionales.

A7: crear paralelas de las aristas seleccionadas de un plano.

A8: mover, desplazar, alargar, copiar y agrupar las entidades seleccionadas.

A9: rotar, girar, alargar, copiar y agrupar entidades seleccionadas alrededor de un eje.

A10: ajustar la escala y alargar las entidades seleccionadas.

A11: medir distancias, crear líneas de puntos guía.

A12: dibujar etiquetas de texto.

A13: aplicar color y materiales a las entidades del modelo.

A14: rotar la vista de la cámara alrededor del modelo.

A15: mover el punto vista de la vertical u horizontalmente.

A16: acercar o alejar la vista de la cámara.

A17: ver el todo modelo centrado en pantalla.

A18: abrir la galería de componentes de SketchUp.

A19: agregar extensiones de la galería del programa.

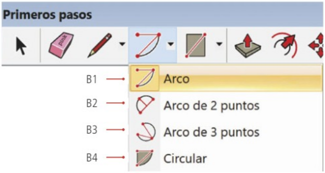
A20: enviar el proyecto al programa LayOut.

A21: Abrir el diálogo del administrador de extensiones.

A22: iniciar o cerrar sesión y gestionar tu cuenta.

Arcos y formas

Con el programa también podrás dibujar arcos (fig. 97) y formas (fig. 98) a partir de diversos elementos.



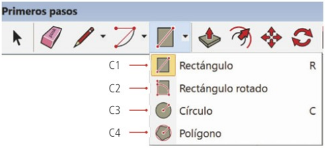
B1: arco desde centro y dos puntos.

B2: arco de un punto a otro con curvatura.

B3: arco a partir de tres puntos.

B4: arco cerrado desde el centro y dos puntos.

Figura 97



C1: rectángulo de una esquina a otra.

C2: rectángulo desde tres esquinas.

C3: círculo del punto central al radio.

C4: polígono de n caras del punto central al radio.

Figura 98

Barras de herramientas principales

Para configurar y desplegar las barras de herramientas, haz clic en el menú superior *Ver* y en *Barras de herramientas* (fig. 99). A continuación, aparece la ventana *Barra de herramientas*, que dispone de dos pestañas. En la primera pestaña se seleccionan las barras que estarán disponibles en el espacio de trabajo; para empezar, es recomendable que tengas desplegadas las siguientes (fig. 100):

D1: almacén, acceso directo a las galerías del programa.

D2: caja de arena, permite modelar geometrías orgánicas.

D3: cámara, para establecer las diferentes cámaras.

D4: etiquetas, gestor de etiquetas.

D5: estándar, abrir, guardar, imprimir, deshacer, etc.

D6: estilos, acceso directo a los más importantes estilos visuales.

D7: sección, funciones para seccionar y visualizar los planos y cortes.

D8: sólidos, herramientas de intersección entre sólidos.

D9: vistas, navega por las diferentes vistas del modelo.

D10: sombras, ajusta el soleamiento de la escena.

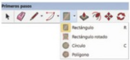


Figura 99

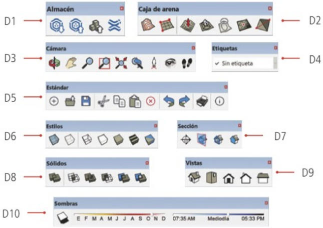


Figura 100

Ventanas

Desde el menú superior *Ventanas* (fig. 101), puedes determinar qué ventanas quieres mostrar en la bandeja predeterminada de la derecha de la interfaz de SketchUp. Se recomienda visualizar siempre las siguientes (fig. 102):

E1: información de la entidad, permite conocer útiles detalles sobre las entidades del proyecto. Por ejemplo, la dimensión (longitud, área o volumen), material y etiqueta de la entidad seleccionada.

E2: materiales, gestor de texturas y acabados el modelo.

E3: componentes, galería de bloques del proyecto en que se está trabajando y *warehouse*.

E4: estilos, edición en detalle de los parámetros gráficos de la visualización.

E5: etiquetas, administra y organiza las etiquetas (capas) del proyecto.

E6: escenas, crea un punto de vista de tus modelos tridimensionales.

E7: sombras, ajusta en detalle el soleamiento.

E8: suavizar aristas, permite redondear aristas.

E9: instructor, ventana de ayuda.

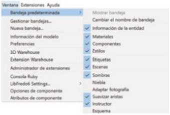


Figura 101

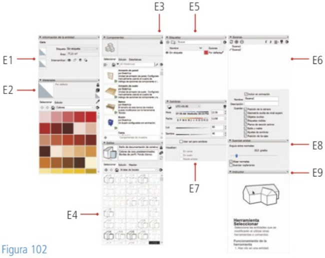


Figura 102

1. Inspecciona la interfaz y el espacio de trabajo de SketchUp y realiza una lista esquemática sobre sus principales herramientas y funciones, resaltando aquellas que te puedan resultar más útiles.

2. Dividid la clase en grupos de 3-4 alumnos. Repartid los procedimientos de la situación de aprendizaje y realizadlos con SketchUp. Escribid los pasos para llevarlos a cabo y exponed el proceso a los compañeros.

3. ¿Cuáles son las funciones y las características de las herramientas nombradas como A7 y A9?

4. Dibuja una mesa y un monitor con SketchUp utilizando sus herramientas imprescindibles.

5. Describe las ventajas que encuentras en el uso de una herramienta digital como SketchUp respecto al diseño tradicional manual.