SISTEMAS DE ECUACIÓNS. PROBLEMAS

1. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS.

1.1. Método de substitución.

Consiste en despexar unha incógnita nunha das ecuacións e substituíla na outra ecuación.

EXEMPLO. No sistema de ecuacións $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\}$.

- Despexamos unha das incógnitas nunha das ecuacións. O máis conveniente, é despexar unha incógnita con coeficiente 1 ou -1, para evitar traballar con denominadores. Neste caso despexamos x na primeira ecuación: $x-y=3 \rightarrow x=3+y$.
- Substituímos a expresión obtida na outra ecuación. É dicir, neste caso na segunda ecuación onde vai x poñemos o valor $3+y$: $2x-3y=4 \rightarrow 2\cdot(3+y)-3y=4$.
- Resolvemos a ecuación que nos queda como unha ecuación de primeiro grao:

  $2\cdot(3+y)-3y=4$

  $6+2y-3y=4$

  $2y-3y=4-6$

  $-y=-2$

  $y=2$
- Calculamos o valor da outra incógnita aproveitando que temos despexada da primeira ecuación:

  $x=3+y$

  $x=3+2$

  $x=5$
- Polo tanto o sistema ten como solución: $x=5$, $y=2$.
- Por último comprobamos que a solución obtida é solución do sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5-2=3 \\ 2\cdot5-3\cdot2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3=3 \\ 10-6=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3=3 \\ 4=4 \end{array}\right\}$$

Vemos que se verifican as dúas igualdades polo tanto é solución do sistema.

EXERCICIO

1) Resolve polo método de substitución:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ x-y=8 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x-y=1 \\ 2x-4y=22 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+3y=11 \\ 6x+5y=14 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+5y=-8 \\ 2x-4y=26 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 5x+y=-22 \\ 3x-7y=2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 6x-y=23 \\ 3x+2y=29 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 5x+3y=36 \\ x-2y=2 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 4x-3y=18 \end{array}\right\}$

1.2. Método de igualación.

Consiste en despexar a mesma incógnita nas dúas ecuacións e igualar os seus valores.

EXEMPLO. No sistema de ecuacións $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\}$

- Despexamos a mesma incógnita das dúas ecuacións. Igual que no método anterior, despexamos aquelas que sexan máis fáciles de despexar:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3+y \\ x=\dfrac{4+3y}{2} \end{array}\right\}$$

- Igualamos os dous despexes: $\rightarrow\ 3+y=\dfrac{4+3y}{2}$ e resolvemos como unha ecuación de primeiro grao:

$$\frac{6+2y}{2}=\frac{4+3y}{2}\rightarrow$$

$$6+2y=4+3y\ \rightarrow$$

$$2y-3y=4-6\ \rightarrow$$

$$-y=-2\ \rightarrow\ y=2$$

- Substituímos o valor obtido en calquera das ecuacións despexadas, por suposto tomamos aquela na que sexa máis fácil facer as operacións: $x=3+y=3+2=5$
- Polo tanto o sistema ten como solución: $x=5$, $y=2$.
- Por último comprobamos que a solución obtida é solución do sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5-2=3 \\ 2\cdot5-3\cdot2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3=3 \\ 10-6=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3=3 \\ 4=4 \end{array}\right\}.$$

Vemos que se verifican as dúas igualdades polo tanto é solución do sistema.

EXERCICIOS

2) Resolve polo método de igualación:

a) $\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=13 \\ x-y&=2 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=10 \\ 4x+10y&=20 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=8 \\ 2x+y&=12 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x-y&=7 \\ 3x-y&=1 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 4x-3y&=14 \\ 5x+2y&=29 \end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=-3 \\ 7x-4y&=-25 \end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} 5x-3y&=16 \\ 9x+7y&=4 \end{aligned}\right\}$

i) $\left.\begin{aligned} 3x+2y&=23 \\ 9x-5y&=-8 \end{aligned}\right\}$

j) $\left.\begin{aligned} 7x+4y&=2 \\ 2x-3y&=13 \end{aligned}\right\}$

k) $\left.\begin{aligned} x+3y&=11 \\ 6x+5y&=14 \end{aligned}\right\}$

1.3. Método de redución.

Consiste en buscar outro sistema coas mesmas solucións, nas que os coeficientes dunha das incógnitas sexan iguais e de signo oposto.

EXEMPLO. No sistema de ecuacións $\left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 2x-3y&=4 \end{aligned}\right\}$.

- Igualamos os coeficientes dunha das incógnitas mediante as multiplicacións apropiadas de maneira que nos queden os mesmos coeficientes pero de signo contrario. Ao igual que os dos casos anteriores aproveitaremos aquelas incógnitas que teñan como coeficiente 1 o -1. Neste exemplo, si multiplicamos a primeira ecuación por – 2, os coeficientes de x quedan igual nas dúas ecuacións pero de signo contrario:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 2x-3y&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-2\cdot 1^{a}} \left.\begin{aligned} -2x+4y&=-6 \\ 2x-3y&=4 \end{aligned}\right\}$$

- Despois sumamos as dúas ecuacións e de esta forma elimínanse os coeficientes de x:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-6 \\ \underline{2x-3y=4} \\ 0x-y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow -y=-2$$

- Resolvemos a ecuación: $-y=-2 \rightarrow y=2$
- Substituímos o valor obtido en calquera das ecuacións anteriores, por suposto tomamos aquela na que sexa máis fácil facer as operacións: $x-2=3 \rightarrow x=3+2=5$
- Polo tanto o sistema ten como solución: $x=5$, $y=2$.
- Por último comprobamos que a solución obtida é solución do sistema:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 2x-3y&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5-2&=3 \\ 2\cdot 5-3\cdot 2&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3&=3 \\ 10-6&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3&=3 \\ 4&=4 \end{aligned}\right\}$$

Vemos que se verifican as dúas igualdades polo tanto é solución do sistema.

EXERCICIOS

3) Resolve polo método de redución:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-5y=6 \\ 4x-3y=1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x+2y=0 \\ 2x+4y=6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x-y=5 \\ 2x-2y=10 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right\}$

1.4. Regras prácticas para resolver sistemas.

- Hai que expresar as ecuacións na forma xeral $ax+by=c$.
- O método de substitución é útil cando algunha das incógnitas ten como coeficiente 1 o -1.
- O método de redución é aconsellable cando os coeficiente dunha das incógnitas son iguais a 1 ou é múltiplo do outro.
- Cando os coeficientes das incógnitas son distintos de 1 o -1, e non son múltiplos nin iguais, podemos utilizar o método de igualación, e despois eliminar os denominadores.

EXEMPLO. Resolve o seguinte sistema: $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-y}{2}+x=-1 \\ 3(y-x)-2=4 \end{array}\right\}$

Temos que preparar as dúas ecuacións:

1ª) $\dfrac{x-y}{2}+x=-1 \rightarrow \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{2x}{2}=\dfrac{-2}{2} \rightarrow x-y+2x=-2 \rightarrow 3x-y=-2$

2ª) $3(y-x)-2=4 \rightarrow 3y-3x-2=4 \rightarrow -3x+3y=4+2 \rightarrow -3x+3y=6$

Polo tanto o sistema orixinal quédanos en: $\left.\begin{array}{r} 3x-y=-2 \\ -3x+3y=6 \end{array}\right\}$, no que podemos aplicar o método de redución que é o más fácil, para eliminar a incógnita x.

$\left.\begin{array}{r} 3x-y=-2 \\ -3x+3y=6 \end{array}\right\}$
$\overline{2y=4}$ $\rightarrow y=\dfrac{4}{2} \rightarrow y=2$. Agora **substituímos o valor de** y en calquera das ecuacións anteriores:

$3x-y=-2 \rightarrow 3x-2=-2 \rightarrow 3x=-2+2 \rightarrow 3x=0 \rightarrow x=0$.

Por lo tanto a solución do sistema é $x=0$, $y=2$. Comprobamos no sistema orixinal:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{0-2}{2}+0=-1\\ 3(2-0)-2=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\frac{-2}{2}=-1\\ 3\cdot 2-2=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}-1=-1\\ 6-2=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}-1=-1\\ 4=4\end{array}\right\}$$ Vemos que se verifica, polo tanto é solución.

EXERCICIOS

4) Resolve cada un dos seguintes sistemas polo método máis axeitado:

a) $\left.\begin{array}{r}x-y=1\\ 2x-y=4\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 2x-3y=9\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x-2y=1\\ 2x+y=7\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ x-3y=0\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}2x+y=13\\ x-y=2\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}-x+2y=2\\ 3x-4y=-2\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}5x-3y=1\\ 4x+y=11\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r}5x+3y=16\\ 3x-3y=0\end{array}\right\}$

5) Resolve polo método máis axeitado:

a) $\left.\begin{array}{r}2x+3y=5+x+2y\\ x-2y-3=3-42y\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3y+3=x-2(x+y)\\ \frac{2x+3y}{2}=18\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ (x+4)+2(y-2)=18-x-y\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\frac{2x-y}{3}+2x-y=4\\ 2x-y=4\end{array}\right\}$

6) Resolve os seguintes sistemas, operando previamente os termos semellantes:

a) $\left.\begin{array}{r}2x-2+y=9\\ 6x+y-2y=8\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3(x+4)+5y=1\\ x-4(3+y)=-10\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2(x-1)-y=9\\ 3(x+1)-3y=2-y\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}2x+2y-x=12\\ 5x-7y-26=0\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}8x+5y=33-4x+2y\\ 2x+2y=23-7x\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}4x-7+3y=9+2(y+x)\\ 5x+2y=8+3y-x\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}3(x+y+4)=2(49-y)\\ x-4(3+y)=-40\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r}2(x-1)-5y=9-4y\\ 3(x+1-y)=23-y\end{array}\right\}$

2. PROBLEMAS

1) Acha dous números sabendo que o maior máis seis veces o menor é igual a 62 e o menor máis cinco veces o maior é igual a 78.

2) Ao dividir un número entre outro o cociente é 2 e o resto é 5. Se a diferenza entre o dividendo o divisor é de 51, de que números se trata?.

3) A base dun rectángulo mide 20 cm máis que a súa altura. Se o perímetro mide 172 cm, cales son as dimensións do rectángulo?

4) Nunha clase hai 80 alumnos entre rapaces e rapazas. No último exame de matemáticas houbo 60 aprobados, o 50% das rapazas e o 90 % dos rapaces. Cantos rapaces e rapazas hai na clase?

5) A base dun rectángulo mide 70 cm máis que a súa altura. Se o perímetro mide 412 cm, cales son as dimensións do rectángulo?

6) Juan realizou un exame que constaba de 68 preguntas, deixou sen contestar 18 preguntas e obtivo 478 puntos. Se por cada resposta correcta se suman 10 puntos e por cada resposta incorrecta se resta un punto, cantas preguntas contestou ben e cantas contestou mal?

7) Damián ten no seu moedeiro 210 € en billetes de 5 e 20 euros. Se dispón de 15 billetes, cantos billetes ten de cada clase?

8) Que cantidades de aceite, un puro de oliva, a 3 €/litro, e outro de bagazo, a 2 €/litro, hai que empregar para conseguir 600 litros de mestura a 2,40 €/litro?

9) Un ciclista sae de paseo e percorre un tramo de estrada, costa arriba, a 8 km/h. Despois, segue andando polas chairas, a 20 km/h, ata chegar ao seu destino. Se o paseo durou 3 h, e a velocidade media resultante foi de 16 km/h, canto tempo investiu en cada tramo?

10) Dúas cidades, A e B, distan 270 km. En certo momento, un coche parte de A cara B a 110 km/h, e, á vez, sae de B cara A un camión a 70km/h. Que distancia percorre cada un ata que se atopan?

11) A suma de dous números é 85 e a súa diferenza é 19. Cales son os números?

12) A suma das idades de Catuxa e de Anxo é 32 anos. Dentro de 8 años a idade de Anxo será dúas veces a idade de Catuxa. Que idades teñen ámbolos dous?

13) María comprou un pantalón e un xersei. Os prezos destas prendas suman 77€, pero fixéronlle un desconto do 10% nun pantalón e un 20% no xersei, pagando en total 63,60 €. Cal é o prezo sen rebaixar de cada prenda.

14) Acha as dimensións dun rectángulo sabendo que o seu perímetro mide 88cm e que o triplo da base máis o dobre da altura é igual a 118.

15) A suma das idades de Sara e Martina son 65 anos. A idade de Martina máis catro veces a idade de Sara é igual a 104. Que idades teñen Sara e Martina?

16) Quérese obter 25 kg de café a 12,36 €/kg, mesturando café de 15 €/kg con café de 9 €/kg. Cantos quilogramos de cada clase hai que mesturar?

17) Un hotel ten 94 habitacións entre dobres e individuais. Se o número de camas é 170. Cantas habitacións dobres ten?. Cantas individuais?

18) Nun galiñeiro hai galiñas e coellos: si se contan as cabezas, son 50, se se contan as patas son 134. Cantos animais de cada clase hai?

19) Un peón sae de A cara B camiñando a unha velocidade de 4 km/h. Simultaneamente. Sae de B cara A un ciclista a 17 km/h. Se a distancia entre A e B é de 7 km, canto tardarán en atoparse?

20) Un camión parte de certa poboación a 90 km/h. Dez minutos despois, sae un coche a 110 km/h. Calcula o tempo (t) que tarda en alcanzalo e a distancia percorrida dende o punto de partida.

21) Calcula dous números que sumen 150 e cuxa diferenza sexa o cuádruplo do menor.

22) Para pensar: Canto custa o frasco de zume? E o tarro de marmelada? E a caixa de galletas?