

UNIDADE 7. LINGUAXE ALXÉBRICA. ECUACIÓNS

1. INTRODUCCIÓN

Chamámoslle álgebra á parte das matemáticas na que se empregan as letras para expresar números de valor descoñecido ou indeterminado.

Utilidades da álgebra:

Para expresar propiedades das operacións, por exemplo da potenciación: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, ...

Para xeneralizar a evolución de series de números:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \\ (0 \cdot 1) & (1 \cdot 2) & (2 \cdot 3) & (3 \cdot 4) & (4 \cdot 5) & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \\ (0 \cdot 1) & (1 \cdot 2) & (2 \cdot 3) & (3 \cdot 4) & (4 \cdot 5) & \end{array}} \right\} a_n = \begin{cases} (n-1) \cdot n \\ n^2 - n \end{cases}$$

Así por exemplo, se queremos saber o décimo termo da serie: $a_{10}=9 \cdot 10=90$ ou ben $a_{10}=10^2-10=90$.

Para expresar fórmulas: $I.M.C. = \frac{P}{a^2}$ onde **I.M.C.** é o Índice de Masa Corporal, **P** é o peso (en quilos) e **a** é a altura (en metros).

Para manexar números de valor indeterminado e as súas operacións:

- Un número natural $\longrightarrow a$
- O seguinte $\longrightarrow a + 1$
- O dobre do seguinte $\longrightarrow 2 \cdot (a + 1)$
- Outro número oito unidades menor $\longrightarrow a - 8$
- O cadrado do número máis o triplo do número $\longrightarrow a^2 + 3a$

Para expresar relacións que facilitan a resolución de problemas:

Laura gasta a metade da súa paga no cine e a terceira parte nun bocadillo. Así, só lle quedan dous euros. Canto tiña de paga?

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\text{CUSTO}} & + & \boxed{\text{CUSTO}} & + & \boxed{2 \text{ €}} & = & \boxed{\text{TOTAL}} \\ \boxed{\text{CINE}} & & \boxed{\text{BOCADILLO}} & & & & \boxed{\text{PAGA (x)}} \\ \frac{x}{2} & + & \frac{x}{3} & + & 2 & = & x \end{array}$$

➔ EXERCICIOS

1. Chamando n a un número natural indeterminado, completa:

- a) seu dobre máis una unidade
- b) seu triplo menos cinco unidades

- c) A súa metade
 - d) A súa metade, aumenta catro unidades
 - e) O seu seguinte
 - f) O triplo do seu seguinte
 - g) A terceira parte do seu seguinte
2. Traduce a linguaxe alxébrica os seguintes enunciados:
- a) dobre dun número n máis a súa metade
 - b) dobre dun número n menos tres unidades
 - c) Un número máis a súa metade máis a súa terceira parte
3. Completa a seguinte táboa:

1	2	3	4	5	...	n
3	6	9	12	15	...	
2	5	8	11	14	...	
1	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{11}{2}$	7	...	

4. Traduce á linguaxe alxébrica as idades dos membros desta familia:

	IDADE
SARA Ten x anos.	x
ROSA (irmá maior) Sácalle 2 anos a Sara.	
ANA (nai) Tiña 25 anos cando Sara naceu.	
XOAQUÍN (pai) Cuadruplica a idade de Sara.	

5. Tendo en conta a familia do exercicio anterior, escribe unha igualdade que reflecta este novo dato: “O pai de Sara ten 5 anos máis cá nai”. Calcula por tenteo a idade de Sara.

2. MONOMIOS

Un monomio é unha expresión alxébrica formada polo produto dun número, chamado coeficiente, e unha ou varias letras elevadas a un número natural, que forman a parte literal do monomio.

As letras da parte literal chámanse variables.

O grao dun monomio é o expoñente da letra que forma a parte literal, se só ten unha letra. Se ten máis dunha letra é a suma dos expoñentes da parte literal.

EXEMPLO

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Variables	Grao
$-6x^7$	-6	x^7	x	7
$3x^2y^2$	3	x^2y^2	x, y	4

$\frac{3}{5}a^3b$	$\frac{3}{5}$	a^3b	a,b	4
-------------------	---------------	--------	-------	---

NOTA: Se o monomio non ten o coeficiente escrito, iso non significa que o coeficiente sexa 0, simplemente que o coeficiente está implícito e nese caso é o número 1. Lembra que o mesmo ocorre co expoñente se non hai expoñente, significa que o expoñente é o número 1.

EXEMPLO: x^2y^2 é unha expresión alxébrica de coeficiente 1 e grao .

x ten coeficiente 1 e grao 1.

MONOMIOS SEMELLANTES. Son aqueles que teñen a **mesma parte literal**.

➡ **EXERCICIOS**

6. Indica o coeficiente, a parte literal, as variables e o grao destes monomios.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Variables	Grao
$-3x^3y^2z^4$				
$-5b^2c^3$				
$x^{15}y$				
3				
$-\frac{2}{3}xy^5$				

7. Determina se os seguintes polinomios son semellantes:

a) $\frac{1}{2}x^2y^3z^5, -5z^5x^2y^3$

f) $a^2b, ab, 7b$

b) $6x^3y^4, 6x^4y^3$

g) $4c^9d, c^7d, cd^4$

c) $xy^3, -xy^3$

h) $8xy^2, 7xy$

d) $7x, -x$

e) $xz, 3xy, -6xy$

8. Indica se as seguintes expresións son monomios ou non:

a) $2x^2 + yz$

b) $\frac{2x^2y^{-4}}{11}$

d) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y$

c) $5x^2yz$

e) \sqrt{xyz}

f) $3ab + b^2$

2.1 VALOR NUMÉRICO DUN MONOMIO

É o resultado de substituír a parte literal polo número indicado.

EXEMPLO: O valor numérico de $-5x$ en $x = -2$ é $-5(-2) = 10$

➡ EXERCICIOS

9. Calcula:

a) O valor numérico de $3x^2$ para $x = 1$

b) O valor numérico de $-4x^2$ en $x = -3$

c) O valor numérico de $-3xy$ para $x = 3$ e $y = -5$

2.2 OPERACIÓNS CON MONOMIOS

SUMA E RESTA DE MONOMIOS

A suma (ou resta) de dous ou máis monomios só pódese realizar se son semellantes; en caso contrario, a operación déixase indicada. O resultado da suma (ou resta) de dous ou máis monomios semellantes é outro monomio semellante que ten por coeficiente a suma (ou resta) dos coeficientes.

EXEMPLO. Efectúa as seguintes operacións:

a) $6x^4 + 5x^4 - 3x^4 = (6 + 5 - 3)x^4 = 8x^4$

b) $2x^2y - 4x^2y + 6x^2y = (2 - 4 + 6)x^2y = 4x^2y$

c) $7x^4 - 4x^2 + 9x^4 + 6x^2 = 16x^4 + 2x^2$

➡ EXERCICIOS

10. Suma os seguintes monomios:

a) $x + x + x$

e) $4a + 2a$

i) $m^3 + 2m^3 + 4m^3$

b) $n + n + n + n$

f) $4m + 4m$

j) $3x^4 + 6x^4 + 2x^4$

c) $x^2 + x^2$

g) $3x^2 + 6x^2$

d) $a^3 + a^3 + a^3 + a^3$

h) $3x^2 + 6x^2$

11. Reduce a seguinte suma de monomios:

a) $x + \frac{1}{2}x$

b) $a + \frac{3}{4}a$

c) $\frac{3}{7}m + \frac{2}{7}m$

e) $\frac{1}{6}n + \frac{1}{6}n$

d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^2$

f) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^2$

12. Resta os seguintes monomios:

a) $8x - 3x$

f) $4n^4 - n^4$

b) $11x^2 - 5x^2$

g) $\frac{5}{6}z - \frac{1}{6}z$

c) $8a - 7a$

d) $5a^3 - 9a^3$

h) $\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2$

e) $m^3 - 7m^3$

13. Reduce todo o posible:

a) $3x + x + 2 + 6$

j) $5x^2 - 3 - 4x^2 + 1$

b) $4a + 2a - 7 + 6$

k) $x^2 - 6x + 2x + x^2$

c) $3a + 3 - 2a + 1$

l) $3x + 4x^2 - x^2 + x$

d) $5x + 2 - 3x + x$

m) $x^2 + 4x + 1 + 2x + 3$

e) $5 - 3x + 4x - 4$

n) $5x^2 + 3x - 4x^2 - 2x + 1$

f) $2a - 3 - 2 + 3a$

o) $3x^2 + \frac{4}{5} + 2x - \frac{1}{5}$

g) $7 - 4a - 7 + 5a$

p) $10 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - x$

h) $4x - 3 - 4x + 2$

i) $x^2 + 4 + x^2 + 1$

PRODUTO E COCIENTE DE MONOMIOS

O produto de dous monomios é outro monomio que ten por coeficiente ou produto dos coeficientes, e por parte literal, o produto das partes literais de ambos monomios. O cociente de dous monomios é outro monomio que ten por coeficiente ou cociente dos coeficientes, e por parte literal, o cociente das partes literais de ambos monomios.

EXEMPLO. Facer as seguintes operacións con monomios:

a) $-4x^2 \cdot 3x = (-4 \cdot 3)x^4 \cdot x^2 = -12x^6$

b) $-x^2y^4 \cdot 3y^3 = (-1 \cdot 3)x^2 \cdot y^4 \cdot y^3 = -3x^2y^7$

c) $12x^5 : 4x^3 = (12 : 4) \cdot (x^5 : x^3) = 3x^2$

d) $-3x^2y^5 : 2x = (-3 : 2) \cdot (x^2y^5 : x) = -\frac{3}{2}xy^5$

➡ **EXERCICIOS.**

14. Fai as seguintes multiplicacións de monomios:

a) $(3x)(5x)$

b) $-a(4a)$

c) $(4a)(-3a^3)$

d) $\left(\frac{x}{2}\right)(8x^2)$

e) $\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x^2}{3}\right)$

f) $(5a)\left(-\frac{1}{5}a\right)$

15. Multiplica estes monomios:

a) $(3x)(5xy)$

b) $(-2ab)(4b)$

c) $(4x^3y)(xy)$

d) $\left(-\frac{2}{3}ab\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)$

16. Divide os seguintes monomios:

a) $(10x):(5x)$

b) $(15a^2):(3a^2)$

c) $(-14ab):(-2b)$

d) $(-5a^3):(-5a)$

e) $(10x^3):(2x^2)$

f) $(-16a^6):(4a^4)$

g) $27a^3:(-9a)$

17. Realiza as seguintes operacións con monomios e indica o grao do polinomio resultante:

a) $6x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x^2 - x^2 =$

b) $3x^2y^2 - 2x^2y^2 + 6x^2y^2 - x^2y^2 =$

c) $xz + 3xz + 6xz$

d) $a^2b + 9a^2b + 27a^2b$

e) $c^9 + c^9 + 11c^9$

f) $8xy + 7xy + 43xy + 23xy$

g) $5xy^3 - 2xy^3 + 7xy^3 - 3xy^3 + 12xy^3$

h) $3xz - 6xz$

i) $9a^2b - 2a^2b$

l) $3abc - 2abc + 6abc + 9abc - 4abc$

m) $5xz - 3xz + 15xz - 11xz + 8xz - 3xz$

n) $18xy - 7xy - 3xy - 3xy$

o) $5c^9 - c^9 - c^9 - c^9$

p) $2x^2 + 3x^2 - 7x^2 + 8x^2 - x^2$

18. Realiza as seguintes operacións con monomios:

a) $15xy:(-3x) =$

b) $-5ab(6abc) =$

c) $2xyz:(-2xy) =$

d) $2xyz:2x^2yz^3 =$

e) $(21x^2y^3):(7xy^3) =$

f) $-2abc \cdot 3a^2b^2c^2 \cdot (-bc) =$

g) $9abc:3bc =$

h) $7x(2xy)(-3xy^5)(xy) =$

i) $(16x^4y^5a^3b^6):(8x^2y^3a^2b^5) =$

l) $(6ac^3)(-2a^2c^3)(-3ac)(-4a^3c^2) =$

m) $(5m^3n^2g^4):(2mng) =$

19. Simplifica as seguintes expresións:

a) $-2x^3 - x^2 + 5x^2 - 6x + x - 2x^2 - 6x =$

b) $11x^7y^2 + 4xy^5 - 9x^7y^3 + xy^5 - x^2 =$

c) $-x^2y - (-3x^2 \cdot 7y) + (16x^2y^3z : 4y^2z) =$

d) $2x^2 - 5(-x^2) + 8x^2 - (2x)(3x) =$

e) $2x(-y) + 7xy - yx + (-4x) \cdot (-5y) =$

f) $3x^2 - (-x^2) + 3(-x^2) - (-3)(-x)^2 =$

g) $(2xy - 3xy + 7xy)2ab =$

h) $(x^2 - 3x^2 + 6x^2 - 2x^2)(-5xz) =$

20. Razona se son verdadeiras ou falsas as seguintes operacións:

a) $x \cdot x \cdot x = x^3$

b) $x^2 - x = x$

c) $x^3 \cdot x^4 = x^7$

d) $x^5 = 5 \cdot x$

e) $(x^2)^2 = x^4$

f) $x^{-2} = -x^2$

3. POLINOMIOS

Un polinomio é unha expresión alxébrica formada pola suma ou resta de dous ou máis monomios.

Desígnanse con letras maiúsculas, indicando entre paréntese as variables que interveñen. Por exemplo: $P(x) = 5x^5 - 6x^3 + 7x$ é un polinomio dunha variable, x . Outro exemplo: $P(x, y) = 2x^2y - 7x - 2$ é un polinomio de dúas variables, x e y .

Cada un dos monomios que forman un polinomio chámase **termo**, e o que no ten parte literal chámase **termo independente**.

O grao dun polinomio é o maior dos grados dos seus termos. Por exemplo: $P(x, y) = 2x^2y - 7x - 2$ ten grao 3 porque o monomio $2x^2y$ ten grao 3 que é o monomio de maior grao.

➡ EXERCICIOS.

21. Determina o grao, as variables e o termo independente destes polinomios.

Polinomio	Grao	Variables	Termo indpte.
$P(x, y) = -2x^5 - x^2y^2 + 5x^3 - 1 + 3x^3 + 3$			
$Q(x, y) = x^2 + 4x^3 - x - 9 + 4x^4y^3$			
$R(x, y) = x^9 - x^7y^3 + y^{13} - 4$			
$S(x, y, z) = 7x^2yz - 3xy^2z + 8xyz^2$			
$P(x) = -x^3 + x^2 - 7x - 2$			
$Q(x) = -x^2 + 2x + 6$			
$R(x) = x + 1$			
$S(x) = 8$			
$T(x) = 12x - x^2 + x^4$			
$U(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}$			

3.1 VALOR NUMÉRICO DUN POLINOMIO

O valor numérico dunha expresión alxébrica é o número que resulta de operar tras substituír as súas letras por certos valores.

Así o valor numérico de $3x + y$ cando $x = 2$ e $y = 1$ es $3 \cdot 2 + 1 = 7$. Segundo os valores que tomen as letras, cada expresión alxébrica terá un valor numérico diferente.

► EXERCICIOS

22. Calcula o valor numérico de $x^3 - 5x^2 - 11$:

a) Para $x = 1$ b) Para $x = -1$

23. Calcula o valor numérico de $3ab^2 - 5a + 3b$ para $a = 2$ y $b = -1$.

24. Calcula, por tanteo, os valores de x que anulan cada polinomio.

a) $x^2 - 2x + 1$

b) $x^3 - 8$

c) $x^4 - x^3$

3.2 OPERACIÓN CON POLINOMIOS.

SUMA E RESTA DE POLINOMIOS.

Para sumar (ou restar) polinomios, agrúpanse os monomios semellantes e súmanse (ou restan) os seus coeficientes.

EXEMPLO. Suma e resta os seguintes polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ e $R(x) = -x^3 + x^2$

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 + (-x^3 + x^2) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 - x^3 + x^2 = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 - (-x^3 + x^2) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 + x^3 - x^2 = 3x^3 - 4x^2 + 4x + 1$$

► EXERCICIOS

25. Calcula as seguintes operacións con estes polinomios: $A(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$; $B(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 1$

a) $A + B$

b) $A - B$

26. Calcula as seguintes operacións con estes polinomios: $A(x) = 7x^3 - 6x^2 + 2$; $B(x) = 5x^2 - 3x - 5$

a) $A + B$

b) $A - B$

PRODUTO DUN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

Aplicamos a propiedade distributiva.

27. Calcula:

a) $3(2x+5)$

f) $2x(3x-5)$

m) $-x(x^3+x+3)$

b) $5(x^2-x)$

g) $x^2(5x-2)$

c) $7(x^3-1)$

h) $3x^2(x+2)$

d) $-2(5x-3)$

i) $5x(x^2+x+1)$

e) $x(x+1)$

l) $-2x(x^2+3)$

PRODUTO DE DOUS POLINOMIOS

Multiplíquese os monomios de cada un deles polo outro polinomio.

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (3x^2 + 4x - 1)(x^2 - 1) \\ &= 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + 4x(x^2 - 1) - 1(x^2 - 1) \\ &= 3x^4 - 3x^2 + 4x^3 - 4x - x^2 + 1 \\ &= 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

➡ EXERCICIOS

28. Multiplica os seguintes polinomios:

a) $(x+1) \cdot (x+2)$

c) $(2x-3) \cdot (3x-2)$

b) $(2x-1) \cdot (x-1)$

d) $(4+x) \cdot (2x+1)$

29. Fai os seguintes produtos:

a) $(2x+1) \cdot (x^2-x-1)$

b) $(3x-2) \cdot (2x^2+4x-3)$

c) $(x^2+2x-3) \cdot (3x^2+5x-4)$

30. Calcula a suma, a resta e ou produto de cada par de polinomios:

a) $R(x) = x^4 - x + 1$; $S(x) = x^2 + 1$

b) $R(x) = x + 1$; $S(x) = x^2 - x + 1$

c) $R(x) = 5x^7 - x^8 + 1$; $S(x) = x^2 + x^6 - 1$

d) $R(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1$; $S(x) = x^3 + 2x$

e) $R(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 3$; $S(x) = x^4 + x^2 - 8$

f) $R(x) = x^7 + 3$; $S(x) = x^3 + x^2 + 4x + 2$

31. Razona si son verdadeiras ou falsas as seguintes afirmacións:

- a) Un polinomio é a suma de dous monomios
- b) grao dun polinomio é ou maior dos graos dos monomios que o forman
- c) Os coeficientes dun polinomio son sempre números naturais
- d) Calquera polinomio ten un termo onde aparece x^2 :

32. Dados os seguintes polinomios: $P(x) = 2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$; $Q(x) = 3x^2 - x + 1$; $S(x) = x^2 - x + 1$.

Calcula:

- a) $P(x) \cdot Q(x)$
- b) $Q(x) \cdot S(x)$
- c) $P(x) \cdot S(x)$

33. Dados os seguintes polinomios: $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$; $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$;

$R(x) = 3x^2 - x + 1$; $S(x) = 2x + 3$. Calcula:

- a) $[P(x) - Q(x)] \cdot S(x)$
- b) $[P(x) + Q(x) + R(x)] \cdot S(x)$
- c) $[P(x) + Q(x) - R(x)] \cdot S(x)$

4. IGUALDADES NOTABLES

Chamamos **igualdades notables** a certos produtos de binomios que serven para facilitar algúns cálculos con expresións alxébricas.

4.1 CADRADO DUNHA SUMA.

Chamamos así á expresión $(a+b)^2$. Se o desenvolvemos mediante o produto de polinomios:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

É igual a cadrado do primeiro máis ou dobre produto do primeiro polo segundo máis ou cadrado do segundo.

EXEMPLOS:

- a) $(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1^2 = x^2 + 2x + 1$, podémolo desenvolver polo produto, pero se o facemos coa fórmula é moito máis rápido o seu cálculo.
- b) $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- c) $(x+7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

4.2 CADRADO DUNHA DIFERENZA.

Chamamos así á expresión $(a-b)^2$. Se o desenvolvemos:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

É igual ao cadrado do primeiro menos ou dobre produto do primeiro polo segundo máis ou cadrado do segundo.

EXEMPLOS:

- a) $(x-1)^2 = (x-1)(x-1) = x^2 - x - x + 1^2 = x^2 - 2x + 1$, podémolo desenvolver como produto, pero se o facemos coa fórmula é moito máis rápido o seu cálculo.
- b) $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$
- c) $(x-7)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$

4.3 SUMA POR DIFERENZA.

Chamamos así á expresión $(a-b)^2$. Ao desenvolver:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab + b^2 \\ = a^2 - b^2$$

É igual ao cadrado do primeiro menos ou cadrado do segundo.

EXEMPLO:

- a) $(x+1)(x-1) = x^2 - x + x - 1^2 = x^2 - 1$
 b) $(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
 c) $(x-7)(x+7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

➡ **EXERCICIOS.**

34. Desenvolve os seguintes cadrados:

- | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|
| a) $(x+7)^2$ | h) $(x+4)(x-4)$ | p) $(2x-y)^2$ |
| b) $(a+3)^2$ | i) $(x+4)^2$ | q) $(5-3x)^2$ |
| c) $(x-5)^2$ | l) $(x-4)^2$ | r) $(1+2a)^2$ |
| d) $(x+2)^2$ | m) $(6+x)^2$ | s) $(3a+2b)^2$ |
| e) $(x+3)^2$ | n) $(3a-b)^2$ | t) $(2x+1)(2x-1)$ |
| f) $(x-3)^2$ | o) $(3a-b)(3a+b)$ | |
| g) $(x+3)(x-3)$ | | |

35. Desenvolva os seguintes cadrados:

- | | | |
|---------------|-------------------|-----------------|
| a) $(3x+2)^2$ | e) $(4x-3)(4x+3)$ | i) $(x-5)(x+5)$ |
| b) $(3x-2)^2$ | f) $(3x+2)(3x-2)$ | j) $(4x+3y)^2$ |
| c) $(4x-3)^2$ | g) $(x+5)^2$ | |
| d) $(2x+5)^2$ | h) $(x-5)^2$ | |

36. Escribe como produtos notables os seguintes polinomios:

- | | | |
|-------------------|----------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 1$ | e) $x^2 - 6x + 9$ | i) $x^2 - 20x + 100$ |
| b) $x^2 - 9$ | f) $x^2 + 10x + 25$ | l) $x^2 - 100$ |
| c) $x^2 - 25$ | g) $9x^2 - 4$ | m) $x^2 + 20x + 100$ |
| d) $x^2 - 4x + 4$ | h) $25x^2 - 30x + 9$ | n) $16x^2 + 24x + 9$ |

5. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Para descomponer seguimos os seguintes pasos nesta orde:

- i) Sacamos factor común
- ii) Identificamos identidades notables

5.1 FACTOR COMÚN

Sacar **factor común** consiste en transformar unha expresión de suma ou resta en produto. Para iso, extraemos como coeficiente ou M.C.D. dos coeficientes do polinomio, e como parte literal a letra ou letras que se repitan en **tódolos** termos do polinomio co menor expoñente.

EXEMPLO:

En $3x+3y$ tódolos coeficientes son múltiplos de 3 pero non hai variables que se repitan en tódolos termos, polo tanto so sacamos de factor común 3: $3x+3y=3(x+y)$

En $6x-3y$ tódolos coeficientes son múltiplos de 3 pero non hai variables que se repitan en tódolos termos, polo tanto só sacamos de factor común 3: $6x-3y=3(2x-y)$

En $2x^2-4x^3$ tódolos coeficientes son múltiplos de 2 e hai variables que se repitan en tódolos termos, que é x, polo tanto sacamos de factor común 2 e x co su menor expoñente: $2x^2-4x^3=2x^2(1-2x)$.

En $-18x^3y^2-12x^2y+24xy$ tódolos coeficientes son múltiplos de 6 e hai variables que se repiten en tódolos termos, que é la x e la y, polo tanto sacamos de factor común 6 e x e y con su menor expoñente: $6xy(-3x^2-2x+4)$.

➡ EXERCICIOS.

37. Saca factor común nos seguintes polinomios:

- | | | |
|--------------------|-----------------------|--------------|
| a) $7x+7y$ | f) $2a^2-8ab+4a^2b^2$ | k) $8+4a$ |
| b) $6a-9b$ | g) $6a^2b+3ab^2-9ab$ | l) x^2+xy |
| c) $2x+xy$ | h) $8x+8y$ | m) $2a^2+6a$ |
| d) $x+x^2-x^3$ | i) $3a+3b$ | n) $6a+2a^3$ |
| e) $5x^2+10xy+15x$ | j) $5x+10$ | o) y^3+7y |

38. Extrae factor común nos seguintes polinomios:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| a) $8x^2-4x$ | d) $-12ab^3+4b^2-6b^4$ |
| b) $18x^3y^2-12x^2y^3$ | e) $34a^4-14a^3b+28ab^3$ |
| c) $30a^2b-15ab^2+5a^2b^2$ | f) $20a^4b^2c+36a^2b-18a^3b^2$ |

39. Descompón factorialmente estos polinomios:

a) $x^2 + x$

b) $x^3 + x^2$

c) $x^3 - x$

d) $x^3 - 2x^2 + 1$

e) $x^4 + 6x^3 + 9x^2$

f) $x^3 - 9x$

g) $x^4 - 25x^2$

h) $x^2 + 3x - 4$

6. FRACCIÓNS ALXÉBRICAS

Chámase fracción alxébrica ao cociente indicado de dous polinomios. Por exemplo:

$$\frac{3x+2}{5x-1} \quad -\frac{4y}{x+1} \quad \frac{x^2+2}{9x}$$

Simplificación de fraccións alxébricas. Consiste en atopar unha fracción equivalente dividendo ou numerador e o denominador entre un factor común. Para iso, descompoñemos factorialmente os polinomios e utilizamos as propiedades de potencias.

EXEMPLO:

$$a) \frac{4x^3}{3x} = \frac{4x^2}{3}$$

$$b) \frac{6xy}{3x^2y} = \frac{6xy}{3x^2y} = \frac{2}{x}$$

$$c) \frac{x^2+x}{3x} = \frac{x \cdot (x+1)}{3x} = \frac{x+1}{3} [0,1]$$

$$d) \frac{x^2-9}{3x-9} = \frac{(x+3)(x-3)}{3(x-3)} = \frac{x+3}{3}$$

➡ EXERCICIOS.

40. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

$$a) \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$$

$$b) \frac{a^2-b^2}{a^2-6a+9}$$

$$c) \frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$$

$$d) \frac{x-4}{x^2-8x+16}$$

$$e) \frac{a^2+8a+16}{a^2-16}$$

$$f) \frac{2a+3}{4a^2-9}$$

$$g) \frac{9x^2+6x+1}{3x+1}$$

$$h) \frac{a^2-16}{a+4}$$

41. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

$$a) \frac{x^3}{xy}$$

$$b) \frac{5x^3y^2}{3xy}$$

$$c) \frac{6x^2y}{3x^2y^2}$$

$$d) \frac{4x^2y}{4xy}$$

$$e) \frac{x^2-4x+4}{x-2}$$

$$f) \frac{x^2-9}{2x-6}$$

$$g) \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}$$

$$h) \frac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)}$$

$$i) \frac{y^2(x^2-4x+4)}{x(x-2)}$$

$$j) \frac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2}$$

$$k) \frac{x^3(x^2-16)}{x(x+4)}$$

$$l) \frac{x(2x^2-16x+32)}{(x^2-16)}$$

$$m) \frac{18x^4-36x^2+18}{9x^2 \cdot (x-1)^2}$$

$$n) \frac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$$

$$o) \frac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$$

7. ECUACIONES DE PRIMEIRO GRAO

7.1 IDENTIDADES E ECUACIONES.

Unha igualdade alxébrica está formada por dúas expresións alxébricas separadas polo signo “=”. As igualdades alxébricas son de dous tipos:

- **Identidade:** é certa para calquera valor das letras.
- **Ecuación:** non é certa para tódolos valores das letras.

Ao calcular o valor numérico das expresións alxébricas que forman a igualdade pode ocorrer que resulte unha igualdade numérica. Neste caso, dicimos que a igualdade é certa. En caso contrario, dicimos que a igualdade no é certa.

➡ EXERCICIOS.

42. Determina se son certas estas igualdade para os valores que se indican:

a) $2x + x^2 - 3 = 1$ si $x = 4$

d) $x^4 + 2 = 3$ si $x = -1$

b) $x^3 - 2x + 2 = -19$ si $x = -3$

e) $3x + 4y = 7$ si $x = y = 2$

c) $x^4 + x^3 - x = 1$ si $x = -1$

7.2 ELEMENTOS DUNHA ECUACIÓN

Os principais elementos dunha ecuación son:

- **Membros:** son cada unha das dúas expresións alxébricas separadas polo signo igual; a expresión situada á esquerda chámase primeiro membro, e a situada á dereita **segundo membro**.
- **Termos:** son os sumandos dos membros. Se están formados por un solo número, chámase termo **independente**.
- **Incógnitas:** son as letras cuxos valores son descoñecidos.

Solución. Ecuacións equivalentes.

- Os valores da incógnita que fan certa a igualdade chámanse solucións. Resolver **unha ecuación** é atopar a súa solución ou solucións.
- Dúas ecuacións son **equivalentes** cando teñen as mesmas solucións.

43. Determina os elementos destas ecuacións:

a) $x^2 + x - 1 = x^2 - 2x$

b) $2x - 5 = 4(x + 9)$

44. Cal dos seguintes números é solución da ecuación $5x - 9 = 4(x - 5)$?
- a) 4 b) -3 c) 14 d) -11
45. Cal destes números é solución da ecuación $x(x - 1) = x^2 + x$?
- a) $x = 1$ c) $x = 0$ e) $x = -3$
 b) $x = -1$ d) $x = 2$ f) $x = -2$
46. O valor 4 é solución dalgunha das ecuacións?
- a) $x^2 - 16 = 0$ d) $x^2 - x + 8 = x + 4$
 b) $x + 4 = 0$ e) $x^3 - 124 = 0$
 c) $x^2 - 4 = 8$ f) $x^2 - x + 8 = x + 4 - 8$

7.3 ECUACIONES DE PRIMER GRAO

Unha **ecuación de primeiro grao** é unha igualdade alxébrica que se pode expresar da forma $ax + b = 0$, con a e b números reais e $a \neq 0$. Dita ecuación ten solución única se a ten: $x = -\frac{b}{a}$

Método de resolución de ecuacións de primeiro grao

1º Quitamos as parénteses: aplicando a propiedade distributiva.

2º Eliminamos os denominadores: calculamos o m.c.m. dos denominadores e reducimos os dous membros a común denominador (é o mesmo procedemento que se utiliza para reducir os racionais a común denominador), e despois elimínanse.

3º Agrupamos os termos con x nun dos membros, e os termos independentes noutro, tendo en conta que cando pasamos un termo dun membro a outro, este cambia de signo, os positivos serán negativos e os negativos serán positivos.

4º. Reducimos termos semellantes.

5º. Despexamos a incógnita: o número que multiplica á incógnita sempre pasa dividindo.

6º. Comprobamos a solución: substituímos a incógnita pola solución en ambos membros e calculamos. O resultado debe ser o mesmo a ambos membros da ecuación.

47. Calcula a solución destas ecuacións.

- a) $4x + 5 = -3x + 12$ d) $6x + 40 = 2x + 50$ g) $9x - 8 = 8x - 9$
 b) $3x + 7 = 2x + 16$ e) $-3x - 42 = -2x - 7$ h) $-5x - 13 = -2x - 4$
 c) $5 + 20x = 7 + 12x$ f) $3x - 50 = 10 - 2x$

48. Resuelve:

a) $6(x+11) = 40 + 6(x+2)$

b) $2(x-17) = x-3(12-2x)$

c) $x-5(x-2) = 6$

d) $120 = 2x - (15 - 7x)$

e) $5(x+4) = 7(x-2)$

f) $3(x+7) - 6 = 2(x+8)$

49. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{4x}{20} = 3$

c) $\frac{-2x}{3} = 4$

e) $\frac{9x}{3} = -5$

b) $\frac{3x}{6} = -21$

d) $\frac{7x}{4} = 28$

f) $\frac{-3x}{2} = -25$

50. Resuelve.

a) $\frac{x-2}{5} = 1$

c) $\frac{3x}{2} + 20 = x + 25$

b) $\frac{3x+15}{6} = -7$

d) $\frac{3x}{4} - 1 = 12 - 3x$

51. Calcula o valor de x.

a) $\frac{3x}{5} + 7 = \frac{2x}{6} + 9$

d) $\frac{x+8}{2} - \frac{x-4}{6} = 2$

b) $\frac{x+2}{3} = 5x - 46$

e) $\frac{x-5}{5} - \frac{8-x}{2} + \frac{2x-10}{2} = 3$

c) $x - \frac{x+4}{5} = 1 + \frac{x}{2}$

f) $\frac{x-10}{2} - \frac{x-20}{4} - \frac{x-30}{3} = 5$

52. Obtén a solución destas ecuaciones.

a) $\frac{2x-10}{3} - \frac{3(x-12)}{4} = -1$

e) $\frac{4x-6}{10} + 2x = 21 - \frac{3(x+1)}{12}$

b) $\frac{-3x-3}{5} = 3 - 4(x+2)$

f) $\frac{2(x+5)}{2} = \frac{(x+1)(x-3)}{3}$

c) $\frac{2x-5}{5} + \frac{x+1}{4} = 20 - x$

g) $\frac{x}{6} - \frac{x}{3} - \frac{4(x-1)}{2} = \frac{5(x-2)}{2}$

d) $\frac{3-x}{7} - x = \frac{3+2(x-1)}{14}$

53. Resuelve estas ecuaciones:

a) $3x+8 = 5x+2$

d) $120 = 2x - (15 - 7x)$

b) $-11x = 4x+15$

e) $\frac{x+2}{2} = \frac{x+3}{3}$

c) $x-5(x-2) = 6x$

$$f) \quad \frac{x}{4} + 5 = \frac{7x}{12}$$

$$g) \quad \frac{4(x-1)}{3} - \frac{2(x-3)}{6} = 5$$

$$h) \quad 2x + \frac{x+5}{6} - \frac{3(x+4)}{8} = 7 - 3x$$

8. ECUACIONES DE SEGUNDO GRAO

Unha ecuación de segundo grao cunha incógnita é unha igualdade alxébrica que se expresa da forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b, c números reais e $a \neq 0$.

Si b e c son números distintos de cero, decimos que a ecuación é **completa**.

Si b o c é igual a cero, a ecuación é **incompleta**.

8.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRAO COMPLETAS

Para obter as solucións dunha ecuación de segundo grao completa utilizamos a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. O

signo dobre “ \pm ” indica que poden existir dúas solucións:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cando unha ecuación ten dúas solucións, designámolas como x_1 e x_2 para distinguilas.

EXEMPLO: Resolve a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Primeiro identificamos a, b e c : $a = 1, b = -5$ e $c = 6$. Aplicamos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$= \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Esta ecuación ten dúas solucións: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$

54. Resolve.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

e) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 9x + 18 = 0$

d) $x^2 - 9x + 14 = 0$

f) $3x^2 + 12x + 9 = 0$

55. Expresa da forma $ax^2 + bx + c = 0$ e resolve:

a) $x^2 - x = 20$

g) $8x + 16 = -x^2$

b) $2x^2 = 48 - 10x$

h) $-16 = -3x^2 - 2x$

c) $3x^2 - 8 = -2x$

i) $x^2 + 9 = 10x$

d) $x^2 + 9 = 10x$

j) $x^2 = 2x - 1$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

k) $7x^2 - 3x = 1$

f) $2x^2 - 4x^2 + 13 = 0$

l) $5 - 4x = x^2$

8.2 ECUACIONES DE SEGUNDO GRAO INCOMPLETAS

► **CASO 1.** Si $b = 0$, ecuación do tipo $ax^2 + c = 0$. En este tipo de ecuación temos que despegar x^2

► Se $\frac{-c}{a}$ é positivo, hai dúas solucións $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

► Se $\frac{-c}{a}$ é negativo, no hai solucións

EXEMPLO. Resolve a ecuación $3x^2 - 27 = 0$, e comproba que obtés o mesmo resultado aplicando a fórmula da ecuación completa.

$$3x^2 - 27 = 0 \quad \rightarrow 3x^2 = 27 \quad \rightarrow x = \frac{27}{3} = 9 \quad x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Se resolvemos a ecuación utilizando a fórmula da ecuación completa, obtemos o mesmo resultado: $3x^2 - 27 = 0$
 $\Rightarrow a = 3, b = 0, c = -27$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-27)}}{2 \cdot 3} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 324}}{6} = \frac{0 \pm \sqrt{324}}{6} = \frac{\pm 18}{6}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{+18}{6} = 3 \\ x_2 = \frac{-18}{6} = -3 \end{cases}$$

EXEMPLO. Resolve a ecuación $3x^2 + 27 = 0$, e comproba que obtés o mesmo resultado aplicando a fórmula da ecuación completa.

$$3x^2 + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = -27 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-27}{3} = -9 \quad \Rightarrow \quad \text{Non ten solución}$$

Si resolvemos a ecuación utilizando a fórmula da ecuación completa, obtemos o mesmo resultado:

$$3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 0, c = 27$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{2 \cdot 3} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 324}}{6} = \frac{0 \pm \sqrt{-324}}{6}. \text{ Non ten solución.}$$

56. Resolve:

a) $x^2 - 9 = 0$

d) $2x^2 - 32 = 0$

g) $10x^2 + 11 = 0$

b) $x^2 - 7 = 0$

e) $x^2 + 9 = 0$

h) $3x^2 - 243 = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$

f) $7x^2 - 6 = 0$

i) $3x^2 + 243 = 0$

57. Calcula e comproba que obtés o mesmo resultado aplicando a fórmula da ecuación completa:

a) $900x^2 = 9$

b) $-x^2 = -10$

► **CASO 2.** Si $c = 0$, ecuación do tipo $ax^2 + bx = 0$. Este tipo de ecuacións van a ter sempre dúas

solucións: $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$

EXEMPLO. Resolve a ecuación $3x^2 - 2x = 0$

Sol: extraemos factor común $x(3x - 2) = 0$. Para que un produto de dous factores sexa cero, un dos factores

ten que ser cero, polo tanto: $x(3x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Se resolvemos a ecuación utilizando a fórmula da ecuación completa, obtemos o mesmo resultado:

$$3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{2 \pm 2}{6}$$

$$= \begin{cases} x = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2-2}{6} = \frac{0}{6} = 0 \end{cases}$$

58. Resolve estas ecuacións de segundo grao incompletas.

a) $x^2 - 8 = 0$

e) $x^2 - 1 = 0$

b) $2x^2 + 50x = 0$

f) $x^2 - x = 0$

c) $-8x^2 - 24x = 0$

g) $x^2 - 16 = 0$

d) $3x^2 + 75x = 0$

h) $4x^2 - 2x = 0$

► **CASO 3.** Si $b = 0$ y $c = 0$, ecuacións do tipo $ax^2 = 0$. Este tipo de ecuacións só ten unha solución $x=0$

EXEMPLO. Resolve a ecuación $7x^2 = 0$

$$7x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Si resolvemos a ecuación utilizando a fórmula da ecuación completa, obtemos o mesmo resultado: $7x^2 = 0$

$$\Rightarrow a=7, b=0, c=0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 7 \cdot 0}}{2 \cdot 7} = \frac{0 \pm \sqrt{0-0}}{14} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{14} = \frac{0 \pm 0}{14} = \frac{0}{14} = 0$$

59. Resolve.

- | | | |
|---------------------|----------------------|-------------------|
| a) $x^2 + 7x = 0$ | e) $-x^2 = 0$ | l) $-x^2 - x = 0$ |
| b) $6x^2 = 0$ | f) $x^2 + 9x = 0$ | m) $-9x^2 = 0$ |
| c) $-4x^2 + 5x = 0$ | g) $14x^2 + 7x = 0$ | |
| d) $-2x^2 + 6x = 0$ | h) $10x^2 - 11x = 0$ | |

60. Resolve.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 7x = 0$ | e) $x^2 - 25x = 0$ | i) $16x(x-5) = 0$ |
| b) $3x^2 - 12x = 0$ | f) $4x^2 = 5x$ | l) $6x^2 - 6x = 12x$ |
| c) $x^2 + 3x = 0$ | g) $x^2 - 10x = 0$ | |
| d) $3x = 4x^2 - 2x$ | h) $25x^2 - 100x = 0$ | |

Isto nos leva a poder resolver ecuacións de segundo grao o de grao maior sen ter que desenvolvelas sempre e cando estean factorizadas e igualadas a 0: hai que ter en conta que un produto é cero cando un dos seus factores é cero.

61. Resolve, sen aplicar a fórmula xeral:

- | | | |
|----------------------|--|--|
| a) $5x(2x-1) = 0$ | e) $(x+3)(2x-5)\left(5-\frac{x}{2}\right) = 0$ | h) $\left(\frac{3x}{4} - \frac{4}{5}\right)^2 = 0$ |
| b) $(x-2)(3x+7) = 0$ | | |
| c) $(x+2)(x-2) = 0$ | f) $(x-5)^2 = 0$ | |
| d) $(x-3)(x+3) = 0$ | g) $(x-2)^2 + x = x$ | |

9. PROBLEMAS

9.1. Problemas numéricos.

- ➡ Intenta asociar a incógnita co número menor.
- ➡ Un número par é $2x$. Un número impar é $2x+1$.
- ➡ O 20 % de x é $0,20x$.

1. Se a un número lle sumas 12, obtés 25. Cal é o número?
2. Se a un número lle restas 10, obtés 20. De que número se trata?
3. Un número x , e o seu seguinte, $x+1$, suman 13. Cales son eses números?
4. Na clase somos 23 persoas, pero hai tres mulleres máis que homes. Cantos homes e mulleres hai na clase?
5. Busca un número tal que o seu dobre máis tres unidades sexa igual ao seu triplo menos cinco unidades.
6. Dividindo un número entre tres, obtemos o mesmo resultado que restándolle 16. De que número se trata?
7. Multiplicando un número por 5, obtense o mesmo resultado que sumándolle 12. Cal é ese número?
8. Se ao triplo dun número se lle suman 15 e o resultado divídese entre 4, resulta 9. Cal é ese número?
9. A suma de dos números é 167, e su diferenza é 19. Cales son eses números?
10. Calcula un número natural que sumado ao seu seguinte resulte 157.
11. A suma de tres números consecutivos é 135. Cales son eses números?
12. Se á cuarta parte dun número se lle restan tres unidades, obtense a súa quinta parte. Calcula ese número.
13. Atopa un número tal que o cuádruplo do número máis 20 unidades sexa igual a 68.
14. Atopa tres números enteiros consecutivos tal que a suma sexa 189.
15. Calcula un número tal que a súa cuarta parte máis a súa sexta parte sumen 15 unidades.
16. Calcula dous números enteiros consecutivos tal que o produto sexa 420.
17. A suma de tres números pares consecutivos é 60. Calcula dichos números.
18. Una ensaimada custa 10 céntimos máis que un croissant. Tres croissants e catro ensaimadas custaron 6 €. Cal é o custe de cada peza?
19. Nunha caixa dun supermercado hai 1.140 € repartidos en billetes de 5, 10, 20 e 50 €. Sabendo que:
 - a) Hai o dobre de billetes de 5 € que de 10 €.
 - b) De 10 € hai a mesma cantidade que de 20 €.
 - c) De 20 € hai seis billetes máis que de 50 €.
 - d) Cantos billetes de cada clase ten a caixa?
20. Narciso mercou nas rebaixas dous pantalóns e tres camisetas por 161 €. Cal era o prezo de cada artigo sabendo que un pantalón custaba o dobre dunha camiseta?
21. Reparte 280 € entre tres persoas, de maneira que a primeira reciba o triplo da segunda, e esta o dobre da terceira.
22. Tres agricultores reciben unha indemnización de 100.000 € pola expropiación de terreos para a construción dunha autovía. Como terán que repartirse o diñeiro, sabendo que o primeiro perdeu o dobre do segundo e que este perdeu o triplo do terceiro?
23. Reparte 3.900 € entre tres persoas, de forma que a cada un lle corresponda 500 € máis que o anterior.

24. Un pai reparte 1.680 € entre dous fillos, de forma que o menor recibe os $\frac{2}{5}$ do que recibe o maior. Canto recibe cada un?
25. Repartíronse 500 litros de gasóleo, a partes iguais, en dous toneis. Cantos litros temos que pasar de un ao outro para que o segundo teña o triplo do primeiro?
26. Dun depósito cheo de auga, sácase primeiro a metade de auga que conten, e despois, un quinto do resto. Se no depósito quedan aínda 600 litros, cal é a capacidade do depósito?
27. Dunha peza de tea véndese a metade, e despois a terceira parte da lonxitude inicial. Se quedan 4 m de tea, cal era a lonxitude inicial da peza?
28. Una persoa planta a metade da súa horta de pementos; a terceira parte, de tomates, e o resto, que son 200 m², de patacas. Cal é a superficie total da horta?
29. Compramos por 83 € uns zapatos e uns pantalóns que custaban 110 €. Se os zapatos rebaixáronos nun 20%, e nos pantalóns, un 30 %, cal era o prezo inicial de cada produto?
30. Pagamos 66 € por unha prenda que estaba rebaixada un 12 %. Cal era o prezo sen rebaixa?
31. Laura mercou unha blusa e unha saia por 66 €. Ambas tiñan o mesmo prezo pero na blusa fixéronlle un 20 % de rebaixa e na saia só un 15 %. Canto custaba orixinalmente cada prenda?
32. Un inversor obtivo un beneficio de 156 € por un capital colocado ao 4 % durante 3 anos. A canto ascendía o capital?

9.2. Problemas de idades.

Fai unha táboa:

	Agora	Dentro de 20 anos
Fillo	x	$x + 20$
Nai	$3x$	$3x + 20$

33. Xaquín ten 14 anos, a súa irmá 16 e a súa nai 42. Cantos anos teñen que pasar para que entre os fillos sumen a idade da nai?
34. Un pai ten 38 anos, e o seu fillo, 11. Cantos anos teñen que pasar para que o pai teña só o dobre da idade do fillo?
35. A idade de Dona Adela é seis veces a do seu neto Fernando, pero dentro de 8 anos será o cuádruplo. Que idade ten cada un?
36. Roberto ten o triplo de idade que a súa filla Nuria. Calcula a idade de cada un sabendo que dentro de 12 anos a idade do pai será soamente o dobre ca da súa filla.
37. Una nai ten 35 anos máis que o seu fillo, e dentro de 15 anos será o dobre da do fillo. Cantos anos ten na actualidade?
38. A idade dun pai é cinco veces a idade da filla. Se dentro de dous anos a idade do pai será catro veces a idade da filla, cal é a idade actual de cada un?
39. Paulo ten 14 anos e su nai 42. Cantos anos teñen que transcorrer para que a idade da nai sexa o dobre da de Paulo?

40. Un pai ten o triplo da idade do seu fillo. Se o pai tivese 10 anos menos e o fillo 18 máis, os dous terían a mesma idade. Calcula a idade de cada un.
41. Un pai ten 50 anos, e os seus fillos 12 e 7 cada un. Cantos anos transcorrerán para que a idade do pai sexa igual á suma das idades dos fillos?
42. As idades dunha nai e unha filla suman 40 anos, e dentro de 14 anos a idade da nai será o triplo da filla. Calcula a idade actual de cada unha.

9.2. Problemas de mesturas

Fai unha táboa:

	Subst A	Susbt B	Mestura
Prezo (€/kg)	2	5	3
Masa (kg)	x	$100 - x$	100
Diñeiro (€)	$2x + 5 \cdot (100 - x) = 3 \cdot 100$		

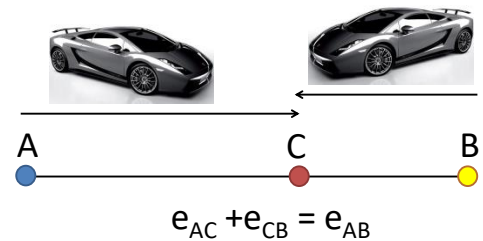
43. Mesturando aceite de xirasol a 0,80 €/l, con aceite de soia a 0,60 €/l, obtivéronse 500 litros dunha mestura que sae a 0,75 €/l. Que cantidade de aceite de cada tipo usouse?
44. Que cantidade de vino de 3,5 €/l hai que mesturar con 300 l de outro vino de calidad superior, a 6 €/l, para que a mestura salga a 5 €/l.
45. Un fabricante de queixo mestura certa cantidade de leite de vaca, a 0,5 €/l, con outra cantidade de leite de ovella a 0,80 €/l, obtendo 300 l de mestura a un prezo medio de 0,70 €/l. Cantos litros de cada tipo de leite empregou?
46. Que cantidade de café de 7,20 €/kg temos que mesturar con 8 kg doutra clase superior de 9,30 €/kg para obter unha mestura que saia a un prezo medio de 8,40 €/kg?
47. Mestúrase café natural de 7,4 €/kg e café torrefacto de 6,8 €/kg, e obtense 150 kg a 7,04 €/kg. Cantos quilos de cada tipo se mesturaron?
48. Mestúrase avea de 0,3 €/kg e centeo de 0,2 €/kg para facer penso de vacas. Si se fan 100 kg de penso a 0,23 €/kg, cantos quilos de avea e de centeo se utilizaron?
49. Fúndese prata de lei 0,6 con prata de lei 0,9 para acadar unha aliaxe de 50 g dunha lei de 0,78. Calcula a cantidade de cada tipo de prata que se usou?
50. Alíanse dous lingotes de ouro. Uno de eles cunha lei de 0,8 e outro cunha lei 0,6. Si se conseguiron 800 g dunha aliaxe e cunha lei 0,725, cantos gramos pesaba cada lingote de ouro?
51. Deséxase mesturar un xabón líquido normal de 1,5 €/l con xabón extra de 2 €/l, para facer 200 litros de mestura a 1,7 €/l. Calcula a cantidade de litros que se deben mesturar de cada tipo de xabón.

9.3. Problemas de móbiles

Fai un gráfico tendo en conta: $\text{velocidade} = \text{espazo} \cdot \text{tempo}$.

Hai tres casos que se nos poden presentar nestes problemas:

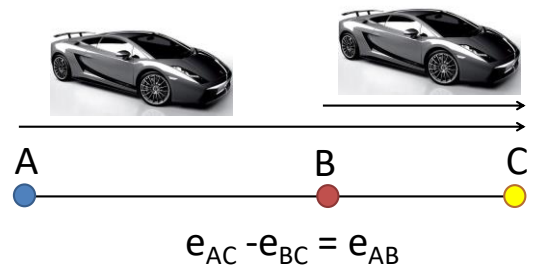
1^{ro} CASO: os móbiles móvense en sentido contrario e parten de sitios distintos.



EXEMPLO: dúas cidades A e B distan 300 km entre si. Ás 9 da mañá parte da cidade A un coche cara B cunha velocidade de 90 km/h, e da cidade B parte outro cara A cunha velocidade de 60 km/h. Pídese:

- Canto tempo tardarán en encontrarse?: $90t + 60t = 300 \Rightarrow 150t = 300 \Rightarrow t = 2$ horas
- A hora do encontro: encontraranse ás 11 da mañá
- A distancia percorrida por cada un: $e_{AB} = 90 \cdot 2 = 180$ km $e_{BC} = 60 \cdot 2 = 120$ km

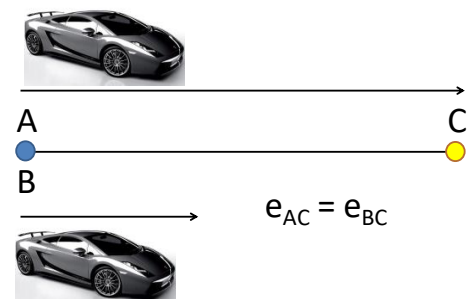
2^{do} CASO: os móbiles van no mesmo sentido e parten de sitios distintos.



EXEMPLO: dúas cidades A e B distan 180 km entre si. Ás 9 da mañá sae un coche de cada cidade e os dous coches van no mesmo sentido. O que sae de A circula a 90 km/h, e o que sae de B va a 60 km/h. Pídese:

- O tempo que tardarán en encontrarse: $90t - 60t = 180 \Rightarrow 30t = 180 \Rightarrow t = 6$ horas
- A hora do encontro: encontraranse ás 3 da tarde.
- A distancia percorrida por cada un: $e_{AB} = 90 \cdot 6 = 540$ km $e_{BC} = 60 \cdot 6 = 360$ km

3^{er} CASO: os móbiles parten do mesmo punto e co mesmo sentido.



EXEMPLO. Un coche sae da cidade A cunha velocidade de 90 km/h. Tres horas máis tarde sae da mesma cidade outro coche na súa busca cunha velocidade de 120 km/h. Pídese:

- O tempo que tardará en alcanzalo: $90t = 120 \cdot (t - 3)$
 $90t = 120t - 360 \Rightarrow -30t = -360 \Rightarrow t = 12$ horas

- b) A distancia á que se produce o encontro: $e_1 = 90 \cdot 12 = 1080$ km
52. Irene sae en moto desde su vila cara o leste cunha velocidade de 60 km/h. Dúas horas máis tarde, María sae en moto tras dela, a unha velocidade de 90 km/h. Canto tempo tardará María en alcanzar a Irene?
53. Un coche sae dunha cidade A cara outra cidade B, que está a 400 km de distancia, cunha velocidade de 120 km/h. Á mesma hora, outro coche sae de B cara A cunha velocidade de 80 km/h.
- a) Canto tempo tardarán en encontrarse os coches?
- b) A que distancia de A se encontrarán?
54. Ás 8 da mañá un coche e unha moto saen de dos cidades, e van un cara o outro pola mesma estrada. A velocidade de coche é de 100 km/h e a velocidade da moto é de 70 km/h. Si a distancia entre as cidades é de 450 km, a que hora se encontrarán o coche e a moto?
55. Ás 9 da mañá. Marta sae en bicicleta dunha vila a unha velocidade de 20 km/h. Dúas horas e media despois, Irene sae en su busca cunha moto a 60 km/h. A que hora alcanzará Irene a Marta?
56. Dos ciclistas saen simultaneamente; un, de A cara B, á velocidade de 24 km/h, e o outro de B cara A, a 16 km/h. Se a distancia entre A e B é de 30 km. Canto tardarán en encontrarse?
57. Dous trens encóntranse, respectivamente, nas estacións de dúas cidades separadas entre si 132 km. Ambos parten á mesma hora, por vías paralelas, cara a cidade contraria. Se o primeiro vai a 70 km/h, e o segundo a 95 km/h, canto tempo tardan en cruzarse?
58. Un ciclista sae de certa poboación, pola estrada, á velocidade de 22 km/h. Hora e media despois, sae na súa busca un motorista a 55 km/h. Canto tardará en darlle alcance?
59. Un camión sae pola estrada de certa cidade a 60 km/h. Dez minutos despois sae na súa persecución un coche que tarda quince minutos en darlle alcance. A que velocidade ía o coche?
60. Un coche circula durante un tempo por unha estrada nacional a 90 km/h, e despois, por unha autovía a 120 km/h. Se a viaxe durou un total de 5 horas e a velocidade media resultante foi de 108 km/h, durante canto tempo circulou pola estrada?

9.4. Problemas de billas ou depósitos

Expresamos a parte do depósito nunha unidade de tempo (hora, minuto) entre as billas e o desaugue. Logo hai que pasar esa parte en tempo, invertendo o resultado obtido.

EXEMPLO. Un depósito dispón de dúas billas, A e B. Abrindo soamente A, o depósito énchese en 3 horas. Abrindo ambos, énchese en 2 horas. Canto tardará en encher o depósito si abrimos soamente B?

Se a billa A enche o depósito en 3 h \Rightarrow en 1 h enche $\frac{1}{3}$ do depósito.

Se as dúas billas enchen o depósito en 2 h \Rightarrow en 1 h enche $\frac{1}{2}$ do depósito

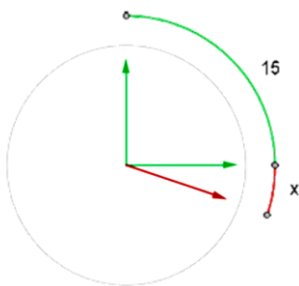
Polo tanto só a billa B nunha hora enche $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ do depósito \Rightarrow a billa B tarda 6 horas en encher o depósito.

61. Un tanque aliméntase de dúas bocas de auga. Abrindo soamente a primeira, o tanque énchese en 8 horas, e abrindo ambas en 3 horas. Canto tardará se soamente abrimos a segunda boca?
62. Unha billa enche un depósito en 30 minutos. Si abrimos á vez unha segunda billa, o depósito se énchese en 20 minutos. Canto tardará en encherse só coa segunda billa?
63. Unha billa A enche un depósito de auga en 2 h e outra billa faino en 3h. O depósito ten un desaugue que o baleira en 6 h coas billas pechadas. Canto tempo tardarán as dúas billas en encher á vez o depósito si está o desaugue aberto?
64. Unha billa A enche un depósito de auga en 12 h, outra billa B faino en 6h e outra C en 4h. O depósito ten un desaugue que o baleira en 10 h si están as billas A, B e C pechadas. Canto tempo tardarán as tres billas en encher á vez o depósito si está o desaugue aberto?
65. Unha billa A enche un depósito de auga en 3 h e outra billa B faino en 4h. O depósito ten un desaugue que o baleira en 6 h si están as billas pechadas. Canto tempo tardarán as dúas billas en encher á vez o depósito si está o desaugue aberto?
66. Unha billa A enche un depósito de auga en 4 h. Si abrimos a billa A e a billa B, énchese o depósito en 3 h. Canto tempo tardará só a billa B en encher o depósito?

9.5. Problemas de reloxo

A velocidade da agulla dos minutos é 12 veces maior que a velocidade da agulla horaria, é dicir, mentres a agulla horaria percorre 5 minutos, a agulla dos minutos recorre 60 minutos. O ángulo, é dicir, o arco descrito que percorre a agulla dos minutos é sempre 12 veces maior que o arco que describe a agulla horaria.

EXEMPLO. Un reloxo marca as 3 en punto. A que hora entre as 3 e as 4 se superpoñerán as agullas?



x é o arco que describe a agulla horaria.

$(15 + x)$ é o arco que describe o minutoiro.

$$15 + x = 12x$$

$$x = 15/11 \text{ min}$$

67. Un reloxo marca as 2 en punto. A que hora formarán as súas agullas por primeira vez un ángulo recto?
68. A que hora estarán por primeira vez en liña recta as agullas do reloxo despois das doce?
69. A que hora forman por primeira vez as agullas dun reloxo un ángulo de 120° despois das doce?

9.5. Problemas xeométricos

Fai sempre un debuxo no que se escriban os datos e as incógnitas.

70. Calcula as dimensións dunha finca rectangular que ten 12 dam máis de largo que de ancho, e unha superficie de 640 dam².
71. Nun triángulo isósceles, cada un dos lados iguais é 4 cm máis largo que o lado desigual. Si o perímetro do triángulo mide 44 cm, cal é a lonxitude de cada lado?
72. A diagonal dun cadrado mide 6 cm. Calcula a lonxitude do lado do cadrado.
73. Nun triángulo isósceles, o ángulo desigual mide a cuarta parte do valor dos ángulos iguais. Calcula o valor dos tres ángulos.
74. Cada un dos lados iguais dun triángulo isósceles mide o triplo que o lado desigual. Si o seu perímetro mide 56 cm, calcula a lonxitude dos lados do triángulo.
75. Nun rectángulo a base é o dobre que a altura. Calcula a lonxitude dos seus lados si o seu perímetro mide 72 cm.
76. As medidas, en cm, dos tres lados dun triángulo rectángulo son tres números naturais consecutivos. Calcula o perímetro do triángulo.
77. Nunha cartolina rectangular de 0,1 m² de superficie, recortamos dous cadrados, de forma que un ten 2 cm de lado máis ca outro. Si sobran 116 cm² de cartolina, calcula a lonxitude dos lados dos cadrados recortados.
78. Si aumentamos en 3 cm o lado dun cadrado, su área aumentará en 51 cm². Calcula a lonxitude do lado do cadrado inicial.
79. Para valar unha finca de 600 m² se usaron 100 m de cerca. Calcula as dimensións da finca.
80. Calcula a lonxitude dos catetos dun triángulo rectángulo sabendo que un de eles é 7 cm máis largo que o outro e que a súa superficie é de 15 cm².
81. Atopa o lado dun cadrado sabendo que si aumentamos en 5 cm dos dous lados paralelos, obtemos un rectángulo de 24 cm².
82. A base dun rectángulo mide 9 cm máis que a súa altura. Si o seu perímetro mide 74 cm, cales son as dimensións do rectángulo?
83. Para delimitar unha praia nunha zona rectangular, o dobre de ancha que de larga, empregáronse 84 m de cinta. Cales son as dimensións do sector delimitado?
84. A amplitude dun dos ángulos dun triángulo é 13 graos maior e 18 graos menor, respectivamente, cas amplitudes dos outros dous ángulos. Calcula a medida de cada ángulo.
85. A altura dun trapezio mide 5 cm e a base maior é 6 cm máis larga que a base menor. Calcula a lonxitude de cada unha das bases sabendo que a área do trapezio mide 65 cm².