PROBABILIDAD

1.1 Introducción

La probabilidad es la parte de las matemáticas que estudia los experimentos donde influye la suerte o el azar. Dichos experimentos reciben el nombre de experimentos aleatorios.
Ejemplos: Lanzamiento de una moneda, lanzamiento de un dado, sacar una carta de una baraja …

1.2 Manejo de las operaciones de sucesos. Leyes de Morgan

Definiciones
Cuando estudiamos un experimento aleatorio es muy importante que realicemos una descripción de todos los resultados que pueden ocurrir. Al conjunto de todos estos posibles resultados se le llama espacio muestral (E) y a cada uno de los resultados, suceso.
Nota: Los sucesos los expresamos con letras mayúsculas.

Ejemplos de espacios muestrales: E_1 = {cara, cruz} E_2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Ejemplos de sucesos: A = "Salir cara" B = "Salir 2" C = "Salir par"

Sucesos elementales: están constituídos por un único resultado. A = "Salir cara" B = "Salir 2"
Sucesos compuestos: están constituídos por más de un resultado. C = "Salir par"
Suceso seguro (E): representa aquel resultado que ocurre siempre. E = "Salir valor entre 1 y 6"
Suceso imposible (Ø): representa un resultado que no puede ocurrir. Ø = "Salir 7"

Operaciones con sucesos
Al resolver un problema de probabilidad real, tenemos que traducir lenguaje coloquial a lenguaje matemático, por eso tenemos que dominar las siguientes notaciones.

- Operación unión: $A\cup B=$ "ocurre el suceso A o el suceso B" (Puede ser que ocurra solo A, que ocurra solo B o que ocurran A y B a la vez).
- Operación intersección: $A\cap B=$ "ocurren A y B a la vez"
- Operación suceso contrario o complementario: $\overline{A}=$ "no ocurre el suceso A"
- Operación diferencia: $A-B=$ "ocurre el suceso A pero no ocurre el suceso B"
- Operación condicionada: $A/B=$ "ocurre A sabiendo que ocurrió anteriormente B"

Algebra de sucesos
- Conmutativa: $A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$
- Asociativa: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- $A\cup\overline{A}=E$ $A\cap\overline{A}=\emptyset$
- $A-B=A\cap\overline{B}$ $\overline{(\overline{A})}=A$
- Leyes de Morgan: $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$ y $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Definición Dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no se pueden verificar simultáneamente, es decir, $A\cap B=\emptyset$.

Definición Se dice que A_1 , A_2 , A_3 , … , A_n constituyen un sistema completo de sucesos cuando:
1º $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ ...\ \cup A_n=E$
2º Todos los sucesos son incompatibles dos a dos, es decir, $A_i\cap A_j=\emptyset \quad \forall\, i\neq j$.

1.3 Axiomática de Kolmogorov. Manejo de las propiedades

Definición axiomática de probabilidad de Kolmogorov

Sea un experimento aleatorio cualquiera, cuyo espacio muestral es E. Una probabilidad bien definida, asocia a cada suceso A un número real, el cual debe cumplir los siguientes axiomas.

1. Cualquiera que sea el suceso A, $P(A) \geqslant 0$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces debe cumplirse que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. La probabilidad total es 1: $P(E) = 1$.

Propiedades de la probabilidad

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad P(A) = 1 - P(\overline{A})$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si un suceso $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ donde $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ entonces $P(S) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

1.4 Regla de Laplace. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos

Regla de Laplace (definición clásica de probabilidad de un suceso)

$$P(A) = \frac{N^o \, de \, casos \, favorables \, a \, A}{N^o \, total \, de \, casos \, posibles \, (n)}$$

Ejemplo 1: Consideramos el experimento aleatorio lanzar un dado.

A = “Salir un 2” $\quad P(A) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ B = “Salir par” $\quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2: Consideramos el experimento aleatorio sacar una carta de una baraja.

A = “Salir un as” $\quad P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ B = “Salir un oro” $\quad P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Probabilidad condicionada

Existen experimentos aleatorios, donde podemos distinguir dos o más etapas, dichos experimentos se llaman experimentos compuestos. Dichas etapas pueden ser independientes las unas de las otras, aunque lo más normal es que sean dependientes, es decir, que lo que ocurra en una etapa influya sobre lo que vaya a ocurrir en etapas posteriores. Esto nos obliga a introducir el concepto de probabilidad condicionada.

Definición Dados dos sucesos, A y B, la probabilidad de A condicionada a B es $P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Mide las veces que ocurre A de entre las veces que ocurre B.

Análogamente, probabilidad de B condicionada a A es $P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Corolario Regla del producto: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(B/A\right) = P(B) \cdot P\left(A/B\right)$

Sucesos independientes

Definición: Dos sucesos, A y B, se dice que son independientes cuando:

$$P\left(A/B\right)=P(A) \quad \text{y} \quad P\left(B/A\right)=P(B)$$

Definición alternativa: Dos sucesos, A y B, son independientes cuando: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

1.5 Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes

Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B otro suceso cualquiera, entonces:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P\left(B/A_1\right)+P(A_2)\cdot P\left(B/A_2\right)+P(A_3)\cdot P\left(B/A_3\right)+\ \ldots\ +P(A_n)\cdot P\left(B/A_n\right)$$

Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B otro suceso cualquiera, entonces:

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P(A_i)\cdot P\left(B/A_i\right)}{P(A_1)\cdot P\left(B/A_1\right)+P(A_2)\cdot P\left(B/A_2\right)+P(A_3)\cdot P\left(B/A_3\right)+\ \ldots\ +P(A_n)\cdot P\left(B/A_n\right)}$$

Las probabilidades $P(A_i)$ se llaman probabilidades a priori.

Las probabilidades $P\left(A_i/B\right)$ se llaman probabilidades a posteriori.

Las probabilidades $P\left(B/A_i\right)$ se llaman verosimilitudes.

1.6 Técnicas de recuento para resolver problemas

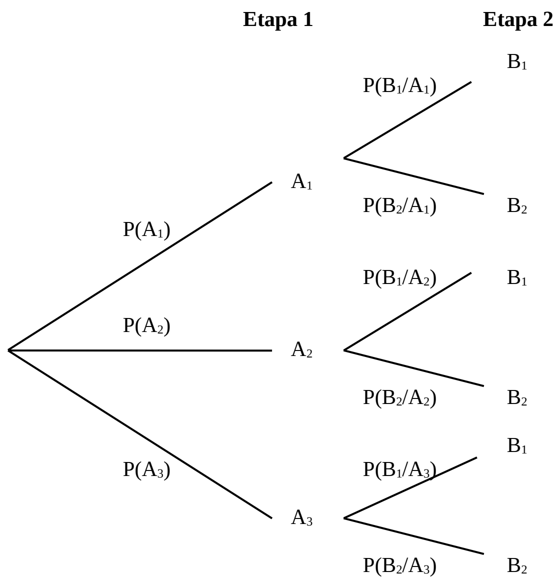
Para resolver los problemas de probabilidad, primero deberemos poner nombre a los sucesos que intervienen, luego realizar una descripción del experimento aleatorio (tabla de contingencia o diagrama de árbol) y por último utilizaremos los teoremas anteriores, las propiedades y las definiciones anteriores.

<u>Tabla de contingencia</u>

	B	$\overline{B}$	TOTAL
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
TOTAL	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

<u>Diagrama de árbol</u>

Se utiliza cuando podemos observar diferentes etapas secuenciadas en el tiempo dentro del experimento aleatorio.



Para calcular la probabilidad de un camino se utiliza la regla del producto.

$$P(A_1\cap B_1)=P(A_1)\cdot P\left(B_1/A_1\right)$$

Para calcular la probabilidad de un suceso se utiliza el Teorema de la Probabilidad Total.

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P\left(B_1/A_1\right)+P(A_2)\cdot P\left(B_1/A_2\right)+P(A_3)\cdot P\left(B_1/A_3\right)$$

MODELO 1: Problemas resueltos mediante tabla de contingencia

1º Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral con $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{14}{15}$, $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$.
a) Calcula $P(B)$ y $P(A\cap\overline{B})$.
b) Calcula $P(B/A)$. ¿Son independientes los sucesos A y B? Justifica la respuesta.

2º En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos con $P(\overline{A})=0'4$; $P(B)=0'7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A\cup B)$ y $P(A-B)$.

3º Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0'7$, $P(B)=0'6$ y $P(A\cup B)=0'9$.
a) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.
b) Calcula $P(A-B)$ y $P(A/\overline{B})$.

4º El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

5º Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.

6º Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A\cup B)=0.5$. Calcula $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(A\cap B)$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

7º El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8º a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P(A\cup B)=0.8$.
b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.82$.

9º En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:
a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

10º a) Si $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:
- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

11º En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

12º En una ciudad, el 80% de la población adulta mira la televisión, el 30% lee algún libro y el 25% mira la televisión y lee algún libro. Se pide:

a) De entre los que leen libros, ¿qué porcentaje mira la televisión?
b) Porcentaje de los que no miran la televisión y si leen algún libro.
c) Porcentaje de los que no hacen ninguna de las dos cosas.

13º Una investigación de mercado de 800 personas revelo los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto en particular y la adquisición de dicho producto:

	Recuerdan el anuncio	No recuerdan el anuncio
Compran el producto	160	80
No compran el producto	240	320

a) Calcular la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o compre el producto.
b) Si una persona recuerda el anuncio del producto, ¿qué probabilidad hay de que lo compre?
c) ¿El hecho de comprar el producto depende o no de recordar el anuncio? Justifíquese la respuesta.

14º Un estudio sociológico afirma que 3 de cada 10 personas de una determinada población son obesas, de las cuales el 60% sigue una dieta. Por otra parte, el 63% de la población no es obesa y no sigue una dieta.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue una dieta?
b) Si una persona elegida al azar sigue una dieta, ¿cuál es la probabilidad de que sea obesa?

15º Se realiza un estudio para determinar si los hogares de una pequeña ciudad se suscribirían a un servicio de televisión por cable. Los hogares se clasifican de acuerdo a su nivel de renta: alta, media o baja. La siguiente tabla nos muestra las probabilidades de las distintas intersecciones:

	Renta baja	Renta media	Renta alta
Se suscribirían	0,05	0,15	0,10
No se suscribirían	0,15	0,47	0,08

a) Si el hogar suscribe el servicio, ¿cuál es la probabilidad de que sea de renta alta?
b) ¿Son renta y posible suscripción a la televisión por cable independientes? Justificar la respuesta.
c) Calcula la probabilidad de que un hogar seleccionado al azar pertenezca por lo menos a una de estas categorías: “renta media” o “desean suscribirse”.

<u>MODELO 2: Problemas resueltos mediante diagrama de árbol</u>

1º En un estudio realizado en un centro de salud, se observa que el 30% de los pacientes son fumadores y de estos el 60% son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores el 70% son mujeres. Elegido un paciente al azar.

a) Calcula la probabilidad de que el paciente sea mujer.
b) Si el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?

2º En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es $0'01$; $0'02$ si es de la marca B y $0'04$ si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar:

a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

3º En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, la B un 4% y la C un 5%.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.

b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera fabricada por la máquina A?

4º La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de $\frac{2}{3}$. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

5º Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

6º Cuando los motores llegan al final de una cadena de producción, un inspector escoge los que deben pasar una inspección completa. Supóngase que se producen un 10% de motores defectuosos, y que el 60% de todos los motores defectuosos y el 20% de los buenos pasan una inspección completa. Calcúlese:

a) Probabilidad de que un motor elegido al azar sea defectuoso y pase la inspección.
b) Probabilidad de que un motor elegido al azar sea bueno y pase la inspección.
c) Si conocemos que el 24% de los motores pasan la inspección, ¿qué porcentaje de los mismos son defectuosos?

7º El cuadro de personal de unos grandes almacenes está formado por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de la mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o sólo trabaje en el turno de la mañana?
b) Sabiendo que no sólo trabaja en el turno de la mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

8º Una encuesta revela que el 40% de los jóvenes de cierta ciudad tiene estudios, de los cuales el 15% no tiene trabajo. Del 60% que no tiene estudios, un 25% no tiene trabajo.

a) Determina el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que no tiene trabajo.
b) Entre los que no tienen trabajo, ¿qué porcentaje tiene estudios?
c) Calcula la probabilidad de que, elegido al azar un joven de esa ciudad, tenga estudios o trabaje.

9º En un estudio hecho en cierto IES, en el que se imparte la ESO y el Bachillerato, se recogieron los siguientes datos:

- El 60% de los alumnos son mujeres.
- El 15% de los hombres estudian Bachillerato.
- El 20% de las mujeres estudian Bachillerato.
- El 30% de las mujeres que estudian Bachillerato eligen la opción de letras.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de ese IES, elegido al azar, sea mujer, estudie Bachillerato y curse la opción de letras.
b) ¿Qué porcentaje del alumnado estudia Bachillerato?
c) ¿Qué porcentaje de los estudiantes de Bachillerato son hombres?

10º En una determinada población, el 40% de sus habitantes son inmigrantes de los que el 65% trabaja en el campo, mientras que sólo el 20% de la población no inmigrante trabaja en el campo.

a) ¿Qué porcentaje de la población trabaja en el campo?
b) ¿Qué porcentaje de los que no trabajan en el campo son inmigrantes?
c) ¿Qué porcentaje de la población trabaja en el campo o no es inmigrante?

RESUMEN DE PROBABILIDAD

FÓRMULAS QUE NECESITAMOS

1. $P(\overline{A})=1-P(A)$ $\quad P(A)=1-P(\overline{A})$ $\quad P(A)+P(\overline{A})=1$

2. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

3. $P\left(A/B\right)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

4. $P(B-A)=P(B\cap\overline{A})$ ó $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ (se utiliza poco)

5. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$

   Leyes de Morgan (la segunda no se utiliza)

   $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

6. Dos sucesos A y B son independientes $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
   Dos sucesos A y B son independientes cuando que ocurra A no influye en que ocurra B.

7. Dos sucesos A y B son incompatibles $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=0$
   Dos sucesos A y B son incompatibles cuando no pueden ocurrir los dos a la vez.

TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE COLOQUIAL A FÓRMULAS

LENGUAJE COLOQUIAL	FÓRMULA
Probabilidad de que no ocurra A	$P(\overline{A})$
Probabilidad de que ocurra A u ocurra B Probabilidad de que ocurra alguno de los dos Probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos	$P(A\cup B)$
Probabilidad de que ocurra uno solo de los dos	$P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))$
Probabilidad de que ocurra A y no ocurra B	$P(A\cap\overline{B})$
Probabilidad de que sabiendo que ocurre A, ocurra B Sabiendo que ocurre A, probabilidad de que ocurra B Probabilidad de que ocurra B, sabiendo que ocurre A Probabilidad de que un miembro de A cumpla B Porcentaje de miembros de A que cumplen B	$P\left(B/A\right)$