TEMA 0: CONOCIMIENTOS PREVIOS ANÁLISIS

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Definición: Una función es una fórmula matemática donde entran en juego dos variables x e y.

Nota: Por convenio, la "x" es la variable independiente y la "y" es la variable dependiente. De esta forma, para conocer la "y" primero debemos conocer la "x" y a continuación calcular mediante la fórmula el valor de la "y".

Ejemplos: $y=x^2-5x+4$ o también $f(x)=x^2-5x+4$

$y=-2x+3$ o también $f(x)=-2x+3$

$y=\sqrt{x+4}$ o también $f(x)=\sqrt{x+4}$

Representación gráfica de una función: La primera idea que se tuvo para representar gráficamente una función fue la de hallar muchos puntos de la misma (cuadro de valores), representarlos en un eje de coordenadas cartesianas y trazar una linea que uniese a todos ellos.

2. REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones afines o lineales $f(x)=m\cdot x+n$

Nota: La gráfica asociada a este tipo de funciones es una recta, para representar una recta basta con hallar dos puntos de la misma, por ello, para representar este tipo de funciones utilizaremos un cuadro de valores con al menos 2 puntos.

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{3x-4}{2}$

Funciones cuadráticas $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Nota: La gráfica asociada a este tipo de funciones es una parábola, para representar una parábola utilizaremos un cuadro de valores donde hallaremos el vértice de la parábola y los cortes con los ejes, en algunas ocasiones, necesitaremos algún punto más.

Ejemplo: $f(x)=-x^2+4x-3$

Función valor absoluto $y=|f(x)|$

Nota: Las alturas negativas de la gráfica se transforman en positivas y las alturas positivas no cambian.

Ejemplos: a) $f(x)=|x-2|$ b) $f(x)=|x^2-2x-3|$

3. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

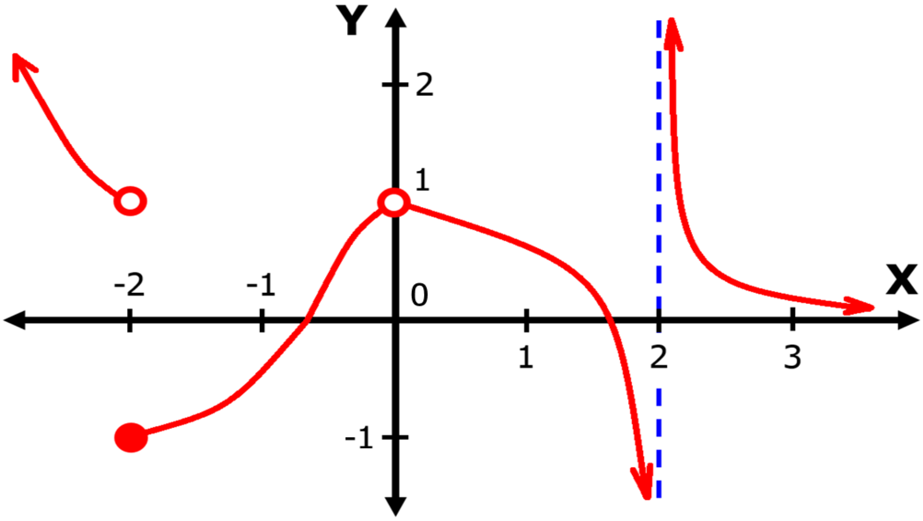
Ejercicio: Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & si \quad x<4 \\ 2x-5 & si \quad x\geqslant 4 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\leqslant -1 \\ |1-x^2| & si \quad -1<x\leqslant 2 \\ -3 & si \quad x>2 \end{cases}$

4. IDEA INTUITIVA DE LIMITE

Al representar la gráfica de una función, nos puede surgir la siguiente pregunta: ¿A qué altura tiende la gráfica cuando esta supera los límites del papel que usamos para representarla?



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-2^-} f(x)=1$ y $\lim_{x\to-2^+} f(x)=-1$ $\Rightarrow$ $\nexists \lim_{x\to-2} f(x)$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=1$ y $\lim_{x\to0^+} f(x)=1$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to0} f(x)=1$; $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ $\nexists \lim_{x\to2} f(x)$

Nota: Cuando hallamos un límite estamos calculando la altura de la gráfica para una determinada anchura.

5. CÁLCULO DE LIMITES EN EL $+\infty$

Indeterminación $\infty - \infty$

Método de resolución: Cogemos el infinito de grado superior.

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2+x+25)=$$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Método de resolución: Cogemos el infinito de grado superior del numerador y del denominador.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}=$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-3x}{x^3+1}=$ c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}\right)=$

6. CÁLCULO DE LIMITES EN EL - ∞

<u>Nota:</u> Todos los limites en el -∞ se pueden transformar en un limite en el +∞ y aplicar el proceso anterior.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7x^4 - x^2 + 72) =$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 - 1}{x^2 - 1} =$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2} \right) =$

7. CÁLCULO DE LIMITES EN UN PUNTO x_0

<u>Límites inmediatos</u>

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 6) =$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x+3} =$

<u>Indeterminación</u> $\dfrac{k}{0}$

Método de resolución: Estudiar los límites laterales para ver si coinciden o no.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-1)^2}{x-5} =$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} =$

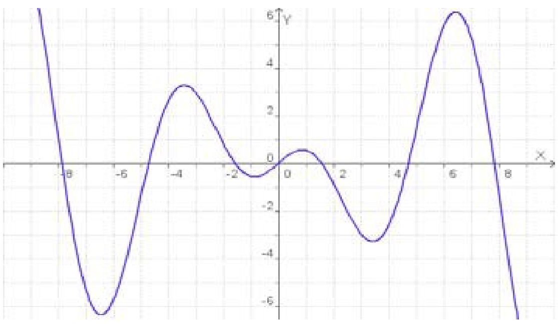
<u>Indeterminación</u> $\dfrac{0}{0}$

Método de resolución: Factorizar el numerador y el denominador y simplificar.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} =$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} =$

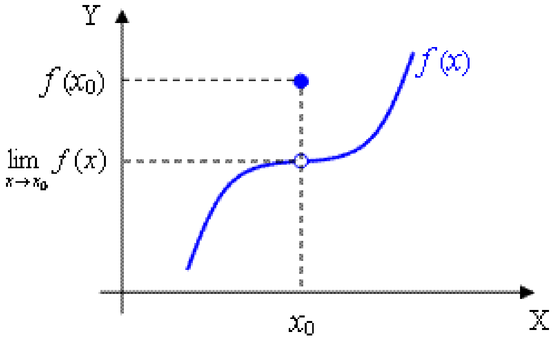
8. CONTINUIDAD. TIPOS DE DISCONTINUIDAD.

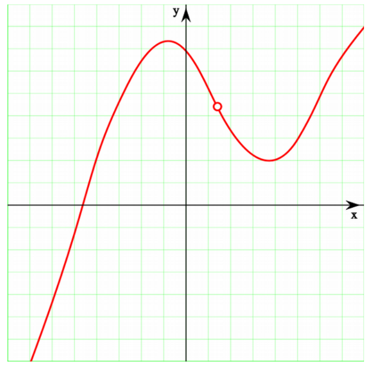
<u>Función continua</u> Una función *f*(x) es continua en x_0 cuando:



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Funciones discontinuas evitables   Una función *f*(x) es discontinua evitable en x_0 cuando:

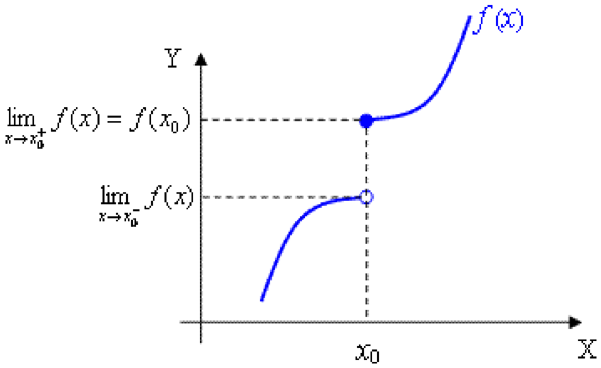




$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$$

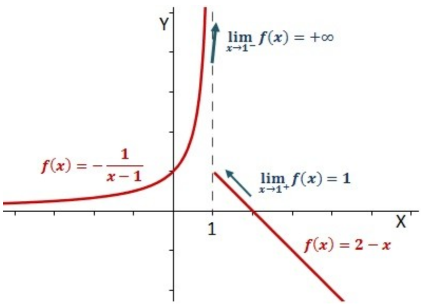
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad ; \qquad \nexists f(x_0)$$

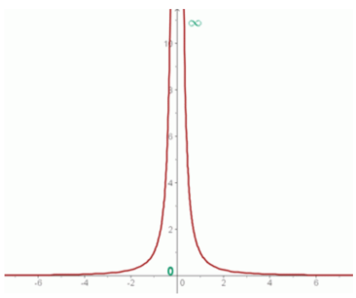
Función discontinua de 1ª especie de salto finito   Una función *f*(x) es discontinua de 1ª especie de salto finito en x_0 cuando:

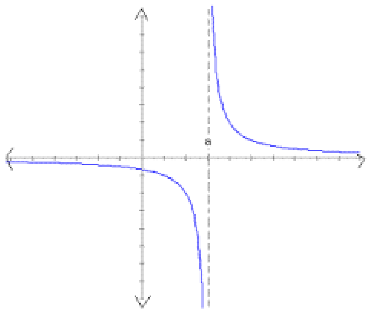


$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y los dos limites laterales dan un número finito

Funciones discontinuas de 1ª especie de salto infinito   Una función *f*(x) es discontinua de 1ª especie de salto infinito en x_0 cuando:

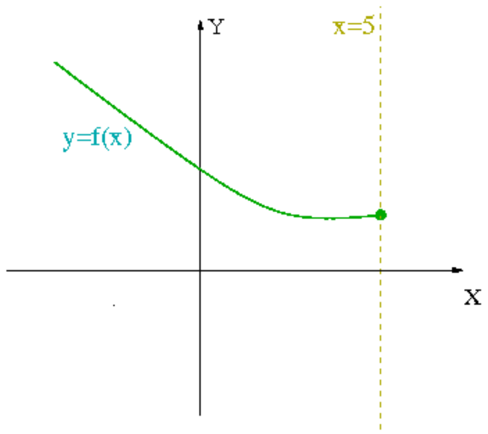


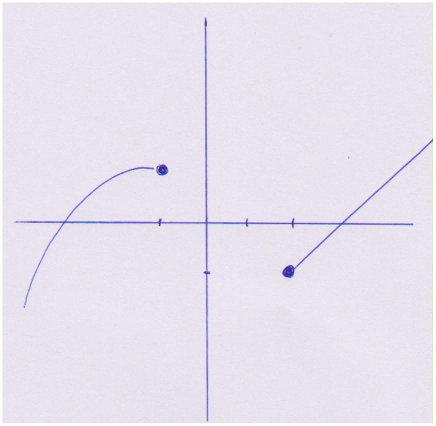




$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y al menos uno de los dos limites laterales dan $\pm\infty$

Funciones discontinuas de 2ª especie Una función f(x) es discontinua de 2ª especie en x_0 cuando:





No existe alguno de los dos limites laterales

9. ESTUDIO DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN SU EXPRESIÓN ANALÍTICA

Funciones elementales: Los puntos de discontinuidad coinciden con los puntos donde falla el dominio de definición.

Ejercicio: Estudia la continuidad de la función siguiente:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2-x-2}$$

Funciones definidas a trozos: Los puntos de discontinuidad coinciden con los puntos donde falla el dominio de definición y en ocasiones, con los extremos de los diferentes trozos.

Ejercicio: Calcula los valores de *a* y de *b* para que sean continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & si \quad x\leqslant 2 \\ a-x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & si \quad x\leqslant -1 \\ b & si \quad -1<x<3 \\ 2x+4 & si \quad x\geqslant 3 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & si \quad x\neq 1 \\ b & si \quad x=1 \end{cases}$

10. CONCEPTO DE DERIVADA

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Ejemplo: La siguiente tabla muestra el espacio recorrido, en metros, por un coche durante los 7 primeros segundos de una carrera:

Espacio - e(t)	0	15	45	95	125	180	220	355
Tiempo - t	0	1	2	3	4	5	6	7

La velocidad media del coche es el incremento del espacio por unidad de tiempo:

$$V.M.[1,3]=\frac{e(3)-e(1)}{3-1}=\frac{95-15}{2}=40\ m/s$$

$$V.M.[3,7]=\frac{e(7)-e(3)}{7-3}=\frac{355-95}{4}=65\ m/s$$

Definición La tasa de variación media de una función f(x) en un intervalo $[x_0\ ,\ x_1]$ es $T.V.M.[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Definición Llamando "h" a la longitud del intervalo $[x_0\ ,\ x_1]$, es decir, $x_1 - x_0 = h$; la definición anterior sería: $T.V.M.[x_0,x_1]=T.V.M.[x_0,x_0+h]=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Ejercicios

1º Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora. La función que expresa dicho rendimiento es $R(t)=30t-10'5t^2+t^3$ siendo t el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral. Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre t = 2 y t = 4 .

2º Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función $f(t)=\frac{15000t+10000}{2t+2}$, siendo t el número de años transcurridos. ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

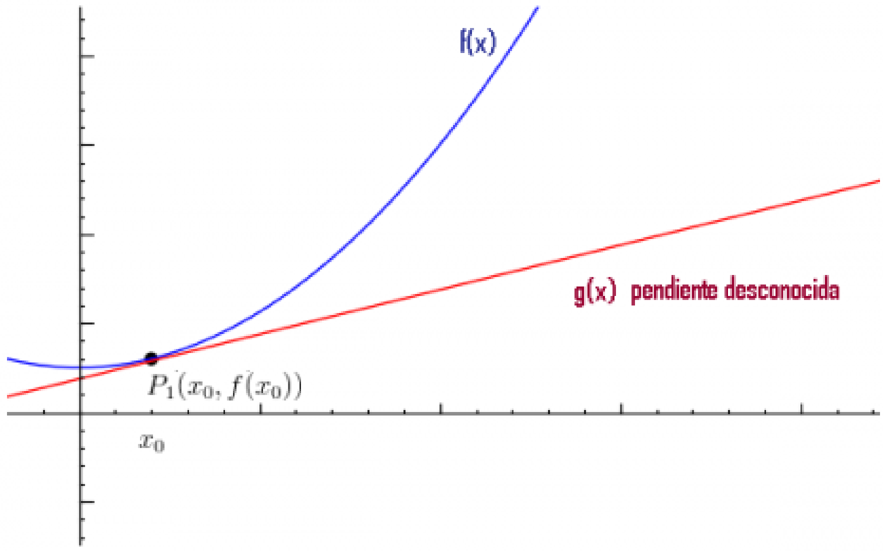
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Ejemplo: Volviendo al ejemplo del coche anterior, la velocidad instantánea en el segundo 3 se calcularía haciendo: $V_i(3)=\lim_{h\to 0} V.M.[3,3+h]=\lim_{h\to 0}\frac{e(3+h)-e(3)}{h}$.

Definición Se define la derivada de una función f(x) en un punto x_0 como la expresión $f'(x_0)=\lim_{h\to 0} T.V.M.[x_0,x_0+h]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Nota: La derivada de una función f(x) en un punto x_0 es como hallar la tasa de variación instantánea de la función f(x) en el punto x_0 .

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO



Interpretación geométrica La pendiente de la recta tangente g(x) a la curva de la función f(x), en el punto $(x_0, f(x_0))$, coincide con $f'(x_0)$.

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente g(x) es: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

FUNCIÓN DERIVADA

Definición Se define función derivada de una función f(x) y se denota como f '(x), a la función que se obtiene al derivar la función f(x) en todos sus puntos posibles.

Utilidad La función derivada es muy útil para hallar $f'(x_0)$, para ello, primero tenemos que calcular f '(x) y después sustituir el valor x_0 en la fórmula obtenida.

DERIVADAS SUCESIVAS

Ya conocemos como calcular la primera derivada f '(x) de una función f (x), repitiendo el proceso calcularemos la derivada de la función derivada f ''(x) que es la segunda derivada de la función f(x), y así sucesivamente se pueden calcular el resto de funciones derivadas f '''(x) , $f^{v}(x)$ …

11. CALCULO DE DERIVADAS

REGLAS DE DERIVACIÓN

(k)' = 0	(x)' = 1	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	(k . f)' = k . f '	$\left(\frac{f}{k}\right)'=\frac{f'}{k}$
(f ± g)' = f ' ± g '		(f . g)' = f ' . g + f . g '	$\left(f^n\right)'=n\cdot f^{n-1}\cdot f'$	
$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$		$\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\left(\ln f\right)'=\frac{f'}{f}$	
$\left(\log_a f\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{f'}{f}$		$\left(e^f\right)'=f'\cdot e^f$	$\left(a^f\right)'=f'\cdot a^f\cdot\ln a$	

1º Deriva las siguientes funciones:

1) $f(x)=-x^3+5x^2-7x+1$ 2) $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2-x$ 3) $f(x)=(x^2+3x-1)^3$ 4) $f(x)=e^{3-x^2}$

5) $f(x)=2^{x^2+1}$ 6) $f(x)=40\left(1-e^{-0'05x}\right)$ 7) $f(x)=\ln\left(x^2-2x\right)$ 8) $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$

9) $f(x)=\frac{x+1}{(2-x^2)^2}$ 10) $f(x)=e^{4x}(x-1)$ 11) $f(x)=\ln\sqrt{1-x}$ 12) $f(x)=\log_2\frac{1}{x}$

13) $f(x)=\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ 14) $f(x)=3x-18\,lnx+\frac{120}{x}+50$

2º Hallar la ecuación de la recta tangente a $y=\frac{x^2-2x}{x+3}$ en $x_0=3$.

3º Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y=x^2+4x+1$ que es paralela a la recta $4x-2y+5=0$.

4º Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y=4x-x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

5º Dada la función $f(x)=\frac{x^4}{4}+x^2+1$, determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente tiene pendiente 0.

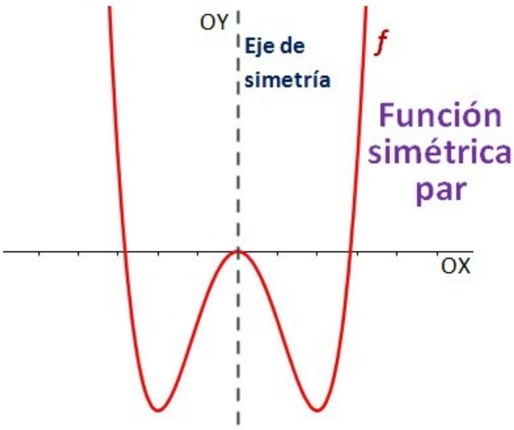
12. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1. Dominio de definición

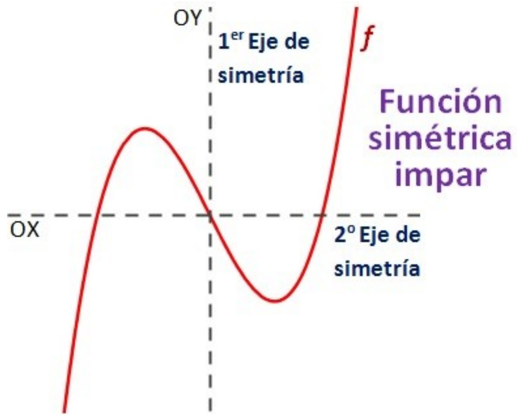
Debemos estudiar los valores de "x" para los cuales podemos representar la gráfica.

2. Simetrías

$f(x)=f(-x)$



$f(x)=-f(-x)$



3. Cortes con los ejes

	x	y
Corte eje OY	0	
Cortes eje OX		0
		0

4. Asíntotas

<u>Nota:</u> Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

5. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

Debemos calcular la primera derivada de la función y estudiar su signo. Cuando el signo es positivo la función es creciente, cuando el signo es negativo la función es decreciente.

6. Curvatura. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Debemos calcular la segunda derivada de la función y estudiar su signo. Cuando el signo es positivo la función es convexa, cuando el signo es negativo la función es concava.

<u>Ejercicio:</u> Representa las gráficas de las siguientes funciones:

1) $f(x)=x^3-2x^2+1$

2) $f(x)=-x^4+x^2$

3) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

4) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

6) $f(x)=\frac{x^2}{2x-2}$

TEMA 1: PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

MODELO 1: Función polinómica en una situación real

Método de resolución
Es el tipo de ejercicio más sencillo de todos, basta con aplicar lo que sabemos de la representación de las funciones polinómicas y adaptar las conclusiones a la situación real que se nos presenta.

Ejercicios

(2/6/07) Un estudio indica que, entre las 12:00 horas y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en Km/h) del tráfico en cierta salida de autopista viene dada por la siguiente función

$$f(x)=2x^3-21x^2+60x+20 \;, \qquad 0\leqslant x\leqslant 7$$

donde x es el número de horas después del mediodía (x = 0 corresponde a las 12:00 horas).
Representar gráficamente f(x), para $0 \leq x \leq 7$, estudiando: el punto de corte con el eje y, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en las que se presentan máximos, mínimos y punto de inflexión para la velocidad del tráfico.

(1/8/09) Un individuo invirtió en acciones de cierta compañía durante los últimos 12 meses. El valor V de su inversión, en euros, en el transcurso de t meses se estima por la función $V(t)=-2t^3+9t^2+240\text{t}+1200 \;,\; siendo \;\; 0\leqslant t\leqslant 12$.
a) ¿Cuánto invirtió inicialmente?
b) ¿Entre qué meses el valor de su inversión creció? ¿y entre que cuales decreció?
c) El individuo vende sus acciones transcurridos los 12 meses, ¿cuál habría sido realmente el mejor momento para hacerlo? ¿Cuánto pierde por no haberlas vendido en el momento óptimo?
d) Utilizando los resultados de los apartados anteriores representa gráficamente la función, calculando además el punto de inflexión.

(1/8/10) La función $C(t)=-t^3+9t^2-15\text{t}+50 \;,\; 0\leqslant t\leqslant 6$, se ajusta a la cotización en euros de cierta moneda en los últimos seis años (C(t) indica la cotización en el tiempo t medido en años).
a) Encuentra los intervalos de tiempo en los que la cotización creció y en los que decreció.
b) ¿En qué momentos hubo una cotización más baja y más alta? ¿cuáles fueron esas cotizaciones?
c) ¿Tiene C(t) algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcúlalo y traza la gráfica de la función en el intervalo dado de tiempo.

(2/6/11) El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de Bolsa, viene dado por la función $p(t)=4t^3-42t^2+120\text{t}+200 \;,\; 0\leqslant t\leqslant 7$, t es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana
(t = 0) y finaliza 7 horas después (las 5 de la tarde).
a) Entre que horas el precio de la acción sube y entre que horas baja? ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un valor máximo relativo? ¿y un valor mínimo relativo? Calcula dichos valores.
b) ¿Se alcanza en algún momento un valor máximo absoluto? ¿y un valor mínimo absoluto? En caso afirmativo, calcula dichos valores.
c) Utilizando los resultados anteriores y calculando el punto de inflexión, traza la gráfica de p(t).

(1/6/13) La cantidad de madera (en metros cúbicos) que se extrae de una explotación forestal durante un período de cinco días viene dada por la función: $M(t)=t^3-9t^2+24t \;,\; 0\leqslant t\leqslant 5$, donde t es el tiempo transcurrido en días.

a) Estudia en que períodos se registro un aumento y en los que se registro una disminución de la cantidad de madera extraída.
b) ¿En que día o días se extrajo la máxima cantidad de madera?, ¿y la mínima? Calcular la cantidad máxima y mínima de metros cúbicos de madera extraída.
c) Representa gráficamente la función M(t), calculando, si los hay, los puntos de inflexión.

(1/6/09) Para un programa de ayuda se estima que el número de beneficiarios n (en miles) durante los próximos t años se ajustará a la función $n(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{9}{2}t^2+18\text{t} \;,\; 0\leqslant t\leqslant 9$.
a) Representa la gráfica de la función, estudiando intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos (absolutos y relativos) y punto de inflexión. ¿En qué año será máximo el número de beneficiarios?, ¿cuál es dicho número?
b) Un segundo programa para el mismo tipo de ayuda, estima que, para los próximos t años, el número de beneficiarios (en miles) será $n(t)=\frac{9}{2}t \;,\; 0\leqslant t\leqslant 9$. ¿En algún año el número de beneficiarios será el mismo con ambos programas? ¿En qué intervalo de tiempo el primer programa beneficiará a más personas que el segundo?

MODELO 2: Función algebraica en una situación real

Método de resolución

Es un tipo de ejercicio algo más complicado que el modelo 1, ya que hacer los calculos en una función algebraica es más laborioso que en una función polinómica, aplicaremos lo que sabemos sobre la representación de las funciones algebraicas (monotonía, curvatura, límites) y adaptaremos las conclusiones a la situación real que se nos presenta. Estos ejercicios se suelen mezclar con la resolución de inecuaciones (para ello utilizaremos el estudio de la monotonía)

Ejercicios

(2/8/12) En una empresa la relación entre la producción x (expresada en miles de toneladas) y el coste medio de fabricación C(x) (expresado en miles de euros) es del tipo $C(x)= 2 + x + \frac{9}{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 10$.

a) Calcula la cantidad de producción que minimiza el coste medio de fabricación y el coste medio mínimo.
b) Calcula la cantidad de producción que maximiza el coste medio de fabricación y el coste medio máximo.
c) Si no desean superar los 12 mil euros de coste medio de fabricación ¿entre que valores deberá estar comprendida la producción?

(2/6/09) Un modelo para los costes de almacenamiento y envio de materiales para un proceso de manufactura viene dado por la función $C(x)=100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$, $1 \leqslant x \leqslant 100$ siendo C(x) el coste total (en euros) de almacenamiento y transporte y x la carga (en toneladas) de material.

- Calcula el coste total para una carga de una tonelada y para una carga de 100 toneladas de material.
- ¿Qué cantidad x de toneladas de material producen un coste total mínimo? Justifica la respuesta y calcula dicho coste mínimo.
- Si deciden no admitir costes de almacenamiento y envío superiores o iguales a 75000 euros, ¿hasta qué carga de material podrían mover?

(1/9/03) La producción y, en Kg., de una cierta cosecha agrícola, depende de la cantidad de nitrógeno x, con que abonemos la tierra (en las unidades apropiadas), según la función $y=\frac{1000x}{1+x^2}$, siendo $x \geq 0$.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula la producción máxima.
b) Si es rentable que la producción este entre 400 Kg. y 500 Kg. (ambos incluidos), ¿qué cantidades de nitrógeno necesitaríamos?

(2/6/14) Se estima que el número de unidades vendidas de un cierto producto N, a los t meses de introducirlo en el mercado viene dado por: $N(t)=200\cdot\left(5-\frac{10}{2+t}\right)$, $t \geqslant 0$.

a) El número de unidades vendidas ¿aumenta o disminuye al transcurrir los meses? Justifica la respuesta, estudiando el crecimiento o decrecimiento de la función N(t).
b) Determina entre que meses las ventas son superiores a 500 e inferiores a 800 unidades.
c) ¿Las ventas tienden a estabilizarse alrededor de alguna cantidad? Justifica la respuesta.

(1/6/11) Una empresa compra diversos artículos de adorno y los empaqueta en cajas para su distribución. El coste promedio por caja (en euros) está dado por $C(x)=3x-18\ln x+\frac{120}{x}+50$, $x > 0$, siendo x el número de cajas que empaqueta. Determina el número de cajas que deben empaquetar para minimizar el coste promedio por caja C(x).

MODELO 3: Función definida a trozos en una situación real

Método de resolución

En este tipo de funciones suele haber dos trozos, por lo que son los ejercicios ideales para que entren las técnicas utilizadas en los dos modelos anteriores, suelen ser algo más largos pero no mucho más complicados. Realizaremos el estudio de la monotonía y la curvatura uniendo los trozos en un solo dominio de definición.

Ejercicios

(2/6/13) El precio de venta (en euros) de un artículo deportivo desde el momento inicial de su comercialización se ajusta a la función

$$P(t)=\begin{cases} -\frac{1}{5}t^2+4t+80 & si \quad 0\leq t<15 \\ 87+\frac{32}{t-11} & si \quad t\geq 15 \end{cases}$$, donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) ¿Cuál es el precio inicial del artículo? ¿Y después de transcurridos 15 meses?
b) Estudia en que meses se produce un aumento y en los que se produce una disminución del precio del artículo. ¿Cuál es el precio máximo que alcanza el artículo? ¿Y el precio mínimo?
c) Después de transcurridos 15 meses, ¿habrá algún mes en el que el precio sea inferior a 85 euros?

(2/6/12) En un ámbito controlado, el tamaño de una población de aves, P(t) (en cientos), se ajusta a la función

$$P(t)=\begin{cases} t^2-8t+50 & , \quad 0\leq t\leq 10 \\ 95-\frac{250}{t} & , \quad t>10 \end{cases}$$, donde t es el tiempo transcurrido en años.

a) ¿A partir de que año crecerá la población P(t)? ¿En algún año la población es mínima?
b) Determina el valor al que tiende la población de aves con el paso del tiempo.
c) Calcula el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5000 y 7500 aves.

(2/6/10) El número de ejemplares vendidos (en miles) de una revista destinada al público adolescente es estimado por la función $N(t)=\begin{cases} 3t(10-t) & si \quad 0\leq t\leq 8 \\ \frac{624t}{t^2+144}+24 & si \quad t>8 \end{cases}$, donde t es el tiempo transcurrido en semanas.

Determina: los períodos en los que aumentan y en los que disminuyen las ventas de la revista, cuando se alcanza el mayor número de ventas y a cuanto ascienden. ¿A qué valor tiende el número de ventas con el paso del tiempo?

(2/6/08) El número de plazas ocupadas de un aparcamiento a lo largo de las 24 horas de un día, viene expresado por la función

$$N(t)=\begin{cases} 1680+20t & si \quad 0\leq t<8 \\ -10t^2+260t+400 & si \quad 8\leq t<16 \\ -10t^2+360t-1200 & si \quad 16\leq t\leq 24 \end{cases}$$

a) ¿A qué hora del día presenta el aparcamiento una ocupación máxima? ¿Cuántos coches hay a esa hora?
b) ¿Entre que horas la ocupación del aparcamiento es igual o superior a 2000 plazas.

(1/8/08) La distancia (en millas) entre un barco pesquero que salió a faenar durante un período de 10 días y su puerto base viene dada por la función:

$$M(t)=\begin{cases} 36-(2t-6)^2 & , \quad 0\leq t\leq 5 \\ 4(10-t) & , \quad 5<t\leq 10 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido (en días) desde su salida del puerto base.

a) ¿Después de cuántos días es máxima la distancia del pesquero a su puerto base? ¿a cuántas millas se encontraba?

b) ¿Durante que períodos aumentaba la distancia a su puerto base? ¿en que períodos disminuía?

c) ¿A partir de qué día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

MODELO 4: Función con parámetros desconocidos

Método de resolución

En este ejercicio podemos distinguir dos partes bien diferenciadas, una primera (la menos fácil) en la que hay que calcular los valores de los parámetros, para ello debemos conocer un teorema matemático; y otra segunda (fácil) que se resuelve igual que los modelos 1 y 2, una vez conocidos ya los valores de los parámetros.

Ejercicios

(1/8/13) Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
a) Calcula a, b, c y d, sabiendo que la función presenta extremos relativos en los puntos (0 , 0) y (1 , 1).
b) Determina qué tipo de extremos relativos son cada uno de los puntos anteriores.
c) Representa la gráfica de la función, determinando los puntos de corte con los ejes y el punto de inflexión.

(1/6/12) La ganancia producida por una máquina que duro 6 años se estima por la función $f(x)=a\ x^3+bx^2\ ,0\leqslant x\leqslant 6$, $f(x)$ representa la ganancia (en miles de euros) a los x años de funcionamiento.

a) Determina el valor de *a* y *b*, si se sabe que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto (2 , 32).

b) Si a = -2 y b =12, calcula el año en el que la máquina produjo la mayor ganancia, ¿cuál fue el valor de dicha ganancia? Para estos valores, representa la función $f(x)$ en [0 , 6].

(1/9/06) La cantidad de agua (en hm^3) de un embalse durante el último año viene dada por la función

$$C(t)=\frac{210000}{(2\mathrm{t}-k)^2+6} \quad , \quad 0\leq t\leq 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determinar el valor del parámetro k teniendo en cuenta que la cantidad máxima de agua se alcanzó al cuarto mes.

b) Para el valor de k = 8, determinar los periodos en los que la cantidad de agua ha aumentado y en los que ha disminuido. ¿A partir de qué mes la cantidad de agua ha sido inferior a 1400 hm^3?

(1/6/06) La función f definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, verifica que su gráfica pasa por el punto (-1 , 0) y tiene un máximo relativo en el punto (0 , 4).

a) Determinar la función f (calculando a, b y c).
b) Representar gráficamente la función $f(x)=x^3-3\mathrm{x}^2+4$ estudiando: intervalos de crecimiento y decrecimiento, mínimo relativo, intervalos de concavidad y convexidad y punto de inflexión.

(1/6/07) Se estudia la evolución mensual del número de socios de una entidad durante el año 2005 y se observa que está modelada por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x+a & si \quad 0\leqslant x\leqslant 6 \\ 50 & si \quad 6<x\leqslant 8 \\ 50+(x-8)(x-12) & si \quad 8<x\leqslant 12 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en meses

a) Si inicialmente la entidad se fundó con 50 socios, determinar el valor da “a”.
b) Determinar en qué mes el número de socios fue máximo y en qué mes el número de socios fue mínimo.
c) Si para cubrir gastos la entidad necesitaba más de 47 socios, ¿en qué meses tuvo pérdidas?

8º Determina la parábola y = a x^2 + b x + c que es tangente a la recta y = 2 x – 3 en el punto A(2 , 1) y que pasa por el punto B(5 , -2).

12º Halla los coeficientes “ a, b, c, d ” de la función f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. Sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es y = - 3x + 3 y que la función tiene un extremo relativo en x = 0.

MODELO 5: Situaciones reales donde no aparece la función

Método de resolución

Posiblemente sea el tipo de ejercicio más complicado para nosotros, aunque una vez planteado es de muy fácil resolución aplicando el estudio de la monotonía. La dificultad reside en interpretar el enunciado y plantear la función.

Ejercicios

(2/8/11) El dueño de un centro de jardinería cultiva un cierto tipo de plantas con un coste fijo de 4,50 euros y un coste variable de 1,20 euros por planta, vendiendo cada unidad a 3 euros. Decide ofertarlas en lotes de “x” plantas de manera que por cada planta que contenga el lote reduce su precio por unidad en 0,10 euros.
a) Expresa las funciones ingreso, coste y beneficio.
b) ¿Cuántas plantas debe contener cada lote para que el beneficio sea positivo?
c) ¿Cuántas plantas debe contener cada lote para obtener el máximo beneficio? En ese caso, ¿cuanto cuesta cada planta del lote? ¿Cuánto cuesta el lote de plantas?

(2/8/10) Una fábrica produce diariamente un total de 20 artículos de dos modelos diferentes A y B.
El coste de producción diario (en euros) viene dado por $C=6x^3+450y-2500$, siendo x el número de modelos del tipo A e y el número de modelos del tipo B. ¿Cuántos modelos de cada tipo debe producir diariamente para minimizar el coste de producción diario? Calcula ese coste de producción mínimo.

(1/6/10) Una empresa fabrica bicicletas y vende cada unidad de un determinado modelo a un precio P(x) (en euros) que depende del número x de bicicletas de ese modelo que tenga fabricado. Tal función es $P(x)=384-\frac{2x^2}{75}$, $0<x\leqslant 60$.
En la fabricación de las x bicicletas se produce un gasto fijo de 100 euros más un gasto variable de 256 euros por cada bicicleta fabricada.
a) Calcula la función que expresa el beneficio obtenido por la empresa en la fabricación de x bicicletas.
b) ¿Cuántas bicicletas deberá fabricar la empresa para obtener el máximo beneficio?
c) Para el número de bicicletas anterior, calcula el gasto, el ingreso y el beneficio máximo.

(2/9/07) Una empresa ha estimado que el coste (en euros) de producir diariamente x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=2400+26x$, y que el ingreso diario (en euros) que obtiene vendiendo estas x unidades viene dado por la función $I(x)=150x-x^2$.
a) Calcular la función B(x) que expresa los beneficios (ingresos menos costes) diarios obtenidos. ¿Entre qué valores deberá estar comprendido el número de unidades producidas diariamente para que la empresa no tenga pérdidas?
b) Hallar el número de unidades que tiene que producir diareiamente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(2/9/06) Un vendedor pólizas de seguros tiene un sueldo fijo mensual de 1000 euros, más una comisión que viene dada por la función $17x-0{,}0025x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas.

Si el vendedor tiene mensualmente un gasto general de 200 euros, más otro de 5 euros por póliza contratada, calcula el número de pólizas que debe contratar mensualmente para que su ganancia sea máxima, ¿a cuánto asciende dicha ganancia?

(2/6/05) Se quiere fabricar una caja de madera sin tapa con capacidad de 2 m^3. Por razones de portabilidad en el transporte de la misma, el largo de la caja ha de ser doble que el ancho. Además, la madera para construir la base de la caja cuesta 12 euros por metro cuadrado, mientras que la madera para construir las caras laterales cuesta 8 euros por metro cuadrado. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo. Calcular dicho coste mínimo.

(1/9/05) Se quiere cercar un campo rectangular que limita con un camino por uno de sus lados. Si la cerca del lado del camino cuesta 6 €/m y la de los otros lados 2 €/m, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede cercarse con 2560 € .

TEMA 2: INTEGRALES

CONCEPTO DE PRIMITIVA

Definición Se llama primitiva de f(x) a una función F(x) que cumple $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo Las funciones $F(x)=x^3$, $G(x)=x^3+1$, $H(x)=x^3-5$ son primitivas de $f(x)=3x^2$.

Nota En este ejemplo podemos observar que una función f(x) puede tener varias primitivas y que todas estas primitivas son iguales salvo por un número, llamado constante de integración, $F(x)=G(x)+C$.

Nota Hallar primitivas es el proceso inverso a hallar derivadas, es decir, $\int f'(x)\cdot dx=f(x)+C$.

INTEGRAL INDEFINIDA

Definición Se llama integral indefinida de una función f(x) al conjunto de todas sus posibles primitivas; la notación que se utiliza para representar la integral indefinida es $\int f(x)\cdot dx$.

Propiedades básicas de las integrales indefinidas

$$\int (f(x)\pm g(x))\cdot dx=\int f(x)\cdot dx \pm \int g(x)\cdot dx$$

$$\int k\cdot f(x)\cdot dx=k\cdot\int f(x)\cdot dx \quad \text{ó} \quad \int \frac{f(x)}{k}\cdot dx=\frac{1}{k}\cdot\int f(x)\cdot dx$$

Fórmulas para calcular las integrales indefinidas inmediatas

$\int k\cdot dx=k\cdot x+C$	$\int x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \quad n\neq -1$	$\int \frac{1}{x}\cdot dx=\ln\lvert x\rvert+C$
$\int e^x\cdot dx=e^x+C$	$\int a^x\cdot dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	

1º Halla las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int 5x^7\cdot dx=$ b) $\int (x^{-2})^3\cdot dx=$ c) $\int 3x^2\cdot x^3\cdot dx=$ d) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\cdot dx=$

e) $\int (x^6-2x^4+4x^3-1)\cdot dx=$ f) $\int (\frac{x^8}{2}+\frac{1}{4}x^3-8x+2)\cdot dx=$ g) $\int x^6\cdot(x^2+1)\cdot dx=$

h) $\int \frac{1}{x^4}\cdot dx=$ i) $\int \frac{2}{x}\cdot dx=$ j) $\int (7x+5)^2\cdot dx=$

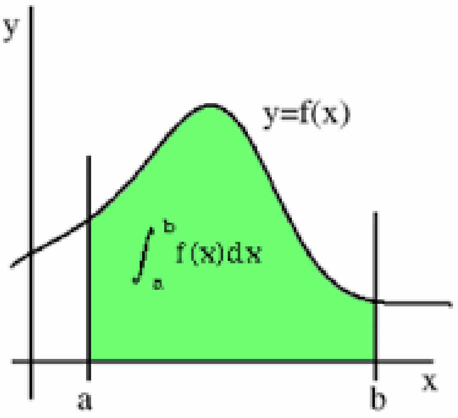
2º Halla una primitiva de la función $f(x)=3x^2+4x-2$ que pase por el punto (-2 , 1) .

3º Halla una primitiva de la función $f(x)=e^x$ que pase por el punto (0 , 3).

(2/06/03) Determinar la función f(x) si se sabe que pasa por el punto (0 , 1) y que su derivada es $f'(x)=x^3+2x$.

CÁLCULO DE ÁREAS: INTEGRALES DEFINIDAS

Definición Se llama integral definida de f(x) entre a y b, al área de la región limitada por la función f(x) entre los puntos a y b y el eje OX. Dicho área la representaremos con el símbolo $\int_a^b f(x)\cdot dx$.



REGLA DE BARROW

Enunciado Sea f(x) una función continua en el intervalo [a , b] y F(x) una primitiva de f(x), entonces se cumplirá que $\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$.

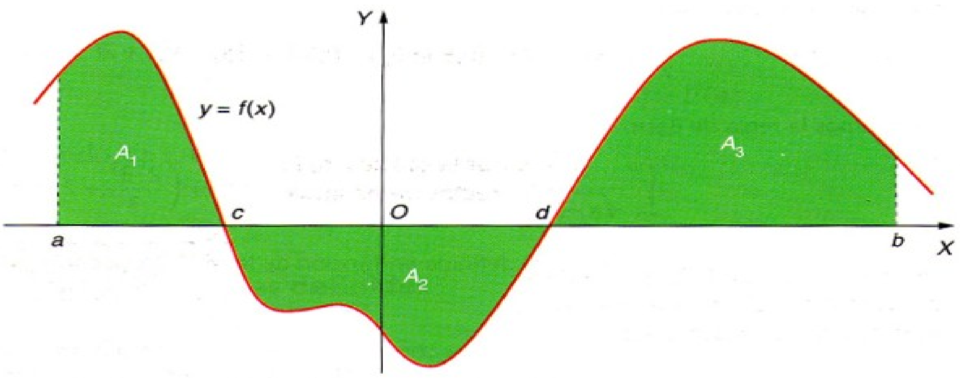
4º Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_2^4 x^3 \cdot dx =$ b) $\int_1^3 (x^2-4)\cdot dx =$ c) $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot dx =$

(2/09/03) Determinar los parámetros a, b y c en la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto (3 , 0) y que el área, $\int_0^3 f(x)\ dx$, limitada por la gráfica de la función f(x) y el eje x es $\frac{27}{4}$.

CÁLCULO DE ÁREAS

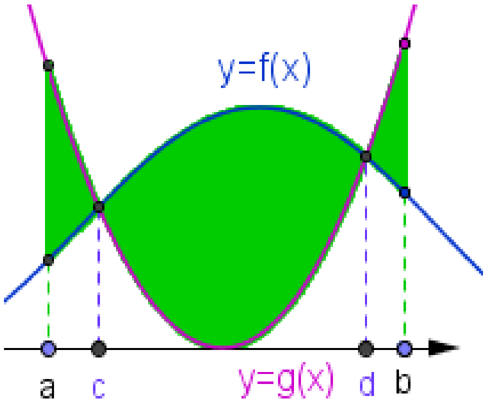
Caso 1 RECINTO LIMITADO POR UNA FUNCIÓN f(x) Y EL EJE OX.



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Caso 2 RECINTO LIMITADO POR DOS FUNCIONES f(x) Y g(x).



$$Area=\int_a^c [g(x)-f(x)]\cdot dx+\int_c^d [f(x)-g(x)]\cdot dx+\int_d^b [g(x)-f(x)]\cdot dx$$

5º Calcula el área limitada entre el eje OX y la curva $f(x)=x^2-6x$.

6º Calcula el área limitada entre el eje OX y la curva $f(x)=x^3-9x$.

7º Halla el área comprendida entre $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $y=x$, $y=x^2-x$.

8º Halla la superficie comprendida entre las funciones $f(x)=-x^2+4x+5$ y la recta $y=5$.

(2/06/01) Calcula el área comprendida entre la función $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta y = x + 1.

(2/06/02) Dada la parábola $f(x)=x^2+bx+c$, calcular *b* y *c* si pasa por el punto (0 , 2) y tiene un mínimo en x = 1. Calcular el área limitada por *f*(x), el eje x y las rectas x = 1 e y = -x + 4.

(1/09/02) Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & si \quad x\leqslant 1 \\ x & si \quad 1<x\leqslant 2 \\ \frac{1}{2}x^2-4x+8 & si \quad x>2 \end{cases}$

Calcular el área limitada por la función y el eje x.

(2/06/17) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 9-2x & si \quad 0\leqslant x<2 \\ 9-(x-4)^2 & si \quad x\geqslant 2 \end{cases}$.

a) Representa la gráfica estudiando previamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como sus puntos de corte con los ejes.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los dos ejes de coordenadas.

<u>TEMA 3: MATRICES Y DETERMINANTES</u>

1. Concepto de matriz. La matriz como expresión de tablas y grafos. Tipos de matrices.

<u>Definición de matriz mxn. Elemento de una matriz. Notaciones</u>

Una matriz mxn es un conjunto de números reales ordenados en m filas y n columnas. Cada uno de estos números recibe el nombre de elemento de la matriz y cada uno de ellos ocupa una posición dentro de la misma.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

orden 2x2 orden 2x3 orden 3x3 orden mxn

Definición: Se llama diagonal principal de la matriz a los elementos: a_{11} , a_{22} , a_{33} , … , a_{nn} .

<u>Tipos de matrices</u>

1. Matrices rectangulares (tienen más filas que columnas o más columnas que filas)

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ orden 2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -3 \\ \sqrt{2} & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ orden 4x3}$$

2. Matrices cuadradas (tienen el mismo número de filas que de columnas)

2.1 Matrices triangulares superiores e inferiores (todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Triangulares superiores Triangular inferior

2.2 Matrices diagonales (todos los elementos que no están en la diagonal principal son nulos)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices identidades de orden 2 y 3

2.3 Matrices simétricas (todos los elementos por encima de la diagonal principal coinciden con los que están por debajo de dicha diagonal, como si fuera un espejo)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrices fila y columna (tienen una única fila o una única columna)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \end{pmatrix}$$ orden 1xn

$$C=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ orden 4x1

Matriz fila

Matriz columna

Matriz nula (todos sus elementos son nulos)

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz nula de orden 3x4

Matriz traspuesta

Se define matriz traspuesta de una matriz A y se denota con la letra A^t , a la matriz que obtenemos al intercambiar las filas de la matriz A por columnas.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Una matriz A es simétrica cuando $A^t=A$.

2. Operaciones con matrices.

Suma de matrices de orden mxn.

Se define la suma de dos matrices A y B, como la matriz que se obtiene al sumar cada elemento de la matriz A con el elemento de la matriz B que ocupa la misma posición. Como consecuencia inmediata de esta definición solamente se pueden sumar matrices que tengan el mismo orden.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Opuesta de una matriz A

Se define opuesta de una matriz A y se denota como -A, a la matriz que se obtiene al cambiar de signo todos los elementos de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \qquad -A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Resta de matrices de orden mxn.
Se define la resta de dos matrices A y B, como la matriz que se obtiene al sumar A y el opuesto de B.

A – B = A + (-B)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

1. Interna: Al sumar dos matrices mxn el resultado es una matriz mxn.
2. Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C)
3. Elemento neutro o matriz nula: A + 0 = A
4. Elemento opuesto: A + (-A) = 0
5. Conmutativa: A + B = B + A

Producto de un número por una matriz
Para multiplicar un número por una matriz, basta con multiplicar todos los elementos de la matriz por dicho número.

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 21 & -6 & 9 \\ 15 & -9 & 24 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un número por una matriz

1. Distributiva respecto a la suma de matrices $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
2. Distributiva respecto a la suma de escalares $(k+n) \cdot A = k \cdot A + n \cdot A$
3. Asociativa respecto a los escalares $(k \cdot n) \cdot A = k \cdot (n \cdot A)$
4. Elemento unidad $1 \cdot A = A$

Teorema: El conjunto de matrices mxn con la suma y el producto por un número tiene estructura de espacio vectorial.

Definición del producto de matrices
Como las notaciones matemáticas para explicar el producto de matrices son bastante complejas, vamos a explicarlo mediante algunos ejemplos practicos.

Ejemplos

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} =$

Potencia de matrices $A^2 = A \cdot A$ $A^3 = A \cdot A \cdot A$ $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$

Propiedades del producto de matrices

1. Asociativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. No conmutativa $A \cdot B \neq B \cdot A$
3. Distributiva respecto a la suma $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. Elemento neutro (en las matrices cuadradas) $I \cdot A = A \cdot I = A$

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n, se llama matriz inversa de A y la denotaremos como A^{-1}, a la matriz que cumple que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Ejemplos: Hallar por el método de Gauss las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Definición Se llama rango de una matriz, al número de filas no nulas que quedan después de aplicar el método de Gauss por debajo de la diagonal de dicha matriz.

Ejemplo Estudia el rango de las siguientes matrices mediante el método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Determinantes.

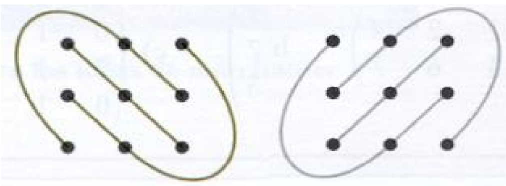
<u>Notaciones</u>

det A $\quad det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |A| \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

<u>Definición</u> El determinante de una matriz cuadrada de orden dos es un número que se obtiene del siguiente modo: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = [a_{11} \cdot a_{22}] - [a_{21} \cdot a_{12}]$

<u>Definición</u> El determinante de una matriz 3x3 se obtiene del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = [a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}] - [a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}]$$



Regla de Sarrus

+ –

<u>Ejemplos</u>

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

<u>Definición</u> Tal como hemos dicho anteriormente se llama rango de una matriz, al número de filas no nulas que quedan después de aplicar el método de Gauss por debajo de la diagonal de dicha matriz.
Podemos utilizar, también, una definición alternativa que dice: se llama rango de una matriz, al orden, del mayor determinante no nulo que podamos encontrar con los elementos de dicha matriz.

<u>Ejemplo</u> Estudia el rango de las siguientes matrices mediante determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MODELO 1: Sistemas de ecuaciones matriciales

Método de resolución

Este tipo de ejercicio suele caer poco en selectividad, para resolver sistemas de ecuaciones matriciales se pueden utilizar los métodos habituales de sustitución, igualación y reducción.

Ejercicios

1º Calcular las matrices A y B, que son soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3A+2B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2º Halla las matrices X e Y que verifican el sistema: $5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$, $3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

3º Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} , \quad 2A+B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

4º Calcula las matrices X e Y que verifican el sistema: $3X+2Y=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X-5Y=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$.

Calcula la matriz inversa de $X \cdot Y$. (Sep/13)

MODELO 2: Matrices aplicadas a la vida cotidiana

Método de resolución

Esta tipo de ejercicio es el que más relación tiene con las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, aunque hace algunos años pusieron algún ejercicio de estos en selectividad, en la actualidad prefieren poner otro tipo de ejercicios. Su resolución consiste en interpretar enunciados reales y expresarlos en forma de matrices.

Ejercicios

1º Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas en tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

2º En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.
a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

3º Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1 , M_2 , M_3 y M_4 .

	T	O
M_1	300	200
M_2	400	250
M_3	250	180
M_4	500	300

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.
El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1 , el 5% en el M_2 , el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4 .
Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

4º Una empresa fabrica juguetes de tres tipos diferentes T_1 , T_2 y T_3 . Los precios de coste de cada juguete y los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido vienen dados en la siguiente tabla:

	T_1	T_2	T_3
Precio de coste	4 €	6 €	9 €
Ingreso	10 €	16 €	24 €

El número de ventas anuales es de 4500 juguetes T_1 , 3500 juguetes T_2 y 1500 juguetes T_3 . Sabiendo que la matriz de costes (C) y la matriz de ingresos (I) son matrices diagonales y que la matriz de ventas anuales (V) es una matriz fila.
a) Determina las matrices C, I y V.
b) Obtener, utilizando las matrices anteriores, la matriz de costes anuales, la matriz de ingresos anuales, y la matriz de beneficios anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes. (Jun/05)

5º En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de TV (A, B, C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M, Tarde: T y Noche:N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produjo en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10% para la cadena A, una reducción del 5% para la B y un aumento del 20% para la C.
a) Obtén la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas A, B y C, en los tres segmentos horarios M, N y T.
b) Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3 euros por la mañana, 4 euros por la tarde y 6 euros por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las tres cadenas. (Sep/03)

MODELO 3: Operaciones con matrices

Método de resolución
Este tipo de ejercicio ha sido frecuente, durante estos últimos años, en selectividad; consiste en operar con matrices y a veces, resolver ecuaciones simples que quedan al final.

Ejercicios

1º Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, calcula la inversa de la matriz (A^2+I) . (Jun/11)

2º Dada $A=\begin{pmatrix}a & 0\\a & 1\end{pmatrix}$, calcula, si lo hay, algún valor de "a" para el que se verifique que A^2 sea la matriz identidad. (Sep/12)

3º Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x\\x & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 4\end{pmatrix}$.

a) Determina el valor de x para que se verifique $B^2=A$.
b) Calcula el valor de x para que $B+C=A^{-1}$.
c) Calcula el valor de x para que se verifique $A-B+\frac{1}{2}C=3I$. (Jun/13)

4º Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}a & 2\\1 & b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$.
a) Calcula B^{-1} .
b) Determina los valores que deben tomar *a* y *b* para que se verifique $A\cdot B^{-1}+2\cdot I=C^t$. (Sep/14)

5º Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$, halla dos números reales m y n tales que $A+mA+n\mathrm{I}=0$.

6º Calcula los valores de x para que la matriz $A=\begin{pmatrix}x & 0\\0 & x\end{pmatrix}$ verifique la ecuación $A^2-6A+9I=0$.

7º Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$, halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad $A^2-xA-yI=0$.

<u>**MODELO 4: Ecuaciones matriciales**</u>

<u>**Método de resolución**</u>
Este tipo de ejercicio ha sido, históricamente, el más repetido en selectividad; para resolverlo primero debemos argumentar adecuadamente para despejar la X y después realizar las operaciones indicadas en la argumentación.

<u>**Ejercicios**</u>

1º Determina la matriz X sabiendo que $X^{-1}\cdot B^t=A+B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. (Sep/12)

2º Despejar la matriz X en la ecuación $A^{-1}XB-2CD=B^2$ y calcúlala, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$. (Sep/11)

3º Resolver la ecuación matricial $A\cdot X+A^t=X+B$, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. (Sep/10)

4º Resolver la ecuación matricial $X+X\cdot A+B^t=2C$, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 4 & -5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$. (Sep/08)

5º Resolver la ecuación matricial $X\cdot A+B^t=2X$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. (Sep/06)

6º Determinar la matriz X en la siguiente ecuación matricial $A^2\cdot X=\frac{1}{2}(A+B\cdot C)$, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$. (Jun/06)

7º Resolver la ecuación matricial $A^tX-B=0$, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. (Jun/03)

8º Resolver la ecuación matricial $A\cdot X+X=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. (Sep/02)

9º Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $A^2\cdot X+AB=B$.

(Jun/02)

10º Resolver la ecuación matricial $AX=BX+C$, siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$.
(Sep/01)

TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición de un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Solución de un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas.

Definición: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ Ejemplo: $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ Solución: x = 1 ; y = 2

Nota: Dos valores reales “x” e “y” son solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando verifican todas sus ecuaciones.

Definición de un sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Solución de un sistema de ecuaciones con 3 incógnitas.

Definición: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$ Ejemplo: $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ x-3y \quad =-20 \\ 4x+2y+5z=8 \end{cases}$ Solución: x = 1 ; y = 7 ; z = -2 .

Nota: Tres valores reales “x”, “y”, “z” son solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando verifican todas sus ecuaciones.

Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales
Todos los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar en forma de ecuación matricial.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B$$

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La matriz A se llama matriz de coeficientes, la matriz X se llama matriz de incógnitas y la matriz B se llama matriz de términos independientes.

Teorema: Todos los sistemas de ecuaciones lineales se pueden resolver mediante una ecuación matricial.

$$A\cdot X=B \qquad A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot(B) \qquad I\cdot X=A^{-1}\cdot B \qquad X=A^{-1}\cdot B$$

Clasificación de los sistemas según el número de soluciones
Sistema compatible determinado (SCD): Tiene solución única.
Sistema compatible indeterminado (SCI): Tiene varias soluciones.
Sistema incompatible (SI): No tiene solución.

Sistemas de ecuaciones escalonados
Los sistemas escalonados son muy fáciles de resolver.

$$\begin{cases} 2x+3y=14 \\ \qquad 5y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=7 \\ \qquad 5y-z=6 \\ \qquad\quad 3z=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=7 \\ \quad y-z=4 \\ \qquad 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+2z=7 \\ \quad 5y-z=6 \\ \qquad 0=5 \end{cases}$$

Utilización del método de Gauss en la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones
Método de Gauss: Todos los sistemas de ecuaciones se pueden transformar, mediante operaciones fila, en sistemas de ecuaciones escalonados equivalentes.

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \\ x+4y-10z=-11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases}$$

MODELO 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante una ecuación matricial

Método de resolución

Este tipo de ejercicio se ha puesto de moda en los últimos años, se trata de expresar el sistema de ecuaciones en forma de ecuación matricial y aplicar la solución $X=A^{-1}\cdot B$.

Ejercicios

1º Dado el sistema 2x – y = 2 , x – y + z = 2 , y – z = -1 , exprésalo matricialmente $A\cdot X=B$, calcula la matriz inversa de A y resuélvelo. (Sep/02)

2º La condición de equilibrio para el precio, en unidades monetarias, de tres productos P_1 , P_2 y P_3 , relacionados entre sí, da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales: x + y + z = 6 , x + y - z = 0 , 2x - y + z = 3 , siendo x, y y z los precios de los productos P_1 , P_2 y P_3 , respectivamente.

a) Expresa el sistema en forma matricial $A\cdot X=B$. Calcula la matriz inversa de A.

b) Calcula los precios de equilibrio para esos tres productos x, y, z. (Jun/14)

3º Tres socios reúnen 6000 euros para invertir en un producto financiero. Se sabe que el primero aporta el doble que el segundo y que el tercero aporta tanto como el primero y el segundo juntos.

a) Formula el sistema de ecuaciones lineales asociado al enunciado y exprésalo en forma matricial.

b) Resuelve el sistema anterior. ¿Cuánto dinero aporta cada uno de los socios para realizar la inversión? (Sep/15)

MODELO 2: Operaciones de matrices mezcladas con sistemas de ecuaciones

Método de resolución

Esta tipo de ejercicio es bastante habitual en selectividad. Su resolución consiste en realizar las operaciones matriciales propuestas, plantear el sistema de ecuaciones lineales que queda y resolverlo mediante el método de Gauss.

Ejercicios

1º Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 5x & 2 \\ 2x & 2 \\ x & -2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3z \\ z \\ 2z \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que (A . B) + C = 2D, fórmula un sistema de ecuaciones y encuentra los valores x, y, z. (Sep/04)

2º Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores de a, b y c para que se verifique la ecuación matricial $A.B^t = C$. (Jun/07)

3º Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores de los números reales x, y, z, para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices: $x \cdot A^{-1} \cdot B = E + y \cdot C + z \cdot D$ (Jun/09)

4º Considera las matrices A, B, C y D siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz A.
b) Calcula la matriz $C \cdot D - B$. ¿Cuál es su orden?
c) Determina los valores x, y, z que satisfacen la identidad $A^{-1} \cdot B = C \cdot D - B$. (Sep/09)

5º Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -y & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & z & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores x, y, z para los que se verifica $2A - 4B + 3C = D^{-1}$. (Jun/10)

6º Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c+2 & 2 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Calcula las matrices $A \cdot B$ y $B-C$. Calcula los valores de a, b y c que cumplen $A \cdot B = B - C$. (Jun/15)

MODELO 3: Problemas reales relacionados con las Ciencias Sociales y la Economía

Método de resolución

Este tipo de ejercicio, también es importante, por su relación con las Ciencias Sociales; para resolverlo primero debemos plantear un sistema que posteriormente solucionaremos por el método de Gauss.

Ejercicios

1º Tres trabajadores A, B y C, al acabar un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de mantenimiento y Km. de desplazamiento que hicieron cada uno de ellos

	Horas de trabajo	Dietas	Kilómetros
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga a los tres trabajadores la misma retribución: x euros por hora trabajada, y euros por cada dieta y z euros por Km. de desplazamiento y que paga ese mes un total de 924 euros al trabajador A, 1390 euros al B y 646 euros al C, calcular x, y, z. (Jun/04)

2º Un fabricante produce tres artículos diferentes (A, B y C), cada uno de los cuales precisa para su elaboración de tres materias primas (M_1, M_2 y M_3). En la siguiente tabla se presentan el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto:

Materias primas \ Productos	A	B	C
M_1	2	1	3
M_2	3	2	2
M_3	1	2	4

Dispone de 50 unidades de M_1, 70 unidades de M_2 y 40 unidades de M_3.

a) Determina las cantidades de los artículos A, B y C que produce dicho fabricante.

b) Si los precios de venta de cada artículo son, respectivamente, 500, 600 y 1000 euros y gasta en cada unidad de materia prima 50, 70 y 60 euros, determina el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida (utilizando todos los recursos posibles). (Jun/05)

3º Una empresa de productos informáticos tiene tres tiendas (T_1, T_2 y T_3) en los que vende un modelo de ordenador (O), uno de impresora (I) y otro de cámara digital (C), a un precio de venta por unidad de 1200 €, 300 € y 650€, respectivamente. En cierto mes, el número de artículos vendidos (en cada tienda) es el indicado en la tabla siguiente:

	O	I	C
T_1	x	y	4
T_2	25	x	z
T_3	20	y	z

Determinar el número de artículos vendidos en cada una de las tres tiendas, sabiendo que los ingresos obtenidos en dicho mes fueron 23600 € en la T_1, 39700 € en la T_2 y 32200 € en la T_3. (Sep/07)

4º Un autobús transporta en cierto viaje 60 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que cuesta 1 €, estudiantes que tienen un 25% de descuento y jubilados con un descuento del 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en este viaje fue de 48 euros. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de viajeros. (Jun/08)

5º Decidimos invertir una cantidad de 15000 euros en bolsa, comprando acciones de tres entidades A, B y C. Invertimos en A el doble que en B y en C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la entidad A se revalorizaron un 3%, las de B un 4% y las de C perdieron un 2% y, como consecuencia, obtuvimos un beneficio de 380 euros. Determina cuanto invertimos en cada una de las entidades. (Jun/12)

TEMA 5: PROGRAMACIÓN LINEAL

Teoría

El sueño de un empresario cualquiera es ganar mucho dinero, para ello, los ejecutivos de las empresas deben tomar nuevas decisiones a diario. Las grandes multinacionales tienen departamentos dedicados exclusivamente a estos menesteres. La programación lineal es una herramienta científica que ayuda a estos individuos a tomar las decisiones más acertadas.

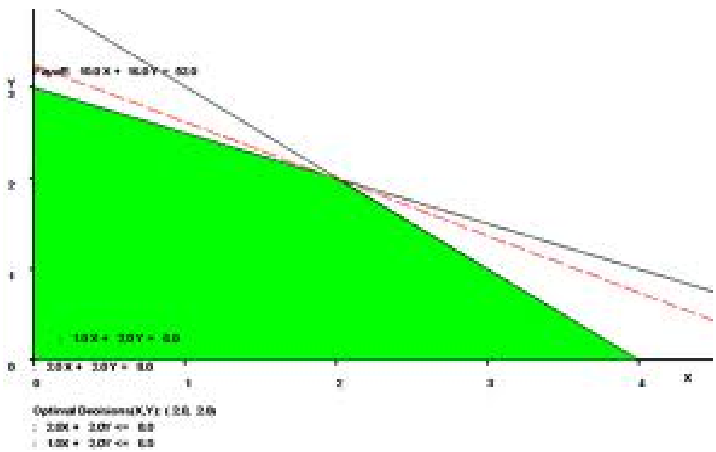
Fases de un problema de programación lineal

1ª Todos los problemas reales persiguen un objetivo (meta), que normalmente consiste en maximizar beneficios o minimizar costes. Por eso, la 1ª fase en la resolución de este tipo de problemas consistirá en plantear dicha función objetivo: $f(x,y)=a\cdot x+b\cdot y$

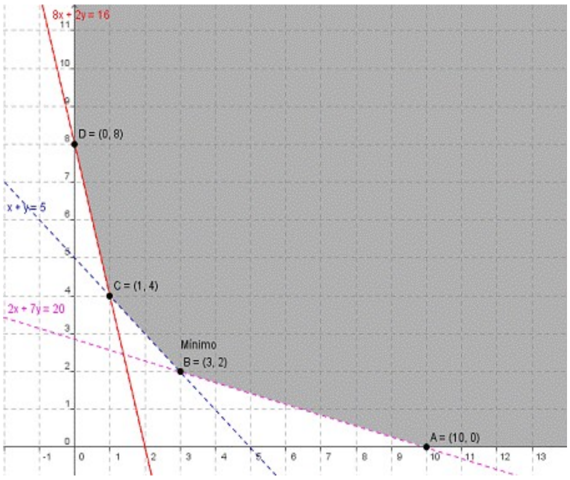
2ª En los problemas reales, siempre existen recursos limitados o necesidades mínimas que tenemos que cubrir. Esto, lo traduciremos matemáticamente en un conjunto de restriciones e inecuaciones.

$$a_1\cdot x+b_1\cdot y\leqslant c_1$$
$$a_2\cdot x+b_2\cdot y\leqslant c_2$$
$$\ldots.$$
$$a_n\cdot x+b_n\cdot y\leqslant c_n$$

3ª Cuando resolvamos el sistema de inecuaciones dibujaremos la región factible y calcularemos sus vértices.



Región factible cerrada



Región factible abierta

4ª La función objetivo se optimizará:

Caso 1: En uno de los vértices de la región factible (solución óptima única)

Caso 2: En dos de los vértices de la región factible y en todos los puntos del segmento delimitado por dichos vértices (solución óptima múltiple).

Caso 3: En las regiones factibles abiertas puede ocurrir que el óptimo sea ilimitado.

MODELO 1: Problema de Programación Lineal Básico

Método de resolución
En este tipo de ejercicios nos dan el planteamiento, solamente hace falta dibujar la región factible, hallar sus vértices y sustituir cada uno de ellos en la función objetivo para averiguar cual o cuales de ellos la optimizan.

Ejercicios

(2/6/13) Sea la función $f(x,y)=-0{,}8x+1{,}5y$ sujeta a las retricciones: $x+y\leqslant 10$; $x+2y\geqslant 8$; $2\leqslant y\leqslant x+6$; $x\leqslant 6$.

a) Representa la región R del plano determinado por el conjunto de restricciones y calcula sus vértices.
b) Calcula los puntos de R donde la función alcanza sus valores máximo y mínimo.

(2/6/14) Consideremos el siguiente sistema de inecuaciones: $y-x-2\leqslant 0$; $y+x-6\leqslant 0$; $2y\geqslant 5-x$.

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
b) Calcula en que punto o puntos de esa región alcanza los valores máximo y mínimo la función $f(x,y)=x+2y$.
c) Responde al apartado anterior si se añade $y\geqslant 0$ al sistema de inecuaciones anterior.

(2/9/14) a) Representa la región del plano definida por el sistema de inecuaciones: $y+2x\leqslant 6$, $y\leqslant x$, $4y\geqslant x-3$, y calcula sus vértices. Justifica si los puntos P(1 , -1/2) y Q(1/2 , 1) pertenecen o no a esta región.
b) Calcula en que punto o puntos de esta región la función $f(x,y)=y+2x$ alcanza el valor máximo.

(2/6/15) Sea R la región del plano determinada por el sistema de inecuaciones $2x+3y\leqslant 12$, $-2\leqslant 2x-y\leqslant 4$, $y\geqslant 0$.

a) Representa la región R y calcula sus vértices. Justifica si el punto P(-1/2 , 1/2) pertenece o no a la región R.
b) Calcula el punto o puntos de R donde la función $f(x,y)=-2x+5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

MODELO 2: Problema de Programación Lineal Real

Método de resolución
Lo más difícil en estos ejercicios es hacer el planteamiento, una vez hecho esto, actuaremos igual que en el modelo 1.

Ejercicios

(1/9/13) El dueño de una tienda de fotografía desea comercializar dos tipos de cámaras de fotos A y B con un precio de venta al público de 210 y 300 euros la unidad, respectivamente. Para la compra de ambos tipos dispone de un máximo de 2760 euros y hará el pedido a un almacén que le cobra 120 euros por cada cámara del tipo A y 180 euros por cada cámara del tipo B. El dueño hará el pedido con la condición de que: al menos 3 cámaras sean del tipo A, entre 4 y 12 sean del B y el número de cámaras del tipo A no debe superar en más de tres unidades al número de cámaras del tipo B.
a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible, calcula sus vértices.
b) ¿Cuántas cámaras de cada tipo deberá adquirir para que los beneficios obtenidos sean máximos?

(2/6/10) Una empresa de transportes tiene que trasladar bloques de granito desde una cantera a un aserradero de piedra. Para eso dispone de un máximo de 8 camiones de tipo A y un máximo de 12 camiones de tipo B. Cada camión de tipo A necesita un operario y puede transportar 24 toneladas de granito con un gasto de 150 euros, mientras que cada camión de tipo B necesita dos operarios y puede transportar 12 toneladas de granito con un gasto de 300 euros. Se sabe que se necesitan un mínimo de 15 operarios, que se transportarán un mínimo de 108 toneladas de granito y que el número de camiones de tipo A utilizados no será superior al número de camiones de tipo B.
a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.
b) Calcula todas las posibilidades que tiene la empresa de distribuir los camiones para minimizar el gasto.

(2/6/11) Una asesoría laboral tiene una cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Para el próximo año quiere conseguir como clientes al menos a 5 empresas y a un número de particulares que, como mínimo, debe de superar en 4 al doble del número de empresas. Además, el número total de clientes anuales no debe superar los 40 clientes. Espera que cada empresa le produzca 800 euros de ingresos anuales y cada particular 600 euros anuales.
a) Expresa las restricciones del problema. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
b) ¿Qué solución le proporcionaría los mayores ingresos anuales? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

(2/9/10) Una pequeña empresa desea contratar trabajadores de dos categorías laborales: I y II. Pretende que el número total de trabajadores contratados no sea inferior a 9 ni superior a 12 y, además, el número de trabajadores de la categoría I no podrá ser inferior al doble de trabajadores de la categoría II. El coste laboral de un trabajador de la categoría I está estimado en 1400 euros al mes y el de uno de la categoría II en 1100 euros al mes.
a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al enunciado. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
b) Calcula el número de trabajadores de cada categoría laboral que la empresa debe contratar para minimizar los costes laborales mensuales.

(2/9/11) Una tienda de informática vende, entre otros productos, ordenadores portátiles e impresoras, pudiendo almacenar un máximo de 150 unidades en total. Para atender la demanda de sus clientes debe tener en stock por lo menos 20 portátiles y por lo menos 50 impresoras. Además, para lograr un precio competitivo, el proveedor le exige que el número de impresoras que compre tiene que ser igual o superior en 20 unidades al número de portátiles.
a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.
b) Si en la venta de cada portátil obtiene un beneficio de 80 € y en la de cada impresora de 20 €, ¿cuántas unidades de cada tipo debe vender para obtener el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

(2/6/08) Un proyecto de jardinería puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G_1 y G_2. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo en cada zona durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G_1	4	10	7
Grupo G_2	10	5	7

Se necesita ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, estimándose el coste semanal en 3300 euros para el grupo G_1 y en 4000 euros para el grupo G_2.
¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste? Expresar la función objetivo y las restricciones del problema. Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.

(2/6/09) Una compañía química diseña dos posibles tipos de cámaras de reacción que incluirán en una planta para producir dos tipos de polímeros P_1 y P_2. La planta debe tener una capacidad de producción de, al menos 100 unidades de P_1 y al menos 420 unidades de P_2 cada día. Cada cámara de tipo A cuesta 600000 euros y es capaz de producir 10 unidades de P_1 y 20 unidades de P_2 por día; la cámara de tipo B es un diseño más económico, cuesta 300000 euros y es capaz de producir 4 unidades de P_1 y 30 unidades de P_2 por día. Debido al proceso de diseño, es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo de planta. ¿Cuántas cámaras de cada tipo deben incluirse para minimizar el coste y aún así satisfacer el programa de producción requerido? Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.

(2/9/09) Un artesano elabora dos tipos de piezas: porrones y ollas, en cantidades reducidas. Sabe que no puede producir más de 8 piezas diarias ni tampoco más de 4 ollas diarias. También, por motivos de producción, desea que el número de porrones no supere al número de ollas en más de dos piezas. Si obtiene un beneficio de 6 euros por cada porrón y de 4 euros por cada olla, ¿cuántas piezas de cada tipo deberá elaborar cada día para obtener un beneficio máximo?, ¿cuál será este beneficio? Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.

TEMA 6: PROBABILIDAD

EXPERIMENTO ALEATORIO

La probabilidad es la parte de las matemáticas que estudia los experimentos donde influye la suerte o el azar. Dichos experimentos reciben el nombre de experimentos aleatorios.
Ejemplos: Lanzamiento de una moneda, lanzamiento de un dado, sacar una carta de una baraja …

ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS

Cuando estudiamos un experimento aleatorio es muy importante que realicemos una descripción de todos los resultados que pueden ocurrir. Al conjunto de todos estos posibles resultados se le llama espacio muestral (E) y a cada uno de los resultados, suceso.
Nota: Los sucesos los expresamos con letras mayúsculas.

Ejemplos de espacios muestrales: E_1 = {cara, cruz} E_2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Ejemplos de sucesos: A = "Salir cara" B = "Salir 2" C = "Salir par"

Sucesos elementales: están constituídos por un único resultado. A = "Salir cara" B = "Salir 2"
Sucesos compuestos: están constituídos por más de un resultado. C = "Salir par"
Suceso seguro (E): representa aquel resultado que ocurre siempre. E = "Salir valor entre 1 y 6"
Suceso imposible (Ø): representa un resultado que no puede ocurrir. Ø = "Salir 7"

OPERACIONES CON SUCESOS (Vocabulario)

Al resolver un problema de probabilidad real, tenemos que traducir lenguaje coloquial a lenguaje matemático, por eso tenemos que dominar las siguientes notaciones.

- Operación unión: $A\cup B=$ "ocurre el suceso A o el suceso B" (Puede ser que ocurra solo A, que ocurra solo B o que ocurran A y B a la vez).
- Operación intersección: $A\cap B=$ "ocurren A y B a la vez"
- Operación suceso contrario o complementario: $\overline{A}=$ "no ocurre el suceso A"
- Operación diferencia: $A-B=$ "ocurre el suceso A pero no ocurre el suceso B" = $A\cap\overline{B}$
- Operación condicionada: $A/B=$ "ocurre A sabiendo que ocurrió anteriormente B"
- Leyes de Morgan: $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$ y $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD (LEY DE LAPLACE)

$$P(A)=\frac{N^{o}\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{N^{o}\ total\ de\ casos\ posibles\ (n)}$$

Ejemplo 1: Consideramos el experimento aleatorio lanzar un dado.

A = "Salir un 2" $P(A)=\frac{1}{6}$ B = "Salir par" $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Ejemplo 2: Consideramos el experimento aleatorio sacar una carta de una baraja.

A = "Salir un as" $P(A)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$ B = "Salir un oro" $P(B)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD DE KOLMOGOROV

Sea un experimento aleatorio cualquiera, cuyo espacio muestral es E. Una probabilidad bien definida, asocia a cada suceso A un número real, el cual debe cumplir los siguientes axiomas.

1. Cualquiera que sea el suceso A, $P(A)\geqslant 0$.
2. Si $A\cap B=\emptyset$ entonces debe cumplirse que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
3. La probabilidad total es 1: $P(E)=1$.

PRINCIPALES PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD. TEOREMAS

1. $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$ $\qquad$ $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)$

2. $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

3. Probabilidad condicionada: $P\left(A/B\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$ o $P\left(B/A\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}$

4. Regla del producto: $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B/A\right)=P\left(B\right)\cdot P\left(A/B\right)$

5. Dos sucesos, A y B, son independientes cuando: $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

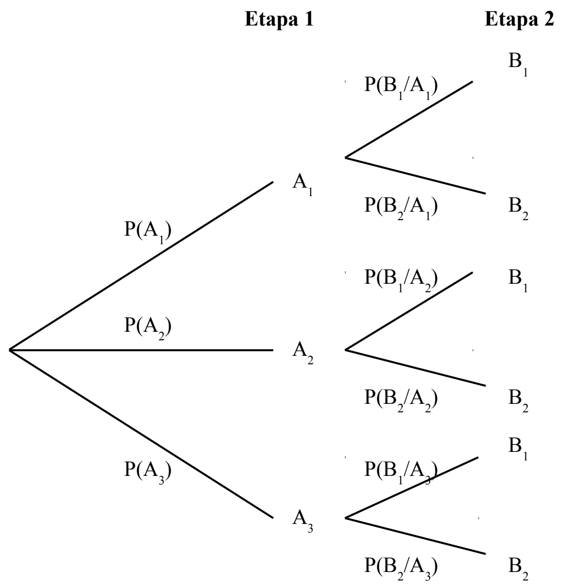
Para resolver los problemas de probabilidad, primero deberemos poner nombre a los sucesos que intervienen, luego realizar una descripción del experimento aleatorio (tabla de contingencia o diagrama de árbol) y por último utilizaremos los teoremas anteriores, las propiedades y las definiciones anteriores.

Tabla de contingencia

	B	$\overline{B}$	TOTAL
A	$P\left(A\cap B\right)$	$P\left(A\cap\overline{B}\right)$	$P\left(A\right)$
$\overline{A}$	$P\left(\overline{A}\cap B\right)$	$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$	$P\left(\overline{A}\right)$
TOTAL	$P\left(B\right)$	$P\left(\overline{B}\right)$	1

Diagrama de árbol

Se utiliza cuando podemos observar diferentes etapas secuenciadas en el tiempo dentro del experimento aleatorio.



Para calcular la probabilidad de un camino se utiliza la regla del producto.

$$P\left(A_1\cap B_1\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(B_1/A_1\right)$$

Para calcular la probabilidad de un suceso se utiliza el Teorema de la Probabilidad Total.

$$P\left(B_1\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(B_1/A_1\right)+P\left(A_2\right)\cdot P\left(B_1/A_2\right)+P\left(A_3\right)\cdot P\left(B_1/A_3\right)$$

MODELO 1: Problemas resueltos mediante tabla de contingencia

1º Un estudio sociológico afirma que 3 de cada 10 personas de una determinada población son obesas, de las cuales el 60% sigue una dieta. Por otra parte, el 63% de la población no es obesa y no sigue una dieta.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue una dieta?

b) Si una persona elegida al azar sigue una dieta, ¿cuál es la probabilidad de que sea obesa? (Jun/10)

2º Sean A y B sucesos tales que $P(A\cap B)=0{,}1$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}6$; $P(A/B)=0{,}5$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los sucesos contrarios de A y B respectivamente.

a) Calcula las probabilidades siguientes: $P(B)$ y $P(A\cup B)$.

b) ¿Son los sucesos A y B independientes? Justifica la respuesta. (Jun/10)

3º Se realiza un estudio para determinar si los hogares de una pequeña ciudad se suscribirían a un servicio de televisión por cable. Los hogares se clasifican de acuerdo a su nivel de renta: alta, media o baja. La siguiente tabla nos muestra las probabilidades de las distintas intersecciones:

	Renta baja	Renta media	Renta alta
Se suscribirían	0,05	0,15	0,10
No se suscribirían	0,15	0,47	0,08

a) Si el hogar suscribe el servicio, ¿cuál es la probabilidad de que sea de renta alta?

b) ¿Son renta y posible suscripción a la televisión por cable independientes? Justificar la respuesta.

c) Calcula la probabilidad de que un hogar seleccionado al azar pertenezca por lo menos a una de estas categorías: "renta media" o "desean suscribirse". (Sep/10)

4º Un estudio estima que, en general, la probabilidad de que una empresa tecnológica no obtenga los beneficios anuales esperados es 0,5; la probabilidad de que una entidad bancaria no alcance al final del año los beneficios esperados es 0,2 y la probabilidad de que ambas empresas no obtengan los beneficios anuales esperados es 0,1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las dos no obtenga los beneficios anuales esperados?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que solamente una de las dos no obtenga los beneficios anuales esperados? (Sep/10)

5º Se sabe que en cierta población de personas de 18 o más años, el 60% está en contra de la eutanasia. Si en esa población el 68% son mayores de 65 años y el 75% de ellos está en contra de la eutanasia, ¿qué porcentaje de los que tienen entre 18 y 65 años está en contra de la eutanasia? (Sep/12)

6º La probabilidad de obtener rentabilidad positiva en el plazo de un año con un fondo de inversión recientemente constituido es 0´4. Si en el primer año se ha obtenido rentabilidad positiva, la probabilidad de obtenerla en el segundo año es 0´6. La probabilidad de no obtener rentabilidad positiva ni en el primero ni en el segundo año es 0´48.

a) ¿Qué probabilidad hay de obtener rentabilidad positiva en el segundo año?

b) Calcula la probabilidad de obtener rentabilidad positiva en alguno de los dos años. (Sep/12)

7º Un estudio realizado por una entidad bancaria informa de que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un prestamo personal y el 40% de los que tienen un préstamo personal también tien un préstamo hipotecario.

a) Calcula el porcentaje de clientes que tienen ambos tipos de préstamos.

b) Calcula el porcentaje de clientes que no tienen ninguno de los dos tipos de préstamos. (Sep/13)

8º Sean A y B dos sucesos tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es 1/10 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 1/5. Además se sabe que P(A/B) = 1/4 .

a) Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

b) Calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A. (Jun/14)

9º Se sabe que $P(B/A)=0'7$, $P(A/B)=0'4$ y $P(A)=0'2$.

a) Calcula $P(A\cap B)$ y P (B). Justifica si son independientes o no los sucesos A y B.

b) Calcula $P(A\cup\overline{B})$, donde $\overline{B}$ representa el suceso contrario de B. (Sep/14)

10º Un estudio sociológico sobre alcohólicos informa de que el 40% de ellos tiene padre alcohólico, el 6% tiene madre alcohólica y de los que tienen padre alcohólico el 10% tiene también madre alcohólica.

a) Calcula la probabilidad de que un alcohólico, seleccionado al azar, tenga padre y madre alcohólicos.

b) Calcula el porcentaje de alcohólicos que tiene por lo menos uno de los padres alcohólico. (Jun/15)

MODELO 2: Problemas resueltos mediante diagrama de árbol

1º El cuadro de personal de unos grandes almacenes está formado por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de la mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o sólo trabaje en el turno de la mañana?
b) Sabiendo que no sólo trabaja en el turno de la mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (Jun/05)

2º En un estudio hecho en cierto IES, en el que se imparte la ESO y el Bachillerato, se recogieron los siguientes datos:

- El 60% de los alumnos son mujeres.
- El 15% de los hombres estudian Bachillerato.
- El 20% de las mujeres estudian Bachillerato.
- El 30% de las mujeres que estudian Bachillerato eligen la opción de letras.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de ese IES, elegido al azar, sea mujer, estudie Bachillerato y curse la opción de letras.
b) ¿Qué porcentaje del alumnado estudia Bachillerato?
c) ¿Qué porcentaje de los estudiantes de Bachillerato son hombres? (Sep/06)

3º Se quiere hacer un estudio sobre la situación laboral de los trabajadores en tres sectores de la economía que denotaremos por B_1, B_2 y B_3. La mitad de los trabajadores pertenecen al primer sector B_1, y el resto se reparten en partes iguales entre los otros dos sectores B_2 y B_3. El 8% de los del sector B_1, el 4% de los del sector B_2 y el 6% de los del sector B_3 están en el paro.

a) Calcula el porcentaje de paro entre los trabajadores de dicho estudio.
b) ¿Qué porcentaje de los que tienen trabajo pertenecen al tercer sector B_3? (Jun/11)

4º Una empresa somete a un control de calidad a 7 de cada 10 artículos fabricados. De los que son sometidos al control resultan defectuosos un 2% y de los que no se someten al control de calidad resultan defectuosos un 12%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo elegido al azar resulte defectuoso?
b) Si un artículo elegido al azar resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no fuese sometido al control de calidad? (Sep/11)

5º Se trata contra una determinada enfermedad el 40% de los árboles de una parcela. Se sabe que enferman el 5% de los árboles tratados y el 30% de los no tratados contra la enfermedad.
Calcula la probabilidad de que no enferme un árbol cualquiera de la parcela. (Jun/12)

6º El 40% de los aspirantes a un puesto de trabajo supero una determinada prueba de selección. Terminan siendo contratados el 80% de los aspirantes que superan esa prueba y el 5% de los que no la superan.

a) Calcula el porcentaje de aspirantes al puesto de trabajo que terminan siendo contratados.
b) Si un aspirante no es contratado, ¿cuál es la probabilidad de que superase la prueba de selección? (Jun/12)

7º Una fabrica produce Cds en dos turnos. El primer turno produce 2000 discos diarios y el segundo turno produce 3000. Por la experiencia pasada, se sabe que en el primer turno y en el segundo turno se producen 1% y 2% de discos defectuosos respectivamente. Al final del día se seleccionó al azar un disco de la producción total.

a) Determina la probabilidad de que el CD sea defectuoso.
b) Si el CD no es defectuoso, calcula la probabilidad de que provenga del primer turno. (Jun/13)

8º Se estima que un tercio de las empresas en un sector de la economía, tendrán un aumento en sus ganancias trimestrales. Declara un dividendo un 60% de las empresas que tienen el aumento y un 10% de los que no lo tienen.

a) ¿Qué porcentaje de las empresas que declaren un dividendo tendrán un aumento en sus ganancias trimestrales?
b) ¿Qué porcentaje de empresas ni tienen aumento en sus ganancias ni declaran un dividendo? (Sep/13)

9º Cierta población de personas mayores de 70 años está formada por un 40% de hombres y un 60% de mujeres. El porcentaje de personas dependientes en esa población es del 10% entre los hombres y del 20% entre las mujeres.
a) Calcula el porcentaje de personas dependientes en esa población de mayores de 70 años.
b) Elegida una persona al azar de la citada población, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer o no sea dependiente? (Sep/14)

10º El departamento comercial de una empresa estudia la posible acogida de un producto entre sus clientes. Para eso, efectúa un primer lanzamiento del producto ofertándolo a 250 clientes escogidos al azar de los que 150 siempre efectúan sus pagos a plazos y el resto lo hacen al contado. El departamento estima que el 90% de los clientes que pagan a plazos aceptará el producto y de los de pago al contado lo aceptará el 65%.
a) Calcula la probabilidad de que un cliente de esa empresa no acepte el producto.
b) Si un cliente acepta el producto, calcula la probabilidad de que pague al contado. (Sep/15)

TEMA 0: CONOCIMIENTOS PREVIOS DE ESTADÍSTICA

1. INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

La Estadística es una parte de las Matemáticas que se dedica al estudio de diferentes características dentro de distintos conjuntos de personas, animales o cosas. A cada una de las características estudiadas en un conjunto de individuos se le llama variable aleatoria.

Según su descripción, podemos distinguir dos tipos de variables aleatorias:

1. Variables aleatorias cualitativas o atributos, que se describen mediante palabras.
   Ejemplos: color del pelo de un caballo, partido político al que se vota,…

2. Variables aleatorias cuantitativas, que se describen mediante números.

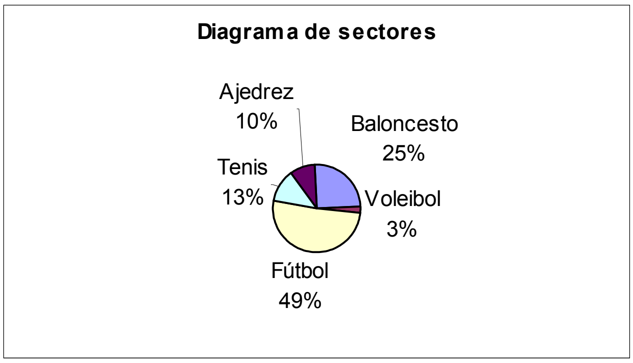
   2.1 Variables aleatorias cuantitativas discretas: los números con las que se describen "no admiten decimales".
   Ejemplos: nº de hijos de una familia, nº de goles en un partido de futbol,…

   2.2 Variables aleatorias cuantitativas continuas: los números con las que se describen admiten decimales.
   Ejemplos: altura de una persona, peso de una trucha,…

Estudio estadístico 1 (variable cualitativa)

Los deportes preferidos por 40 jóvenes entrevistados son:

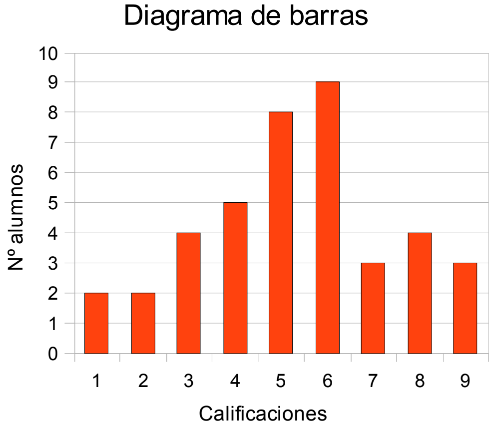
Deporte	Frecuencia (f_i)
Baloncesto	10
Voleibol	1
Fútbol	20
Tenis	5
Ajedrez	4



Estudio estadístico 2 (variable cuantitativa discreta)

Las calificaciones en la asignatura Historia del arte de los 40 alumnos de una clase:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	2	2	2
2	2	4	8
3	4	12	36
4	5	20	80
5	8	40	200
6	9	54	324
7	3	21	147
8	4	32	256
9	3	27	243
Totales	40	212	1296



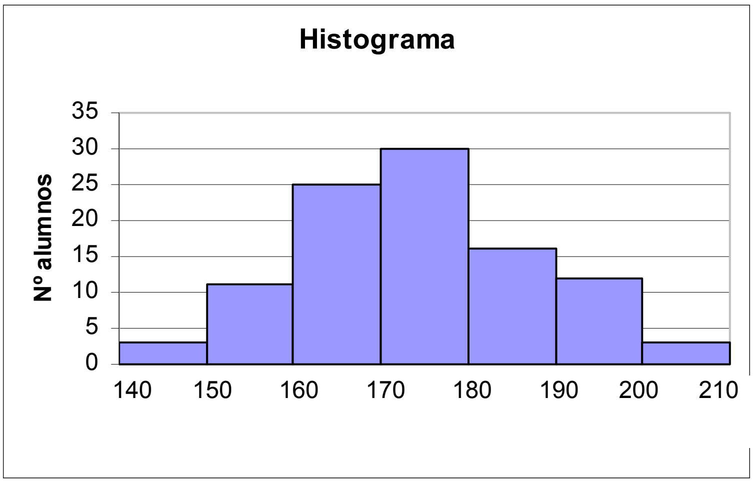
$$\mu=\frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}=\frac{212}{40}=5,3$$

$$\sigma^2=\left[\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i}\right]-\mu^2=\frac{1296}{40}-(5,3)^2=4,31 \qquad \sigma=\sqrt{4,31}=2,08$$

Estudio estadístico 3 (variable cuantitativa continua)

Las estaturas de los 100 alumnos de un instituto de bachillerato:

Estatura (cm)	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[140 - 150)	145	3	435	63075
[150 - 160)	155	11	1705	264275
[160 - 170)	165	25	4125	680625
[170 - 180)	175	30	5250	918750
[180 - 190)	185	16	2960	547600
[190 - 200)	195	12	2340	456300
[200 - 210)	205	3	615	126075
Totales		100	17430	3056700



$$\mu=\frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}=\frac{17430}{100}=174,3$$

$$\sigma^2=\left[\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i}\right]-\mu^2=\frac{3056700}{100}-(174,3)^2=186,51 \qquad \sigma=\sqrt{186,51}=13,66$$

<u>Nota:</u> Los parámetros más representativos de una variable aleatoria cuantitativa son la media (μ), la varianza (σ^2) y desviación típica (σ).

2. POBLACIÓN Y MUESTRA

Cuando en un estudio estadístico realizamos la observación de una característica, dicha característica debe estar referida a un conjunto de individuos (personas, animales o cosas); este conjunto de individuos sobre el que se realiza el estudio recibe el nombre de <u>población</u> o universo.

En la mayor parte de las ocasiones, nos será imposible realizar el estudio de una característica en todos los individuos de una población, debido principalmente a las siguientes causas:

- La población es excesivamente numerosa. Ejemplo: Estudiar la altura de todos los chinos.
- La población es muy difícil de controlar. Ejemplo: Estudiar el peso de los linces ibéricos.
- Cuando el proceso de medición es destructivo. Ejemplo: Estudiar el tiempo que tarda una bombilla en fundirse.
- Cuando el proceso de medición debe ser rápido, debido a problemas económicos o de tiempo, y se tardaría demasiado en consultar a todos los elementos de la población. Ejemplo: Sondeos electorales, sondeos de opinión.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, en los estudios estadísticos es bastante difícil observar una característica en todos los individuos de una población, por lo que debemos conformarnos con realizar dicha observación en un grupo de individuos mucho más reducido en número, a este subconjunto de la población se le llama <u>muestra</u>.

Llegados a este punto, nos surge la siguiente pregunta: ¿Cómo deberemos seleccionar los elementos de esta muestra, para que los resultados que se obtengan, sean similares a los que se obtendrían estudiando la población completa?

Para solucionar este inconveniente, los estadísticos han elaborado unas técnicas de muestreo que consiguen que las muestras seleccionadas sean realmente representativas del total de la población. En estas técnicas es muy importante que controlemos el tamaño de las muestras y que todos los elementos de las mismas tengan iguales posibilidades de ser elegidos, de esta forma conseguiremos que los errores que cometemos al aproximar los resultados de toda la población, por los resultados obtenidos con la muestra, sean lo más pequeños posibles.

<u>Tipos de muestreo</u>

Muestreo aleatorio simple

Por su sencillez es el más utilizado en la practica. Consiste en numerar cada uno de los individuos de la población de tamaño N, y a continuación mediante un sistema totalmente mecanizado (un bombo, un ordenador, una urna con papeletas numeradas,...) extraer al azar “n” números, eligiendo entonces aquellos individuos de la población cuyos números coincidan. La extracción de las bolas se podrá hacer sin reemplazamiento o con reemplazamiento. Mediante este sistema de muestreo se consigue que todos los individuos de la población tengan las mismas posibilidades a la hora de formar parte de la muestra.

Ejemplo: Explicación de cómo se extrae una muestra de tamaño 100, mediante muestreo aleatorio simple, en un centro escolar donde hay 1300 alumnos.
Se sortean 100 números de entre los 1300 que hay metidos en un bombo. La muestra estará formada por los 100 alumnos a los que correspondan esos números.

Muestreo aleatorio sistemático

Es algo más complicado que el anterior, pero menos costoso en cuanto a los medios utilizados. Supongamos que tenemos una población de tamaño muy grande "N" de la cual queremos extraer una muestra más pequeña de tamaño "n", los pasos a seguir son los siguientes:

1º Numeramos todos los individuos de la población de 1 a N.

2º Calculamos el coeficiente de elevación $h=\frac{N}{n}$.

3º De un bombo que contenga h bolas, extraemos una sola bola; el número que salga se corresponderá con el del primer individuo de la muestra a_1.

4º El resto de los elementos de la muestra se seleccionan sistemáticamente a partir del primero:
a_1 , $a_2 = a_1 + h$, $a_3 = a_1 + 2.h$, ..., $a_n = a_1 + (n-1).h$

Ejemplo: Explicación de cómo se extrae una muestra de tamaño 100, mediante muestreo aleatorio sistemático, en un centro escolar donde hay 1300 alumnos.

Calculamos el coeficiente de elevación $h=\frac{1300}{100}=13$.

Sorteamos un solo número del 1 al 13 con ayuda de un bombo. Supongamos que sale el 5.
Los alumnos seleccionados para la muestra son los que se corresponden con: 5, 18, 31, 44, 57,…, 1292.

Muestreo aleatorio estratificado o por conglomerados

Este tipo de muestreo, solo lo utilizaremos cuando dentro de la población aparezcan grupos bien diferenciados por alguna característica, que pueda influir claramente sobre el estudio que estemos realizando. En este caso, para que todos los grupos estén bien representados en la muestra, deberemos fijar de antemano el número de miembros de cada grupo que queremos que formen parte de la muestra, esto lo realizaremos mediante un reparto proporcional. Después, para seleccionar los miembros de cada grupo, que pararan a formar parte de la muestra, utilizaremos el muestreo aleatorio simple o sistemático en cada uno de los grupos.

Ejemplo: Explicación de cómo se extrae una muestra de tamaño 100, mediante muestreo aleatorio estratificado con reparto proporcional, en un centro escolar donde hay 1300 alumnos repartidos de la siguiente forma (426 de 1º, 359 de 2º, 267 de 3º, 133 de 4º y 115 de 5º).

$$\frac{100}{1300}=\frac{n_1}{426}=\frac{n_2}{359}=\frac{n_3}{267}=\frac{n_4}{133}=\frac{n_5}{105}$$

$n_1=\frac{100}{1300}\cdot 426=32{,}77$ $\quad$ $n_2=\frac{100}{1300}\cdot 359=27{,}62$ $\quad$ $n_3=20{,}54$ $\quad$ $n_4=10{,}23$ $\quad$ $n_5=8{,}85$

$n_1=33$ $\quad$ $n_2=28$ $\quad$ $n_3=20$ $\quad$ $n_4=10$ $\quad$ $n_5=9$

3. MANEJO DE LA TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

1. Comprender el concepto de variable aleatoria normal $X \approx N(\mu\ ,\ \sigma)$
2. Tipificación de la variable aleatoria normal, para convertirla en $Z \approx N(0\ ,\ 1)$
3. Manejo de la tabla de la distribución normal estándar.

<u>Teoría</u>

Caso 1: $a > 0$ $P(Z \leq a) = \textit{Mirar directamente en la tabla}$

Caso 2: $a > 0$ $P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leqslant a)$ (Aplicar caso 1)

Caso 3: $a < 0$ $P(Z \leq a) = P(Z \geq -a)$ (Aplicar caso 2)

Caso 4: $a < 0$ $P(Z \geq a) = P(Z \leqslant -a)$ (Aplicar caso 1)

Caso 5: Sean a , b dos números cualesquiera $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$ (Aplicar los casos anteriores)

<u>Nota:</u> Todos los casos explicados se reducen al caso 1.

<u>Ejercicios</u>

1º Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(Z \leq 0,57) =$ b) $P(Z \geq 1,86) =$ c) $P(Z \leq -1,92) =$ d) $P(Z > -1,27) =$

e) $P(0,18 < Z \leq 1,29) =$ f) $P(-1,83 \leq Z < -1) =$ g) $P(-0,56 \leq Z < 1,9) =$

2º En una distribución $X \approx N(66\ ,\ 8)$, calcular:

a) $P(X < 70) =$ b) $P(X > 80) =$ c) $P(70 < X < 80) =$

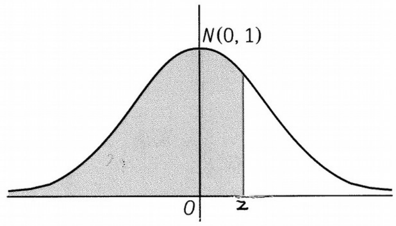
3º En una distribución $X \approx N(18,\ 4)$, halla las siguientes probabilidades:

a) $P(X \leq 20) =$ b) $P(X \geq 16,5) =$ c) $P(X \leq 11) =$ d) $P(19 \leq X \leq 23) =$

e) $P(11 \leq X < 25) =$

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < +\infty$$



$\Phi(z) = P(Z \leq z)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TEMA 7: ESTIMACIÓN DE LA MEDIA EN UNA POBLACIÓN

ESTIMACIÓN PUNTUAL. PARÁMETROS POBLACIONALES. ESTADÍSTICOS MUESTRALES.

Vamos a estudiar estos conceptos teóricos a través de un ejemplo práctico.

Ejemplo

Supongamos que queremos estudiar el peso de N = 15000000 de holandeses. Lo ideal sería pesar a todos los holandeses y a continuación calcular los parámetros poblacionales:

μ = media poblacional = $\frac{\sum x_i}{15000000}$

σ² = varianza poblacional = $\frac{\sum x_i^2}{15000000}-\mu^2 = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{15000000}$

σ = desviación típica poblacional

Este estudio resulta imposible de realizarse por la gran cantidad de holandeses que hay, por eso debemos coger una muestra de tamaño mucho más pequeño (por ejemplo n = 2000 holandeses) y pesarlos, a continuación calcularemos los estadísticos muestrales:

$\bar{X}$ = media muestral = $\frac{\sum x_i}{2000}$

S_{n-1}^2 =cuasivarianza muestral = $\frac{\sum x_i^2-2000\cdot \bar{X}^2}{1999} = \frac{\sum (x_i-\bar{X})^2}{1999}$

S_{n-1} = cuasidesviación típica muestral

Dichos estadísticos muestrales se van a aproximar bastante a los parámetros poblacionales de la población completa y por lo tanto van a servirnos para estimar puntualmente dichos parámetros.

Conclusión Final

Este ejemplo práctico nos sirve para ayudarnos a comprender que, cuando tenemos una población de tamaño muy grande "N", podemos coger una muestra de tamaño mucho más pequeño "n", y aproximar los parámetros poblacionales (μ, σ², σ) a través de los estadísticos muestrales ($\bar{X}$, S_{n-1}^2 , S_{n-1}); este procedimiento recibe el nombre de estimación puntual.

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} \approx \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{N} \approx S_{n-1}^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{X})^2}{n-1} \qquad \sigma \approx S_{n-1}$$

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

Aunque la estimación puntual suele ser bastante acertada; los matemáticos no la consideran del todo buena, porque en ningún momento nos habla del grado de aproximación, es decir, del error que cometemos, al estimar los parámetros poblacionales mediante los estadísticos muestrales; debido a esto, se ideo la estimación por intervalos de confianza.
La estimación de un parámetro poblacional a través de un intervalo de confianza consiste en dar un intervalo (c_1 , c_2), dentro del cual confiamos que esté dicho parámetro, hallando la probabilidad de que tal cosa ocurra.
En los estudios que vamos a realizar durante este tema, vamos a aprender a estimar la media poblacional "μ" en una población con "σ" conocida.

DISTRIBUCIÓN DE LAS MEDIAS MUESTRALES

Deseamos estimar la media de una característica X en una población, cuyos parámetros teóricos son (μ , σ) , para ello extraemos muestras de tamaño "n" y calculamos sus medias muestrales $\bar{X}$.

Teorema Central del Límite

Cuando la característica de la población sea X ≡ N(μ , σ) o el tamaño de la muestra n ≥ 30, podemos decir que el conjunto de las medias muestrales calculadas se comportan como una variable aleatoria normal $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Intervalo de confianza de la media de la población con σ conocida.

Como consecuencia del teorema central del limite, el intervalo característico en el cual se encuentran el porcentaje (1 – α).100% de las medias muestrales $\bar{X}$ será $\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En la vida real, cuando estemos realizando un estudio estadístico, no conoceremos nunca la media μ de la población de partida, pero si podremos calcular la media de una muestra $\bar{X}$, suponiendo que conocemos la desviación típica σ de la población de partida, entonces el intervalo de confianza de μ con un nivel de confianza de probabilidad p o porcentaje %, será $\boxed{\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$.

$$\left(\bar{X} - E , \bar{X} + E\right)$$

Se llama error máximo admisible que cometemos al estimar la media al número $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Cuando nos fijan el error máximo que podemos cometer al dar el intervalo de confianza, seremos capaces de conocer el tamaño de la muestra a coger $n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2$.

MODELO 1: Teorema Central del Límite (μ, σ, n)

Método de resolución
En este tipo de ejercicio debemos aplicar primero el teorema central del límite y posteriormente calcular la probabilidad que se nos pide mediante la tabla de la variable aleatoria normal estándar.

Ejercicios

1º En una distribución N(20, 6), tomamos muestras de tamaño 64. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?

2º Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729.

a) Halla la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.
b) Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

3º El tiempo de espera, en minutos, de los pacientes en un servicio de urgencias, es N(14 , 4). En una media jornada se ha atendido a 16 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de su espera esté comprendido entre 10 y 15 minutos?

4º Si se toman muestras de tamaño n = 4 de una variable aleatoria X con distribución N(165 , 12), calcula $P(\overline{X} > 173{,}7)$.

5º En una ciudad, la altura de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm?

MODELO 2: Hallar un intervalo de confianza para la media poblacional ($\overline{X}$,σ, n, % confianza)

Método de resolución
En este tipo de ejercicio, primero debemos utilizar el % de confianza para calcular el $z_{\alpha/2}$ y después sustituir los datos que nos dan para hallar el intervalo de confianza.

Ejercicios

1º Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm^3. Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

2º La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75 m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza σ^2 = 0,16 m^2. Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

3º Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas, hechos por una determinada máquina, dieron una media de 2 cm, se conoce que la desviación típica del diámetro de un cojinete es de 0,1 cm. Halla los intervalos de confianza para el diámetro medio de todos los cojinetes del: a) 68,26% b) 95,44% .

4º Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, de los estudiantes de bachillerato de cierta comunidad. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para estos gastos: 100 ; 150; 90; 70; 75; 105; 200; 120; 80
Se supone que la variable objeto del estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza al 95% para la media del gasto semanal en fotocopias por estudiante.

5º Deseamos valorar el grado de conocimientos en historia de una población de varios miles de alumnos. Sabemos que σ = 2'3. Una vez realizada la prueba a 100 alumnos concretos, se ha obtenido una media $\overline{X}$ = 6'32. Hallar el intervalo de confianza de μ con un nivel de confianza del 95%.

MODELO 3: Problemas de intervalos de confianza indirectos ($\bar{X}$,σ, n, % confianza)

Método de resolución

En este tipo de ejercicio, debemos utilizar los datos que nos dan para calcular la $\bar{X}$ y el error E, posteriormente utilizando la formula del error deberemos hallar el dato que nos pida (la desviación típica, tamaño de la muestra o % de confianza).

Fórmulas: $\bar{X}=\frac{L_s+L_i}{2}$ $E=\frac{L_s-L_i}{2}$ $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ejercicios

1º La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución N(μ , σ). Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están entre (173,4 ; 175,8), halla $\bar{X}$ y σ.

2º Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4663 € y 5839 €.

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses?
b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

3º Un coronel desea estimar la estatura media de todos los soldados de su regimiento con un error menor de 0'5 cm utilizando una muestra de 30 soldados. Sabiendo que la desviación típica es σ = 5'3 cm, ¿cuál será el nivel de confianza con el que se realiza la estimación?

4º Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo sabe que la desviación típica del mismo es 0'5 segundos. Desea estimar el tiempo medio de reacción con un error máximo de 0'1 segundos, para lo cual realiza 100 experiencias. ¿Con qué nivel de confianza podrá dar el intervalo ($\bar{X}$ - 0'1 ; $\bar{X}$ + 0'1)?

5º Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza σ^2 = 0,16 m^2. ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

6º Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?

7º De la duración de un proceso sabemos que σ = 0'5 s. ¿Cuál es el número de medidas que hay que realizar para que, con un 99% de confianza, el error de la estimación no exceda de 0'1 s?

TEMA 8: ESTIMACIÓN DE LA PROPORCIÓN

ESTIMACIÓN PUNTUAL. PARÁMETROS POBLACIONALES. ESTADÍSTICOS MUESTRALES.

Vamos a estudiar estos conceptos teóricos a través de un ejemplo práctico.

Ejemplo

Supongamos que queremos realizar un estudio acerca de sí se utiliza o no un determinado detergente en los 10500000 de hogares españoles. En este caso hay 2 posibilidades, éxito (que sí utilicen el detergente) o fracaso (que no utilicen el detergente); por lo que se trata de un modelo binomial, en la que no conocemos la proporción "p" (probabilidad del éxito). La manera más exacta de conocer esta proporción "p" de la variable binomial sería preguntar en todos los hogares españoles sí utilizan o no utilizan dicho detergente (imaginemos que tras preguntar, han salido 2050000 hogares donde sí utilizan el detergente, entonces, $p=\frac{2050000}{10500000}=0{,}195$).

Esta primera posibilidad difícilmente se puede llevar a cabo, por la gran cantidad de hogares españoles que tendríamos que visitar, en su lugar lo que debemos hacer es tomar una muestra mucho más pequeña (por ejemplo 1500 hogares) y realizar esa pregunta, una vez conocido el número de respuestas afirmativas (por ejemplo 295 hogares) calcularíamos la proporción muestral $\hat{P}=\frac{295}{1500}=0{,}196$ (probabilidad de éxito en la muestra) que va a salir un número muy parecido a la proporción poblacional p, y por lo tanto nos va a permitir estimar puntualmente dicho valor.

Conclusión Final

Este ejemplo práctico nos sirve para ayudarnos a comprender que, cuando tenemos una población de tamaño muy grande "N", podemos coger una muestra de tamaño mucho más pequeño "n", y aproximar el parámetro poblacional (p) a través del estadístico muestral ($\hat{P}$); este procedimiento recibe el nombre de estimación puntual.

$$p=\frac{\text{nº de casos favorables en toda la población}}{N} \approx \hat{P}=\frac{\text{nº de casos favorables en la muestra}}{n}$$

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

Aunque la estimación puntual suele ser bastante acertada; los matemáticos no la consideran del todo buena, porque en ningún momento nos habla del grado de aproximación, es decir, del error que cometemos, al estimar los parámetros poblacionales mediante los estadísticos muestrales; debido a esto, se ideo la estimación por intervalos de confianza.
La estimación de un parámetro poblacional a través de un intervalo de confianza consiste en dar un intervalo (c_1 , c_2), dentro del cual confiamos que esté dicho parámetro, hallando la probabilidad de que tal cosa ocurra.
En los estudios que vamos a realizar durante el presente tema, vamos a aprender a estimar la proporción "p" de individuos que cumplen una característica determinada dentro de la población.

DISTRIBUCIÓN DE LAS PROPORCIONES MUESTRALES

Deseamos estimar la proporción de una variable binomial X, que teóricamente es p, para ello extraemos muestras de tamaño n y calculamos sus proporciones muestrales $\hat{P}$.

Teorema

Cuando el tamaño de la muestra sea grande y se cumplan las condiciones de que $n\cdot p>5 \;\; y \;\; n\cdot(1-p)>5$ entonces $\hat{P}\approx N\left(p, \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA UNA PROPORCIÓN O UNA PROBABILIDAD

Como consecuencia del resultado teórico que acabamos de conocer, el intervalo característico en el cual se encuentran el porcentaje (1 – α).100% de las proporciones muestrales $\hat{P}$ será

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

En los estudios estadísticos de la vida real nunca conoceremos la proporción "p" de la población total, por lo que el intervalo de confianza que utilizaremos para estimar la proporción "p" será

$$\left(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}, \hat{P}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}\right) \qquad (\hat{P}-E \;,\; \hat{P}+E)$$

Se llama error máximo admisible que cometemos al estimar la proporción al número $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}$

Cuando tengamos que calcular el tamaño de la muestra, suponiendo ya fijado el error máximo que podemos cometer al dar el intervalo, distinguiremos dos casos:

Caso 1: Si no se conoce ningún $\hat{P}$ previo (esto ocurre casi siempre que se realizan encuestas de opinión), entonces se utilizará la hipótesis de máxima indeterminación $p=1-p=0'5$ y el tamaño de la muestra se calculará como $n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2\cdot 0'5\cdot 0'5$.

Caso 2: Si se conoce un $\hat{P}$ por una muestra previa, el tamaño se calculará como $n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2\cdot\hat{P}\cdot(1-\hat{P})$.

Modelo 1: Teorema de la distribución de las proporciones muestrales (p, n)

Método de resolución

En este tipo de ejercicios hay que aplicar primero el teorema de la distribución de las proporciones muestrales y después calcular la probabilidad que se nos pide mediante la tabla normal estándar.

Ejercicios

1º Una máquina produce tornillos. Se sabe que el 5% de ellos son defectuosos. Se empaquetan en cajas de 400. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción $\hat{P}$ de tornillos defectuosos en una caja sea inferior al 4,5%?

2º Si se sabe que 8 de cada 10 clientes de un centro comercial utilizan para sus compras la tarjeta propia del centro y tomamos una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de clientes de la muestra que utilizan la tarjeta propia del centro sea superior a 0,75?

3º Supongamos que el 15% de los jóvenes entre 18 y 25 años son miopes. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 40 jóvenes la proporción de miopes se encuentre entre un 16% y un 18%?

4º En un saco mezclamos judías blancas y judías pintas en la relación de 14 blancas por cada pinta. Extraemos un puñado de 100 judías. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de judías pintas este comprendida entre 0,05 y 0,1?

Modelo 2: Hallar un intervalo de confianza para una proporción poblacional ($\hat{P}$, n , % confianza)

Método de resolución

Utilizaremos el % de confianza para calcular el $z_{\alpha/2}$ y después sustituiremos en la fórmula del intervalo de confianza los datos del ejercicio.

Ejercicios

1º Se realizó una encuesta a 350 familias preguntando si poseían ordenador en casa, encontrándose que 75 de ellas lo poseían. Estima la proporción real de las familias que disponen de ordenador con un nivel de confianza del 95%.

2º Tomada al azar una muestra de 500 personas en cierta comunidad autónoma, se encontró que 220 leían algún periódico habitualmente. Calcula, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo en el que se encontrará la verdadera proporción de lectores de periódicos.

3º Tomada una muestra de 300 personas mayores de 15 años en una gran ciudad, se encontró que 104 de ellas leían el periódico regularmente. Hallar, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de lectores de periódicos entre los mayores de 15 años.

4º Se desea estimar la proporción, p, de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos, de tamaño n. Si el tamaño de la muestra es de 64 individuos, y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del 35%, determina, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

Modelo 3: Problemas de intervalos de confianza indirectos ($\hat{P}$, n , % confianza)

Método de resolución

Utilizaremos los datos que nos dan para calcular la $\hat{P}$ y el error E, posteriormente utilizando la formula del error deberemos hallar el dato que nos pida (el % de confianza o el tamaño de la muestra).

Fórmulas: $\hat{P}=\frac{L_s+L_i}{2}$ $E=\frac{L_s-L_i}{2}$ $\boxed{E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}}$

Ejercicios

1º Un estudio sobre el hábito de fumar entre los habitantes adultos de una ciudad informa de que el intervalo de la proporción de fumadores se estima entre un 30% y un 40%.
a) Determina la proporción muestral de fumadores observada, según dicho estudio.
b) El estudio añade que los datos los obtienen de una encuesta aleatoria realizada a 364 habitantes adultos de la ciudad, ¿cuál es entonces el nivel de confianza de dicho intervalo de estimación de la proporción de fumadores?

2º A partir de una muestra de 100 individuos se ha estimado una proporción mediante el intervalo de confianza (0,17 ; 0,25). ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha hecho la estimación?

3º Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Si pretendemos estimar la probabilidad de "cara" con un error máximo de 0,06. ¿cuál será el nivel de confianza con el que realizaremos dicha estimación?

Caso 1

4º Como resultado de una encuesta en la que se ha utilizado el supuesto de máxima indeterminación $(p=1-p=1/2)$ se afirma que, con un 97'56% de confianza, el porcentaje de individuos de una población que considera el alcohol y/o las drogas como causa principal de los accidentes de tráfico, está entre el 57'5% y el 62'5%.
a) Calcula el número de individuos de esa población a los que se les ha realizado la encuesta.
b) De los que se les ha realizado la encuesta, ¿cuántos han contestado que la causa principal de los accidentes es el alcohol y/o las drogas?

5º Se quiere estimar el porcentaje de españoles que, teniendo derecho a voto, no votarán en las próximas elecciones al Parlamento Europeo. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para garantizar un margen de error no superior al 2'5% con un nivel del 95% de confianza?

Caso 2

6º Cierta enfermedad parece afectar más a los hombres. Un estudio realizado en un hospital establece un intervalo del 95'44% de confianza, (0'58 , 0'62), para la proporción de hombres con esa enfermedad.
a) ¿Cuál es la proporción muestral observada de hombres con esa enfermedad, según dicho estudio?
b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra que se utilizo en ese estudio?

7º Se desea estimar la proporción, p, de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos, de tamaño n. Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30%, calcula el valor de n para que, con un nivel de confianza de 0,95, el error cometido en la estimación sea inferior al 3,1%.

ESTRUCTURA EXAMEN SELECTIVIDAD

OPCIÓN A		
Ejercicio	**Tema**	**Repaso**
1º (3 punt.)	Tema 3 y Tema 4	Operaciones con matrices, ecuaciones matriciales, sistemas matriciales, resolución de sistemas de ecuaciones (método de Gauss).
2º (3 punt.)	Tema 1 y Tema 2	Representación de funciones simples y definidas a trozos, resolución de problemas de optimización, comportamiento de una función a largo plazo, resolución de inecuaciones mediante el estudio de la monotonía de una función, calculo de áreas sencillas.
3º (2 punt.)	Tema 6	Técnica de tablas de contingencia y diagramas de árbol, fórmulas del suceso contrario, de la unión de dos sucesos y de la probabilidad condicionada, definición de dos sucesos independientes.
4º (2 punt.)	Tema 7	Teorema central del limite, contrucción de un intervalo de confianza para μ, calcular el tamaño n de una muestra conociendo el error de estimación,calcular el nivel de confianza conociendo el error de estimación.

OPCIÓN B		
Ejercicio	**Tema**	**Repaso**
1º (3 punt.)	Tema 5	Función objetivo, conjunto de restricciones, dibujar la región factible, calcular sus vértices, estudiar en cual de ellos se produce el óptimo, la solución puede ser única o todos los puntos de un segmento.
2º (3 punt.)	Tema 1 y Tema 2	Representación de funciones simples y definidas a trozos, resolución de problemas de optimización, comportamiento de una función a largo plazo, resolución de inecuaciones mediante el estudio de la monotonía de una función, calculo de áreas sencillas.
3º (2 punt.)	Tema 6	Técnica de tablas de contingencia y diagramas de árbol, fórmulas del suceso contrario, de la unión de dos sucesos y de la probabilidad condicionada, definición de dos sucesos independientes.
4º (2 punt.)	Tema 8	Teorema de Moivre, contrucción de un intervalo de confianza para p, calcular el tamaño n de una muestra conociendo el error de estimación, calcular el nivel de confianza conociendo el error de estimación.

Nota: Esta estructura es orientativa, puede que cambie algún tema de la opción A a la opción B.