TEMA 7. <u>DERIVADAS</u>

1. CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

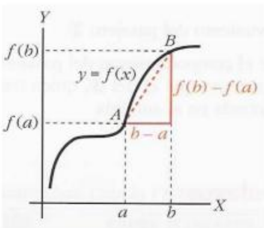
<u>Tasa de variación media</u>

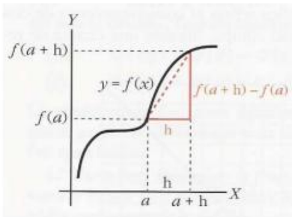
<u>Definición</u>. Se llama tasa de variación media (T.V.M.) de una función, $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ al cociente: $T.V.M.[a, b] = \frac{Variaci\acute{o}n\ de\ f(x)}{Variaci\acute{o}n\ de\ x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Y es la pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

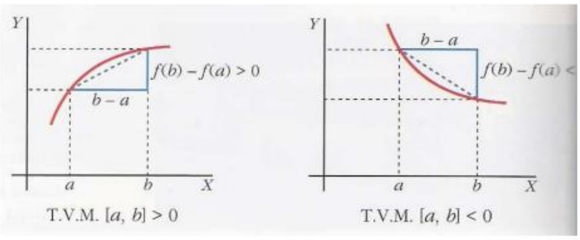
Con frecuencia, el intervalo se designa mediante la expresión $[a, a + h]$, nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. En tal caso, la tasa de variación media se obtiene:

$T.V.M.[a, a + h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.





Si una función es creciente en $[a, b]$, su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



<u>Definición</u>. Se llama tasa de variación instantánea (T.V.I) de una función, $y = f(x)$ en un punto a:

$T.V.I.(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Y es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

<u>Definición</u>. Llamaremos derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ a la tasa de variación instantánea de dicha función en el punto a, y se designa por $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $x = a$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

3. FUNCIÓN DERIVADA.

Se llama ***función derivada de f*** (o simplemente ***derivada de f***) a una función f' que asocia a cada abscisa, x, la derivada de f en ese punto, $f'(x)$, es decir, la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o Df.

4. REGLAS DE DERIVACIÓN.

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x.\,\mathrm{Ln}\,a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}.\mathrm{Ln}\,a.f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}.f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x.\mathrm{Ln}a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x).\mathrm{Ln}a}$
$y = \mathrm{Ln}\,x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \mathrm{Ln}\,f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

OPERACIONES CON DERIVADAS.

- Multiplicación por un número: $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$
- Suma y resta: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Cociente: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- Composición: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

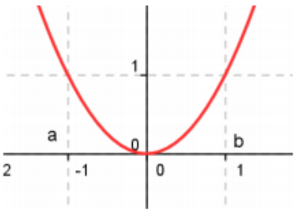
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$La función es creciente en el punto $x = a$.
- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$La función es decreciente en el punto $x = a$.
- Si hay un máximo o mínimo relativo en $x = a \Rightarrow f'(a) = 0$.
    - Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.
    - Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.

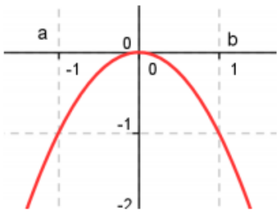
Se denomina punto singular o punto crítico de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anula la derivada.

CURVATURA

- f es ***convexa*** en $[a, b]$ si para toda terna x_0, x, x_1 del intervalo con $x_0 < x < x_1$ se verifica que:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
- f es ***cóncava*** en $[a, b]$ si para toda terna x_0, x, x_1 del intervalo con $x_0 < x < x_1$ se verifica que:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Convexa



Cóncava

En términos de derivadas, f es:

- Convexa $\Leftrightarrow f''(x) > 0$
- Cóncava $\Leftrightarrow f''(x) < 0$

Los puntos en los que $f''(x) = 0$ se denominan ***puntos de inflexión***.