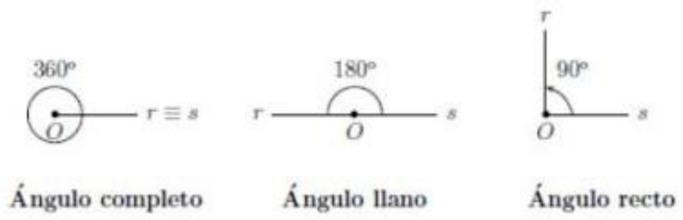
APUNTES TRIGONOMETRÍA

1. Medida de ángulos

Existen dos unidades (más sus múltiplos y submúltiplos) para medir la amplitud de los ángulos. Hasta este momento, seguro que habéis trabajado con el sistema sexagesimal y las unidades de grados, minutos y segundos. Pues bien, ahora será necesario introducir una nueva unidad, ya que por convenio se ha decidido que la unidad del SI para medir ángulos sea el radián.

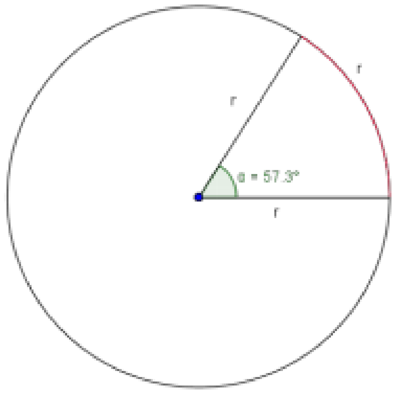
Sistema sexagesimal: Un grado sexagesimal es cada una de las 360 partes iguales en las que se divide una circunferencia mediante sectores circulares. De esta manera, una circunferencia abarca 360^{o}, con lo que este ángulo recibe el nombre de \`completo'. Al ángulo de nido por media circunferencia se le denomina \`llano' y mide 180^{o}. La mitad de uno llano se llama \`recto' y mide 90^{o}.



Los ángulos menores que un recto se llaman agudos y los mayores obtusos. Dos ángulos se llaman \`complementarios' si suman 90 y \`suplementarios' si suman 180.

Es necesario saber también que un grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales denominadas \`minutos' y, a su vez, cada minuto se puede dividir en 60 partes iguales donde cada una de ellas recibe el nombre de \`segundo'.

Radianes: Un radián es el ángulo tal que el arco que este abarca mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por ***rad***.



Dado que el radián es la unidad de medida del Sistema Internacional, será necesario saber pasar de grados (la unidad que conocemos y manejamos) a radianes. Para ello existe la siguiente regla práctica:

Paso de grados a radianes:

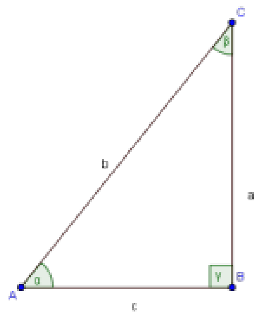
$$\alpha \; grados \; = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha$$

Paso de radianes a grados:

$$n \; rad = \frac{360}{2\pi} \cdot n$$

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Los vértices de un triángulo los representaremos con letras mayúsculas (A, B, C · · ·). El lado opuesto a cada vértice, lo representaremos con la letra minúscula correspondiente a la asignada al vértice opuesto (a, b, c · · ·).



Se definen las razones trigonométricas del ángulo α de la imagen como:

$$\sin\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{hipotenusa} \;\; = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \;\; contiguo}{hipotenusa} \;\; = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; contiguo} \;\; = \frac{a}{c} \;\; = \;\; sin \; \alpha / cos \; \alpha$$

Estas relaciones no son independientes unas de otras. Obtenemos así las denominadas relaciones fundamentales.

Relaciones fundementales:

$$sin^2 \; \alpha \; + \; cos^2 \; \alpha \; = \; 1$$

$$tan \; \alpha \; = \frac{sin \; \alpha}{cos \; \alpha}$$

$$tan2^2 \alpha \; + \; 1 \; = \frac{1}{cos^2 \alpha}$$

Además, es conveniente que conozcas las inversas de las funciones trigonométricas clásicas, pues lo más probable es que tengas que definirlas todas en cualquiera de los ejercicios.

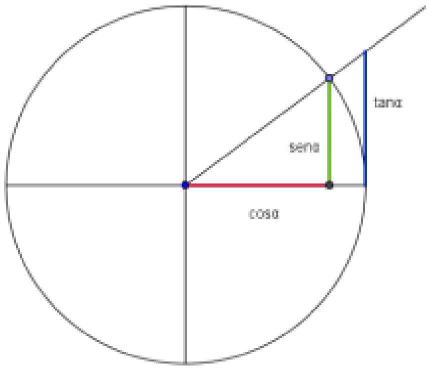
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$cosec\alpha \; = \frac{1}{\sin\alpha}$$

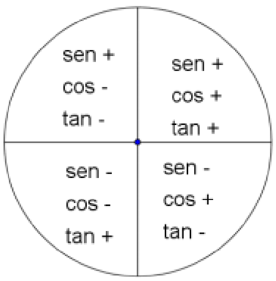
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

3. Circunferencia goniométrica y algunos ángulos importantes

Se llama `circunferencia goniométrica' a aquella que tiene por radio la unidad. Con una circunferencia goniométrica es posible dar un sentido muy intuitivo a todas las razones trigonométricas. Vamos a verlo mediante el siguiente dibujo:



Para poder medir ángulos en la circunferencia goniométrica, es conveniente considerar unos ejes cartesianos con origen el centro de la circunferencia, de modo que cada punto de la circunferencia tendrá unas coordenadas (x, y). Estos ejes coordenados dividen a la circunferencia en cuatro cuadrantes de 90º cada uno. Ahora bien, si unimos el centro de la circunferencia con cada punto concreto, obtenemos un radio de la misma que formará un ángulo α con respecto al eje horizontal. Por tanto, las coordenadas anteriores se transforman ahora en (x, y) = (cos α,sin α). De este modo, podemos calcular el seno y el coseno de cualquier ángulo. Eso sí, poniendo especial cuidado en los signos, pues dependiendo del cuadrante en el que se encuentren estos varía (basta con observar cómo serían las coordenadas si las buscásemos con los ejes coordenados).



3.1. Algunos ángulos importantes

Hay una serie de ángulos que se consideran importantes dao que aparecen con asiduidad en la resolución de triángulos. Estos ángulos son los de 30, 45 y 60. Para estos ángulos es conveniente conocer el valor de su seno, su coseno y su tangente.

Grados	30	45	60
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Son importantes también aquellos ángulos que coinciden con los ejes cartesianos (0, 90, 180, 270) porque en esos casos una de las dos coordenadas (x,y) se anula, lo que nos trae en consecuencia que alguna de las razones trigonométricas como la tangente, la secante, la cosecante o la cotangente no estén definidas (pues dividiríamos entre cero).

Grados	0	90	180	270
Radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Seno	0	1	0	-1
Coseno	1	0	-1	0
Tangente	0	∄	0	∄
Cotangente	∄	0	∄	0
Secante	1	∄	-1	∄
Cosecante	∄	1	∄	-1