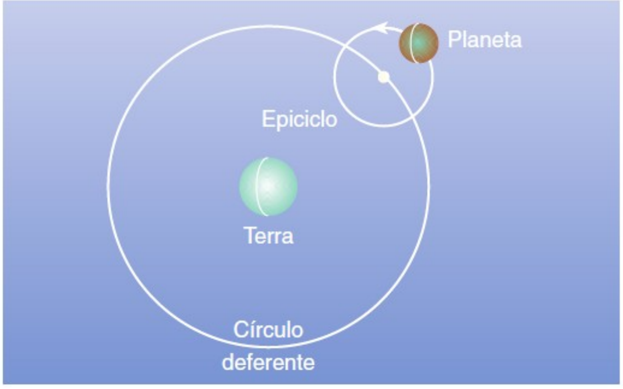
TEMA 4 CAMPO GRAVITATORIO

1. HISTORIA DE LA GRAVITACIÓN: LEYES DE KEPLER

Varias fueron las teorías que se sucedieron a lo largo del tiempo acerca del Sistema Solar. Así: Ptolomeo de Alejandría (100-170): El pensamiento griego de que el Sol y los planetas están describiendo órbitas circulares al redor de la Tierra, que permanece fija, fue modificado en el siglo II por Ptolomeo, suponiendo que los planetas se movían en un círculo, conocido como **epiciclo**, y el centro del epiciclo, a sa vez, se movía sobre un círculo más grande, conocido como **deferente**, que tenía por centro el centro de la Tierra. Esta teoría geocéntrica tuvo vigencia hasta el siglo XVI.



Copérnico (1473-1543): La Tierra y los demás planetas están girando al redor del Sol en órbitas circulares (igual que Ptolomeo, intercambiando la posición del Sol por la de la Tierra). Mantiene los epiciclos de Ptolomeo para los movimientos planetarios. Esta teoría estaba en contra de la Biblia por lo que su defensa tuvo serios problemas con la Iglesia romana.

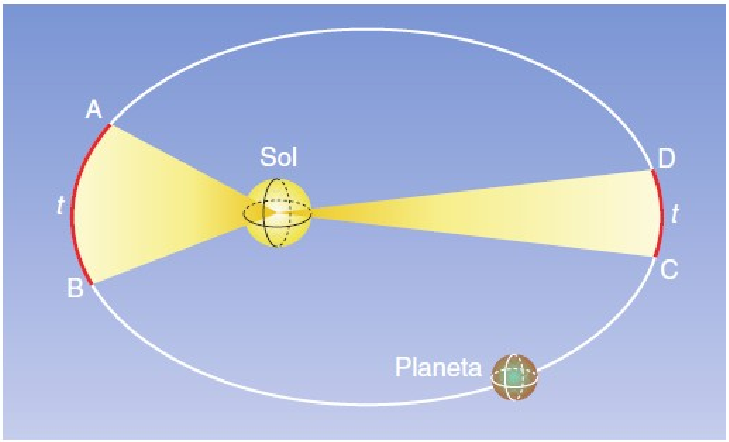
Tycho Brahe (1546-1601): Hace un gran número de medidas astronómicas con gran precisión que evidencian que el movimiento orbital de los planetas no es circular.

BRAHE-KEPLER https://www.youtube.com/watch?v=dvWn_c1cG4g

Kepler (1571-1630): Hace un gran número de medidas astronómicas y aprovecha las realizadas por Tycho Brahe, manteniendo la idea heliocéntrica de Copérnico con la salvedad de órbitas elípticas en lugar de circulares al redor del Sol. Además enunció de forma empírica (obtenidas experimentalmente) tres leyes, que explicaban esta configuración del sistema solar:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos de la elipse (año1609).

2. El vector de posición, también llamado radio vector, que une el centro del Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (año 1609). Esto significa que, si el tiempo que le lleva al planeta en ir de A a B es el mismo que el de ir de C a D, cuando el planeta está más cerca de Sol (**per**ihelio) va más deprisa que cuando está más alejado de el (**af**elio).

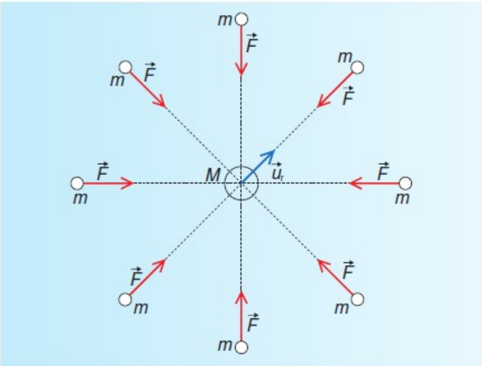


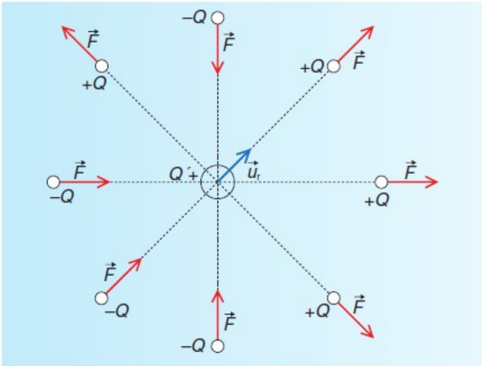
3. El cociente entre el cuadrado del tiempo que emplea un planeta en dar una vuelta completa al redor del Sol (período, *T*) y el cubo del semieje mayor de su órbita, *r*, es el mismo para todos los planetas: $T^2/r^3 = k$ (año 1619). Esto significa que los planetas más próximos al Sol se mueven más deprisa que los que están más alejados.
La tabla de períodos y radios orbitales de los planetas al redor del Sol confeccionada por Kepler, y que dio lugar a su tercera ley, no se diferenciaba mucho de la siguiente, que son los datos actuales:

PLANETA	**RADIO DE LA ÓRBITA (m)**	**PERÍODO ORBITAL (s)**
Mercurio	$5{,}79.10^{10}$	$7{,}60.10^{6}$
Venus	$1{,}08.10^{11}$	$1{,}94.10^{7}$
Tierra	$1{,}49.10^{11}$	$3{,}16.10^{7}$
Marte	$2{,}28.10^{11}$	$5{,}94.10^{7}$
Júpiter	$7{,}78.10^{11}$	$3{,}74.10^{8}$
Saturno	$1{,}43.10^{12}$	$9{,}29.10^{8}$
Urano	$2{,}87.10^{12}$	$2{,}64.10^{9}$
Neptuno	$4{,}50.10^{12}$	$5{,}17.10^{9}$

2. CAMPOS DE FUERZAS CENTRALES

Reciben el nombre de **fuerzas centrales** aquellas fuerzas de las que su línea de acción pasa siempre por un mismo punto fijo, llamado **centro de fuerzas**. La fuerza *F* y el vector de posición *r*, con respecto al centro de fuerzas, tienen la misma dirección. Las fuerzas de atracción gravitatoria debidas a una masa puntual y las fuerzas electrostáticas (atractivas o repulsivas), debidas a una carga puntual en reposo, constituyen ejemplos de este tipo de fuerzas.



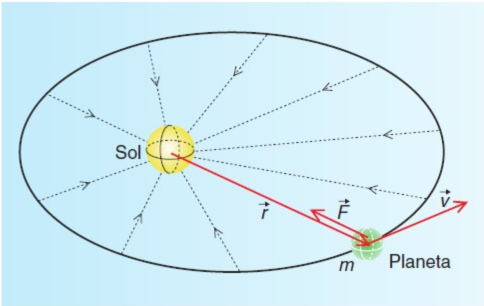


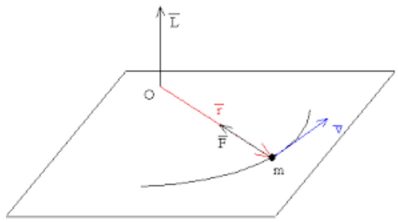
En ambos casos, ***F*** y ***r*** tienen la misma dirección, siendo sus sentidos iguales o opuestos, según la fuerza sea repulsiva o atractiva, respectivamente. El módulo de estas fuerzas no depende de su dirección, pero si de la distancia entre el centro origen de la fuerza y el punto sobre el que actúan. Son del tipo: $\boldsymbol{F} = f(r)\ .\ \boldsymbol{u}_r$.
En el caso de la fuerza gravitatoria y electrostática, su dependencia con la distancia es de la forma:

$F = K/r^2$

2.1. Conservación del momento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central

Comprobamos que el momento angular de una partícula de masa *m* que se mueve con una velocidad *v* debido a una fuerza central, con respecto al centro de fuerzas, es constante.





Se define el **momento angular**, también llamado **momento cinético**, de una partícula de masa *m*, que se mueve con una velocidad *v*, respecto a un punto O, como “el momento de la cantidad de movimiento con respecto a ese punto O. Esto es: el producto vectorial del vector de posición de la partícula con respecto a O, *r*, por la cantidad de movimiento, *p*, de la misma”:

L = **r** x **p** $\qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

siendo su ecuación de dimensiones: [L] = ML^2T^{-1} y sus unidades: $kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}$.

Derivamos la expresión del momento angular con respecto al tiempo, para estudiar cómo varía:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Sabiendo que d**r**/dt =**v** y que **p**=m.**v** multiplicamos vectores que tienen la misma dirección, por lo tanto el producto vectorial es 0

|**v** x m**v**| = v.mv.sen0 = 0

Sabiendo que d**p**/dt = **F** . Si la fuerza que actúa es central tiene la misma dirección y sentido contrario al vector de posición

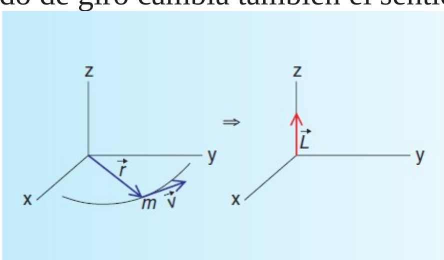
|**r** x **F**| = r.F.sen180 = 0

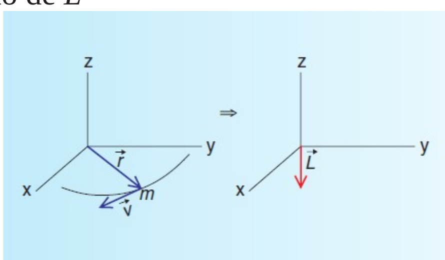
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

Las consecuencias que extraemos del hecho de que ***L*** *es* constante son:

• Dirección de ***L*** constante ⇒ La partícula (planeta) tiene una trayectoria plana, ya que sino *L* cambiaría de dirección al ser perpendicular al plano determinado por ***v*** y ***r***

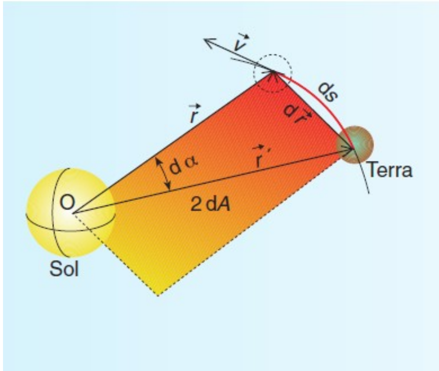
• Sentido de ***L*** constante ⇒ La partícula (planeta) gira siempre en el mismo sentido, ya que si cambia el sentido de giro cambia también el sentido de *L*





$|L|$ constante ⇒ Segunda lei de Kepler: Las áreas barridas por el radiovector que une el Sol con el planeta son iguales en tiempos iguales.

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores concurrentes es, numéricamente, igual al área del paralelogramo que determinan esos dos vectores, que es el doble del área que barre el radio vector:

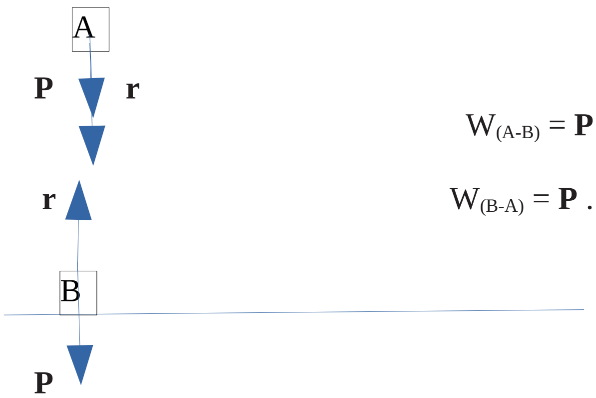


$$\left.\begin{array}{l} |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\,\vec{v}| \;\rightarrow\; \dfrac{L}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = \left|\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| \\ |\vec{r} \times d\vec{r}| = 2\,dA \end{array}\right\} \rightarrow \frac{L}{m} = \frac{2\,dA}{dt} \;\rightarrow\; \frac{L}{2\,m} = \frac{dA}{dt} = \text{constante}$$

2.2. Carácter conservativo de una fuerza central

Se dice que una fuerza es conservativa si el valor del trabajo que desenvuelve sobre un cuerpo, cuando se traslada entre dos puntos, es independiente del camino seguido, solo depende de la posición inicial y final. Esto supone que a lo largo de una línea cerrada (ciclo) el trabajo es nulo.

Son aquellas fuerzas que al realizar un trabajo en contra de ellas, este es totalmente recuperable. La fuerza gravitatoria es conservativa ya que el trabajo que hacemos para llevar un cuerpo de masa *m* desde B hasta A es recuperado cuando este vuelve hacia la Tierra.



$W_{(A\text{-}B)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = P.h.\cos 180$

$W_{(B\text{-}A)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = P.h.\cos 0$

3. FUERZA QUE ORIGINA EL CAMPO GRAVITATORIO: LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

“Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.”

https://www.youtube.com/watch?v=XRiI4-9DC8Y

Masas de los cuerpos en kg

Vector unitario.
Dirección: la de la recta que une los cuerpos.
Sentido: saliendo del cuerpo que se considera que atrae.

$$\vec{F} = -G\,\frac{mM}{d^2}\,\vec{u}_r$$

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los centros.

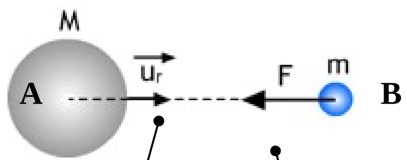
El signo menos, tal y como se define el vector unitario, garantiza que ***la fuerza es siempre atractiva.***

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.

Para el S.I:

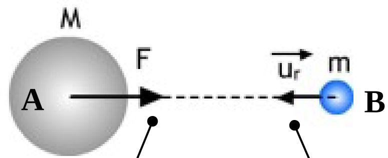
$$G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \frac{N\,m^2}{kg^2} = 6{,}67\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

Debido a la pequeñez de la constante de gravitación la fuerza de gravedad sólo es apreciable entre cuerpos cuya masa sea muy grande (planetas, estrellas…)



Vector unitario. Sale del cuerpo que se supone que atrae.

Fuerza con la que el cuerpo A atrae a B. Sentido contrario a u_r



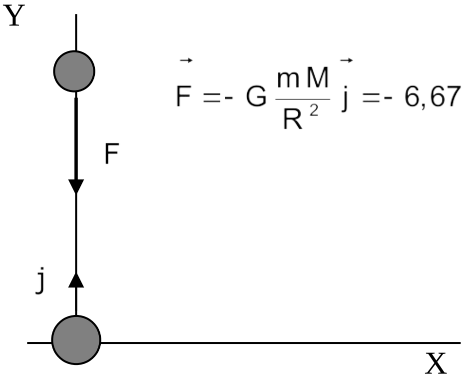
Fuerza con la que el cuerpo B atrae a A. Sentido contrario a u_r

Vector unitario. Sale del cuerpo que se supone que atrae.

Ejemplo 1

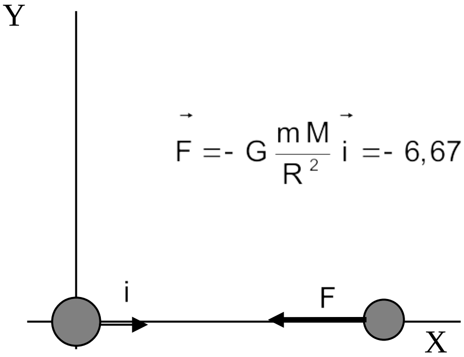
Una masa de 5,2 10^{13} kg se supone que está situada en el origen de coordenadas.
Calcular la fuerza de atracción ejercida sobre otra de 3,5 10^{6} kg situada a 10 km de distancia en el eje y.
Repetir el cálculo suponiendo que ahora la masa se sitúa sobre el eje x

Solución



$$\vec{F} = -G\frac{m\,M}{R^2}\vec{j} = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5{,}2\;\;10^{13}\,\cancel{kg}\;3{,}5\,10^{6}\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\;\cancel{m^2}}\vec{j} = -\;121{,}4\,\vec{j}\,(N)$$

La fuerza tiene un módulo de 121,4 N y apunta en sentido contario al vector unitario j. Esto es hacia abajo (atracción)



$$\vec{F} = -G\frac{m\,M}{R^2}\vec{i} = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5{,}2\;\;10^{13}\,\cancel{kg}\;3{,}5\,10^{6}\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\;\cancel{m^2}}\vec{i} = -\;121{,}4\;\vec{i}\,(N)$$

La fuerza tiene el mismo módulo, pero ahora apunta en sentido contrario al vector unitario **i**. Esto es hacia la izquierda (atracción)

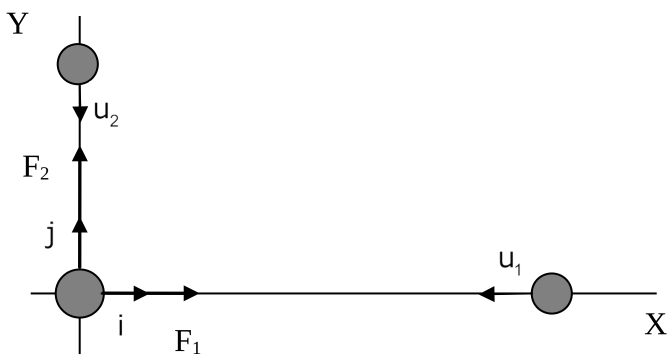
> ***La fuerza que una masa ejerce sobre otra no se ve afectada por la presencia de una tercera masa.*** Cada una de ellas atrae a la masa considerada superponiéndose ambas fuerzas. ***La fuerza resultante sobre la masa es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas*** **(Principio de Superposición).**

Ejemplo 2

Una masa de 3,2 10^{13} kg está en el origen de coordenadas, otra de 5,4 10^{6} kg se sitúa a 5 km de distancia en el eje y una tercera de 4,6 10^{7} kg sobre el eje X a una distancia de 10 km.

Calcular la fuerza resultante actuante sobre la masa situada en el origen de coordenadas.

Solución



La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje X, vale:

$$\vec{F}_1 = - G\,\frac{m_1\,M}{d_1^2}\left(\vec{u}_1\right) = - 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3{,}2\;10^{13}\,\cancel{kg}\;4{,}6\,10^{7}\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\cancel{m^2}}\left(-\vec{i}\right) = 981{,}8\;\vec{i}\;(N)$$

La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje Y, vale:

$$\vec{F}_2 = - G\,\frac{m_2\,M}{d_2^2}\left(\vec{u}_2\right) = - 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3{,}2\;10^{13}\,\cancel{kg}\;5{,}4\,10^{6}\;\cancel{kg}}{(5\,10^3)^2\;\cancel{m^2}}\left(-\vec{j}\right) = 461{,}0\,\vec{j}\;(N)$$

La fuerza resultante será:

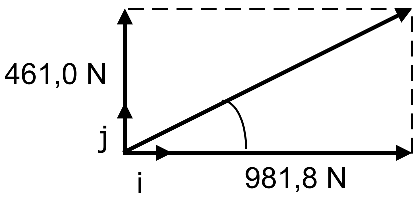
$$F = F_1 + F_2 = 981{,}8\;i + 461{,}0\;j$$

Módulo:

$$F = 981{,}8\;i + 461{,}0\;j$$

$$F = \sqrt{981{,}8^2 + 461{,}0^2}\;N = 1\,084{,}6\;N$$

Ángulo formado con el eje X



$$tg\,\alpha = \frac{461{,}0}{981{,}8} = 0{,}4695\;;\;\alpha = 25{,}2^0$$

4. INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO

La Ley de Gravitación Universal presentaba una importante laguna, y es no que no da una explicación de la forma en la que las masas ejercen su mutua influencia, ya que interactúan sin existir contacto físico entre ellas, mediante lo que Newton calificó como *"acción a distancia"* idea que, incluso a él, no le resultaba apropiada:

> *"Es inconcebible que la materia bruta e inanimada pueda, sin mediación de algo más que sea material, operar en otra materia y afectarla sin que se produzca un contacto mutuo. La gravedad tiene que provocarla un agente que actúe de manera constante según ciertas leyes"*

El posterior desenvolvimiento de la Física mostró que la acción a distancia llevaba a serias contradicciones. Para resolverlas se estableció ***el concepto de campo.***

Imaginemos una zona del espacio en la que no exista ninguna masa. Si introducimos una pequeña masa puntual m (*masa de prueba*) no se detectará acción alguna sobre ella.

Si ahora colocamos una masa M, su presencia ***modificará las propiedades del espacio circundante*** y si volvemos a introducir la masa de prueba, ésta acusará la existencia de una acción (fuerza) sobre ella que tiende a aproximarla a la masa M.

Se dice que la masa M crea un campo gravitatorio a su alrededor que actúa sobre la masa de prueba. De esta manera la acción deja de ejercerse a distancia siendo el campo el responsable de la acción ejercida sobre la masa de prueba.

El campo juega el papel de mediador en la interacción gravitatoria que Newton reclamaba.

***El* campo gravitatorio terrestre**, como todo campo de fuerzas, viene determinado por tres elementos que lo definen, que son:

• La intensidad.
• El potencial.
• Las líneas de fuerza –que nos permiten visualizarlo–.

La intensidad del campo gravitatorio en un punto como la fuerza ejercida sobre la unidad de masa colocada en ese punto:

Fuerza

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

Intensidad del campo gravitatorio

Masa de prueba

La intensidad del campo gravitatorio en un punto (o simplemente campo gravitatorio) es un vector que tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de atracción gravitatoria entre las masas y tiene dimensiones de aceleración.

$$[g] = \frac{[M\,L\,T^{-2}]}{[M]} = [L\,T^{-2}]$$

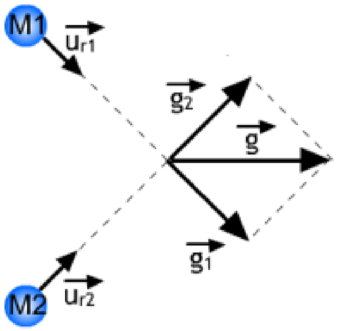
Unidades S.I: N/kg = m/s^2

Teniendo en cuenta la expresión de la fuerza de atracción gravitatoria podemos obtener la intensidad del campo gravitatorio en un punto en función de la masa, M, que crea el campo y la distancia:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{m\,M}{r^2}\vec{u}_r}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r}$$

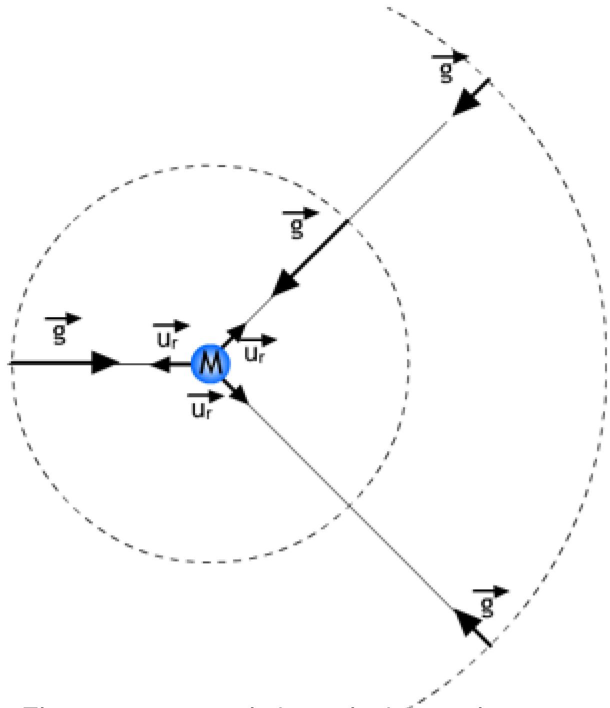
El vector unitario $\boldsymbol{u_r}$ se define, tal y como se hizo a la hora de definir la fuerza de atracción gravitatoria.



Si en las proximidades de un punto se localiza más de una masa, el campo gravitatorio en el punto considerado es el resultado de sumar (vectorialmente) cada uno de los campos individuales creados por las masas (Principio de Superposición).

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \cdots$$

- Como se puede observar la intensidad de campo, así definida, ***establece un vector*** (y sólo uno) para cada uno de los puntos del espacio. El campo gravitatorio es un ***campo vectorial***
- El valor del campo gravitatorio (módulo) en un punto ***es independiente de la masa de prueba*** y depende sólo de la masa que crea el campo y la distancia a la que esté el punto considerado.
- Todos los puntos que estén a una misma distancia de la masa central ***tendrán un mismo valor*** para la intensidad de campo.
- ***La distancia se toma siempre desde el centro de la masa***. Esto es, se considera la totalidad de la masa situada en su centro (masa puntual)
- La intensidad del campo gravitatorio ***decrece rápidamente con la distancia,*** ya que es ***inversamente proporcional a su cuadrado.***



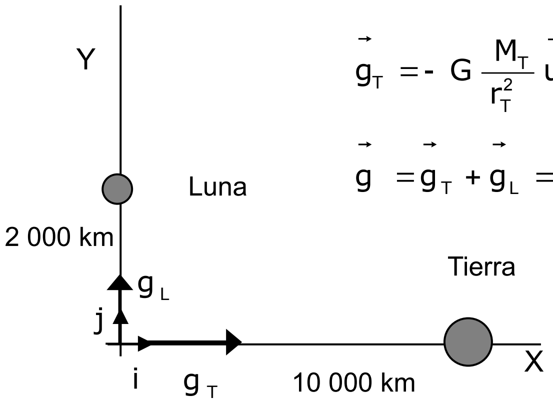
El campo es central, tiene el mismo valor para puntos situados a igual distancia y disminuye rápidamente al alejarse de la masa.

- El signo menos de la ecuación de definición garantiza que ***el campo es central*** (dirigido siempre hacia la masa que crea el campo)

EJEMPLO 3.- Calcular el campo gravitatorio creado en un punto del espacio a 2 000 km de la Luna y a 10 000 km de la Tierra cuando ambas se encuentran en cuadratura (formando un ángulo de 90^0, ver esquema)

DATOS: M_{Tierra}: $5,97\ 10^{24}$ kg $M_{\text{Luna}} = 7,35\ 10^{22}$ kg

Solución



$$\vec{g}_L = -G\frac{M_L}{r_L^2}\vec{u}_{rL} = -6,67\ 10-11\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\ s^2}\frac{7,35\ 10^{22}\ \cancel{kg}}{(2\ 10^6)^2\ \cancel{m^2}}(-\vec{j}) = 1,23\vec{j}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

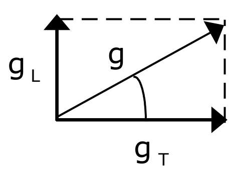
$$\vec{g}_T = -G\frac{M_T}{r_T^2}\vec{u}_{rT} = -6,67\ 10-11\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\ s^2}\frac{5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{(10^7)^2\ \cancel{m^2}}(-\vec{i}) = 3,98\vec{i}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = 3,98\vec{i} + 1,23\vec{j}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

El módulo valdrá:

$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = 3,98\vec{i} + 1,23\vec{j}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$g = \sqrt{(3,98^2 + 1,23^2)\left(\frac{m}{s^2}\right)^2} = 4,17\ \frac{m}{s^2}$$



Ángulo con el eje X:

$$tg\ \alpha = \frac{g_L}{g_T} = \frac{1,23}{3,98} = 0,3090 \quad ; \quad \alpha = 17,2^0$$

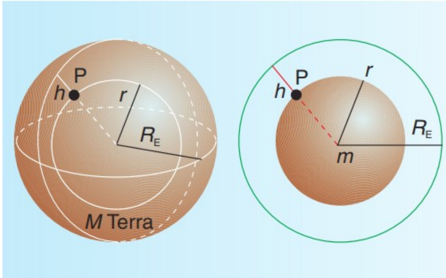
5.- VARIACIÓN DE g CON LA DISTANCIA AL CENTRO DE LA TIERRA Y CON LA LATITUD.

Variación de g con la distancia al centro de la Tierra. $g = G.m/r^2$

Supongamos un punto P en el interior de la Tierra, a una profundidad h con respecto a su superficie. La intensidad de campo gravitatorio en el punto P viene dada por la expresión: $g= G.m/r^2$, siendo m la masa de la esfera que, teniendo por centro el de la Tierra, pasa por el punto donde queremos calcular g. Para saber cómo varía el valor de g con r, debemos poner la masa en función de r usando la densidad:

$m= d.\ V = d.4/3\ pr^3 \rightarrow g= G.d.4/3pr^3\ /r^2 = cte.r$

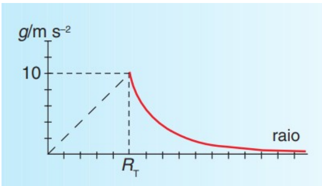
El valor de g, para puntos interiores de la Tierra, aumenta de forma directamente proporcional con el valor de r.



Para un punto P de la superficie de la Tierra, r coincide con el radio de esta y g toma el valor máximo.

Si el punto P está a una altura h sobre la superficie de la Tierra, el valor de la expresión de g es: $g = G.M/r^2$

donde M es la masa de la Tierra y r la distancia desde su centro hasta el punto donde calculamos el valor de g. Es decir que g es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, en consecuencias la representación gráfica de g fentre a la distancia al centro de la Tierra es:



Variación de g con la latitud

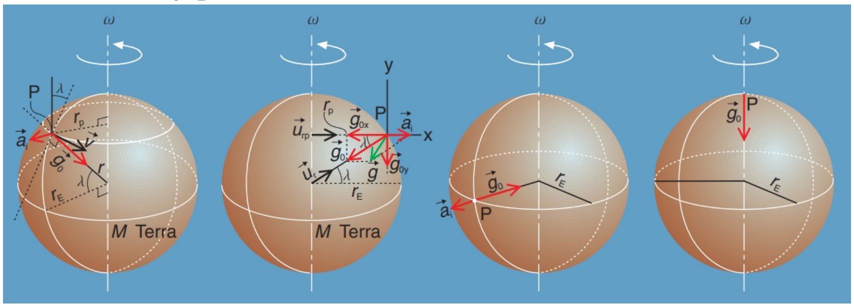
El valor de g varía con la latitud: el radio de la Tierra disminuye a medida que vamos del Ecuador hacia los polos e, además, la Tierra rota con una velocidad v, que es constante en módulo pero no en dirección, apareciendo una aceleración normal.

La aceleración resultante sobre un cuerpo de masa m que rota solidariamente con la Tierra será:

$\mathbf{g} = \mathbf{g_0} + \mathbf{a_i}$

$$\vec{a}_{\text{total}} = -\frac{G\,M}{r^2}\vec{u}_r + \frac{4\pi^2}{T^2} r_p\, \vec{u}_{rp}$$

Para un obervador que viaja con el cuerpo (sistema no inercial) además de la fuerza de la gravedad actúa la fuerza de inercia y por lo tanto habrá aceleración de inercia.



Para un objeto situado en el punto P de latitud l , descomponemos go en las direcciones de a y en otra perpendicular:

$$\vec{g}_0 = -G\frac{M}{r^2}\cos\lambda\,\vec{i} - G\frac{M}{r^2}\operatorname{sen}\lambda\,\vec{j}$$

También escribimos a_i en función del radio de la Tierra :

$$\vec{a}_i = \frac{4\pi^2}{T^2} r_p\,\vec{u}_{rp} = \frac{4\pi^2}{T^2} r\cos\lambda\,\vec{i}$$

La aceleración total en función de la latitud l vale

$$\vec{g}_{total} = \vec{g} = \left(-G\frac{M}{r^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} r\right)\cos\lambda\,\vec{i} - G\frac{M}{r^2}\operatorname{sen}\lambda\,\vec{j}$$

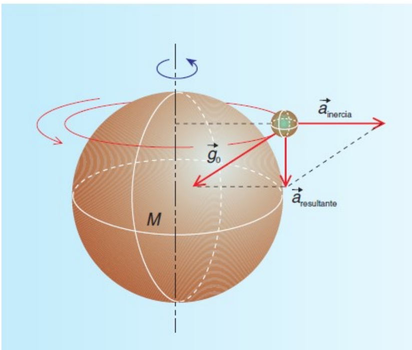
Para un punto de Ecuador, ángulo 0º, resulta:

$$\vec{g}_{ecuador} = \left(-G\frac{M}{r^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} r\right)\cos 0^\circ\,\vec{i} - G\frac{M}{r^2}\operatorname{sen}0^\circ\,\vec{j} = (-g_0 + a_i)\,\vec{i}$$

Para el Polo, el ángulo de 90º

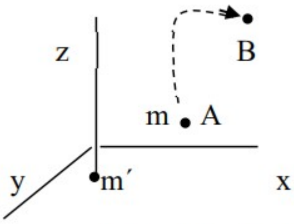
$$\vec{g}_{polo} = \left(-G\frac{M}{r^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} r\right)\cos 90^\circ\,\vec{i} - G\frac{M}{r^2}\operatorname{sen}90^\circ\,\vec{j} = -g_0\,\vec{j}$$

Resulta que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es máxima en lo polos y va disminuyendo hacia el Ecuador. Por eso se define el valor de g al nivel del mar y a 45º de latitud.



6.- ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA Y POTENCIAL GRAVITATORIO

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa por lo que cada masa, m, sobre la que actúe una fuerza gravitatoria ejercida por otra masa, m´, presentará una energía potencial gravitatoria. Para determinar el valor de dicha energía potencial gravitatoria utilizaremos el teorema de la energía potencial. Consideraremos el trabajo que hay que realizar para desplazar m desde A hasta B. La trayectoria seguida puede ser cualquiera pues, como la fuerza es conservativa, el trabajo sólo dependerá de las posiciones inicial (A) y final (B)



$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B$$

$$W_A^B = -\Delta Ep$$

Denominaremos r_A y r_B a las distancias desde m´ hasta A y B respectivamente.

$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B$$

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -G \cdot m \cdot m' \int_{r_A}^{r_B} \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{r}}{r^2} = -G \cdot m \cdot m' \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -G \cdot m \cdot m' \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) =$$

$$= -G\frac{m \cdot m'}{r_A} - (-G\frac{m \cdot m'}{r_B}) = Ep_A - Ep_B$$

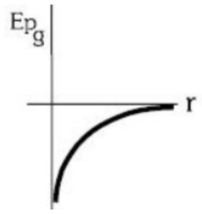
$$\boxed{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{dr} = 1 \cdot dr \cdot \cos 0^{o} = dr}$$

Si consideramos el origen de energías potenciales gravitatorias en el infinito respeto a m´, y suponemos que B es un punto situado en el infinito, la energía potencial gravitatoria en B será nula y tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} r_{B\to\infty} \\ \\ Ep_B = 0 \end{array}\right\} W_A{}^B = W_A{}^\infty = -G\frac{m \cdot m'}{r_A} - \left(-G\frac{m \cdot m'}{r_B}\right) = -G\frac{m \cdot m'}{r_A} - 0 = -G\frac{m \cdot m'}{r_A} = Ep_A - \cancelto{0}{Ep_B}$$

Podemos definir la energía potencial gravitatoria de la masa m en un punto A como el trabajo que realiza el campo gravitatorio para llevar dicha masa desde A hasta el infinito y su valor se determinará con la expresión:

$$\boxed{Ep_A = -G\frac{m \cdot m'}{r_A}}$$



El signo menos es debido a que la energía potencial en el infinito es cero, a medida que nos aproximamos al centro del campo la energía potencial disminuye (aumenta en valor negativo)

La energía potencial puede ser positiva o negativa: depende del origen del sistema de referencia que se considere. Así, cuando utilizamos la expresión Ep =m· g·h para puntos situados en la superficie de la Tierra, la energía potencial tiene un valor positivo. Por el contrario, con la expresión

Ep = –G·M·m/r, le corresponde un valor negativo y supone su origen en puntos infinitamente alejados de la superficie de la Tierra.
Pero las dos expresiones conducen al mismo resultado: si un cuerpo se aleja de la Tierra su energía potencial aumenta (al aumentar r, el cociente G·M·m/r disminuye y, por lo tanto, –G·M·m/r aumenta).

Expresión del Principio de conservación de la Energía mecánica de forma general cuando sólo actúan fuerzas gravitatorias :

$Em = Ec + Ep = 1/2mv^2 + (-GM.m/r)$

POTENCIAL GRAVITATORIO

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. En consecuencia, a toda masa situada en su seno se le puede asignar una energía potencial. Basándonos en este hecho se puede definir una nueva magnitud (característica de los campos conservativos) denominada ***potencial gravitatorio, V:***

Potencial gravitatorio

$$\boxed{V = \frac{E_P}{m}}$$

Energía potencial

Masa colocada en el campo

El potencial gravitatorio se define, por tanto, como la energía potencial por unidad de masa colocada en el campo

El potencial gravitatorio es un número (escalar) que se puede asignar a cada uno de los puntos del campo, siendo su valor:

$$V = \frac{E_P}{m} = \frac{-G\frac{m\,M}{r}}{m} = -G\frac{M}{r}$$

$$\boxed{V = -G\frac{M}{r}}$$

Si existe mas de una masa el potencial gravitatorio en un punto es la suma de los potenciales debidos a cada una de las masas (Principio de Superposición): $\boldsymbol{V_{TOT} = V_1 + V_2 + V_3 \ldots}$

Como se puede ver el valor del potencial gravitatorio sólo depende de la masa que crea el campo y de la distancia al punto considerado y es siempre negativo, ya que su valor cero (al igual que el de la energía potencial) se sitúa a una distancia infinita del centro de la masa que crea el campo.

Dimensionalmente:

$$[V] = \frac{[M\,L^2\,T^{-2}]}{[M]} = [L^2\,T^{-2}]$$

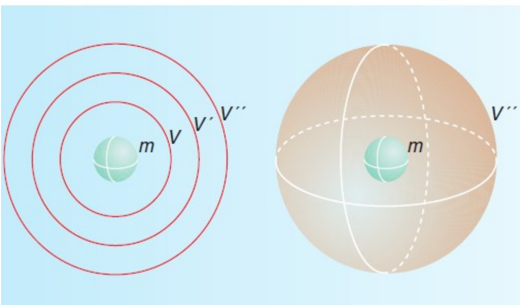
Unidades S.I: J/kg = m^2/s^2

Al igual que sucedía en el caso del campo gravitatorio es importante distinguir entre el potencial gravitatorio (V) y la energía potencial de una masa colocada en su seno. Ésta depende del valor de la masa y se puede obtener fácilmente si se conoce el valor del potencial gravitatorio:

$$\boxed{Ep = m\,V}$$

Como se deduce de la ecuación que permite calcular el potencial gravitatorio en un punto, todos los puntos situados a una misma distancia (r) de la masa que crea el campo tendrán idéntico potencial. Si se unen con una línea todos estos puntos obtendremos circunferencias centradas en la masa que cumplen la condición de que todos sus puntos se encuentran al mismo potencial. Por esta razón reciben el nombre de ***líneas (o superficies, en tres dimensiones) equipotenciales.***

La superficie de las esferas, que tienen por centro la masa puntual *m*, son superficies equipotenciales del campo gravitatorio de *m*.



De todo lo dicho se deduce que el trabajo realizado por la fuerza del campo (gravedad) para llevar una masa ***m*** desde un punto ***1*** hasta otro ***2*** se puede calcular (fuerza conservativa) por diferencia entre las respectivas energías potenciales:

$$W_{cons} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = m\,V_1 - m\,V_2 = m\,(V_1 - V_2)$$

Si nos movemos a lo largo de una línea equipotencial ($V_2=V_1$) el trabajo realizado será nulo. La fuerza de gravedad no realiza trabajo alguno, o lo que es equivalente, no se requiere aporte alguno de energía para trasladar una masa a lo largo de una línea equipotencial, de lo que se deduce que ***la fuerza gravitatoria debe de ser perpendicular a la línea equipotencial.***

7. RELACIÓN ENTRE LA INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO Y EL POTENCIAL

El trabajo desenvuelto por la fuerza gravitatoria lo podemos relacionar con la variación de la energía potencial:

$$\left.\begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ W_A^B &= -\Delta E_p = -\left(E_{p\,B} - E_{p\,A}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = -\left(E_{p\,B} - E_{p\,A}\right)$$

Si dividimos esta expresión por la masa m de prueba resulta:

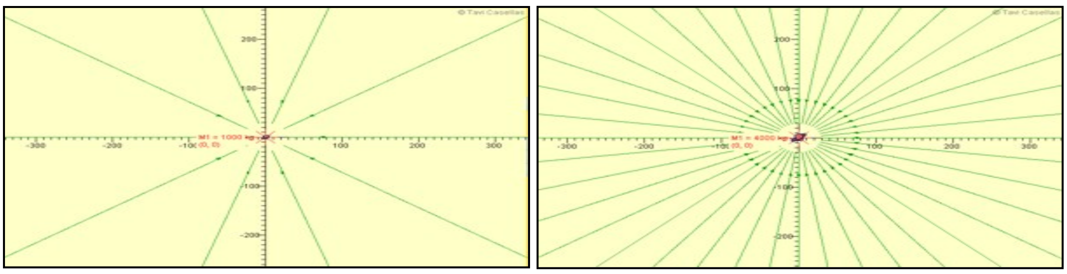
$$\left.\begin{aligned} &\int_A^B \frac{\vec{F}}{m}\cdot d\vec{r} = -\frac{\Delta E_p}{m} \\ &\frac{\vec{F}}{m} = \vec{g} \\ &\frac{\Delta E_p}{m} = \Delta V \end{aligned}\right\} \rightarrow \int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r} = -\Delta V, \text{ podendo expresarse en forma diferencial como:}$$

$$\vec{g}\cdot d\vec{r} = -dV \rightarrow dV = -\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

8.- LÍNEAS DE FUERZA DEL CAMPO GRAVITATORIO. CONCEPTO DE FLUJO

Con el fin de visualizar el campo se recurre a dibujar las llamadas **"líneas de campo o líneas de fuerza"** que cumplen la condición de que ***el vector campo es siempre tangente*** en cualquiera de sus puntos y se trazan de modo que ***su densidad sea proporcional a la intensidad del campo***.

- Para una única masa las líneas de campo son radiales y siempre convergen hacia la masa. Se dice que las masas constituyen "sumideros de campo".
- Las líneas de fuerza representan las trayectorias que seguiría una masa situada en el campo

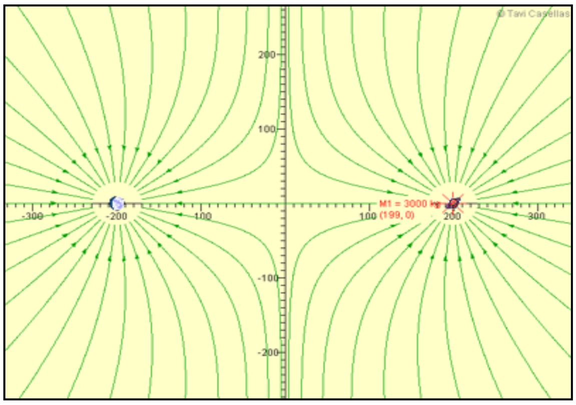


Izquierda: líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por un objeto de 1 000 kg.
Derecha: líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por un objeto de 4 000 kg

En ambos casos las líneas de campo son radiales y entran hacia la masa. La mayor densidad de líneas en el segundo caso (líneas mucho más juntas) representan un campo gravitatorio más intenso

Captura de pantalla de ***FisLab.net.*** Autor: **Tavi Casellas**
(http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/gravita/appletsol2.htm)

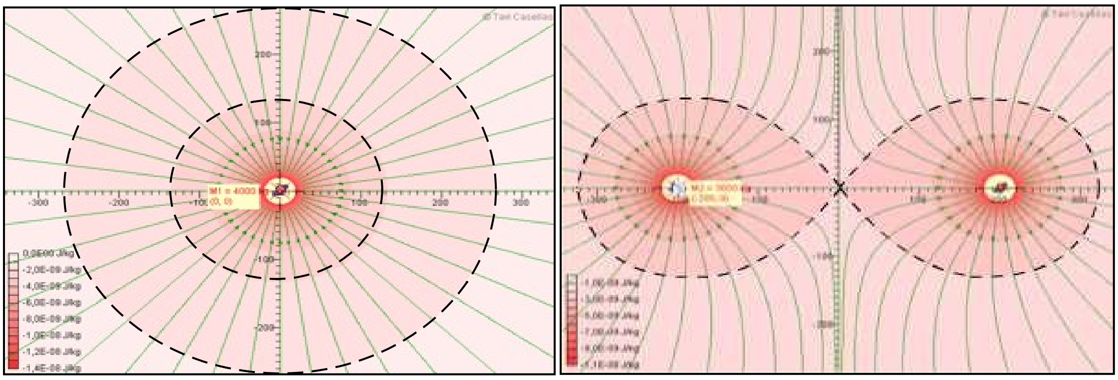
- Si hay más de una masa el campo se distorsiona debido a la superposición de ambos campos (en cada punto el campo resultante es la suma vectorial de los campos debidos a cada una de las masas). En la captura de pantalla se muestra el campo resultante para dos masas iguales (3 000 kg)



Captura de pantalla de FisLab.net. Autor: **Tavi Casellas**
http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/gravita/appletsol2.htm

La líneas (o superficies) equipotenciales, tal y como se ha dicho, son siempre perpendiculares al vector campo y cuando una masa se desplaza a lo largo de ellas la fuerza de gravedad no realiza trabajo alguno o, lo que es equivalente, no se requiere aporte alguno de energía para trasladar la masa.

Para una masa única las líneas equipotenciales son circunferencias centradas en la masa.



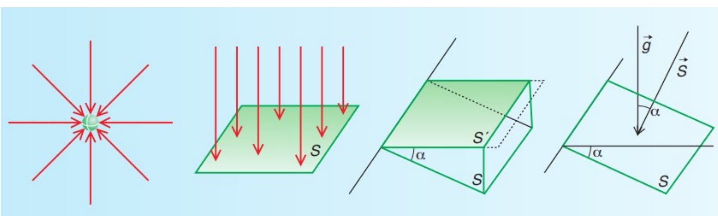
Izquierda: líneas equipotenciales (de puntos) del campo gravitatorio de una sola masa.
Derecha: línea equipotencial (de puntos) del campo gravitatorio creado por dos masas iguales

Captura de pantalla (modificada) de ***FisLab.net.*** Autor: **Tavi Casellas**
(http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/gravita/appletsol2.htm)

Se denomina **flujo (** Φ **)** al número de líneas de campo que atraviesan una superficie considerada:

$\Phi = g.S´$

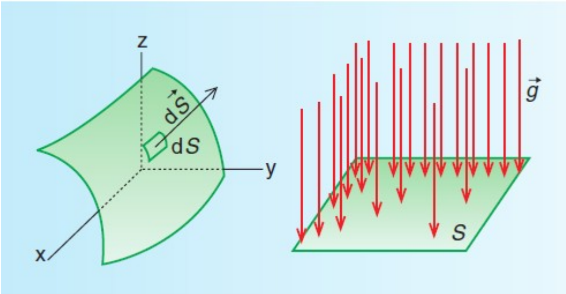
siendo g la intensidad del campo gravitatorio y S´a la superficie eficaz, es decir, la superficie que le corresponde a S en la dirección perpendicular a las líneas de campo: $\Phi = \mathbf{g}.\mathbf{S} = g.s.\cos a$



Si el campo no es uniforme, la intensidad en cada punto de la superficie no es la misma. En este caso, para calcular el flujo total, dividimos la superficie en elementos de superficie, d S , de modo que en cada uno de ellos sea uniforme. El flujo elemental es:

$$d\Phi = \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{S}$$

donde dS *es* un vector perpendicular al elemento de superficie, que tiene por módulo su área.

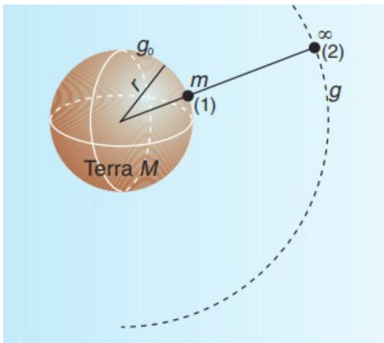


9.- SATÉLITES ARTIFICIALES.

Velocidad de escape. Es la velocidad mínima necesaria que se tiene que dar a un cuerpo para que éste se escape del campo gravitatorio de un planeta (en nuestro caso la Tierra).

En el punto 1 de la superficie terrestre el cuerpo posee energía potencial gravitatoria y energía cinética, que le será comunicada al lanzarlo con la velocidad que queremos determinar. El cuerpo debe alcanzar el punto 2 en el que quede fuera de la acción del campo gravitatorio terrestre (FT,c = 0). En dicho punto el cuerpo no tendrá energía potencial gravitatoria y como mínimo debe llegar a él con velocidad nula. Por lo tanto en 2 el cuerpo no tendrá energía mecánica.

$$E_{m_1} = E_{m_2}$$
$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r}\right) = 0 + 0$$
$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{G\,M\,m}{r} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} = v_{\text{escape}}$$



Donde r es el radio terrestre, M la masa de la tierra y G la constante de gravitación universal. En función de g0 (gravedad en la superficie terrestre)

La velocidad de escape no depende de la masa del cuerpo que se lanza.

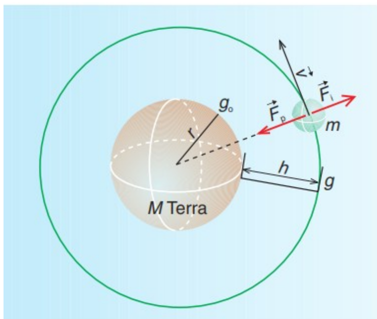
$$\left.\begin{aligned} v_e &= \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} \\ g_0 &= \frac{G\,M}{r^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow v_e = \sqrt{2\,g_0\,r}$$

Velocidad orbital o velocidad de giro

Consideraremos un satélite que orbita alrededor de la Tierra. Entre todas las órbitas posibles, la más sencilla es la órbita circular y esta será la que consideraremos. Supondremos un satélite con movimiento circular uniforme, siendo v el módulo de su velocidad y r el radio de la órbita, medido desde el centro de la Tierra

La única fuerza que actúa sobre el satélite en estas condiciones es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra. Dicha fuerza actuará como fuerza centrípeta:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0}$$
$$F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h}$$
$$v = \sqrt{g(r+h)} = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)^2}(r+h)} = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$



Periodo de revolución de un satélite: T = 2p/w .

v = w r

Energía de enlace de un satélite:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\, v_{xiro}^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r+h}\right) = \frac{1}{2} m \frac{G\,M}{(r+h)} - \frac{G\,M\,m}{(r+h)} = -\frac{G\,M\,m}{2\,(r+h)}$$

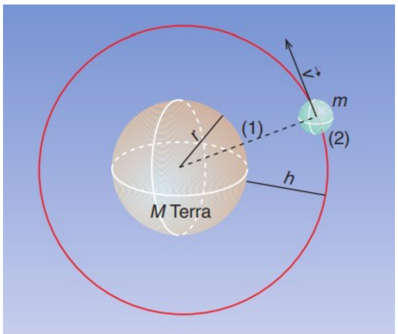
Energía de puesta en órbita

Para poner un satélite en órbita:

1º.- Hay que subir el satélite hasta la órbita

2º.- Hay que darle al satélite una velocidad que iguale a la velocidad orbital correspondiente.

Para poner el satélite en órbita se debe realizar el trabajo necesario para suministrar el incremento de energía mecánica que experimentará el satélite al pasar desde la superficie terrestre (1) hasta un punto de la órbita (2), con la velocidad adecuada (velocidad orbital)



$$E_{m_1} = E_{m_2} \rightarrow E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$$

$$E_{necesaria} + \left(-\frac{G\,M\,m}{r}\right) = \frac{1}{2} m\, v_{xiro}^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r+h}\right)$$

$$E_{necesaria} = -\frac{G\,M\,m}{r+h} - \left(-\frac{G\,M\,m}{r}\right) + \frac{1}{2}\frac{m\,G\,M}{r+h} =$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{r+h} + \frac{G\,M\,m}{r}$$

Un satélite se llama **geoestacionario** cuando se encuentra siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Su período de revolución coincide con el de la Tierra, T=24 h. Las órbitas geoestacionarias generalmente son órbitas ecuatoriales.

INGRAVIDEZ

Se denomina ingravidez a la ausencia de gravedad, es decir, a la ausencia de campo gravitatorio.

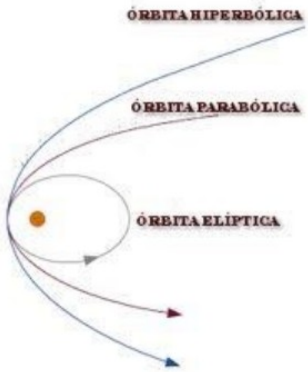
La ingravidez se alcanzaría teóricamente en el infinito. En la práctica se alcanzaría en aquellas zonas donde el campo sea lo suficientemente débil como para no apreciarse.

Pero, ¿es esto lo que les ocurre a los astronautas en la Estación Espacial Internacional (ISS) o en los transbordadores espaciales? La respuesta es que no, puesto que estos ingenios están muy cerca de la tierra, a menos de 500 Km de altura, y allí la gravedad, como fácilmente puedes comprobar, es sólo algo inferior a g0 = 9,8 m/s2 . Entonces, ¿qué es lo que sucede para que los astronautas estén flotando en el aire? Lo que sucede es que los astronautas se encuentran, al igual que sus naves, en movimiento circular alrededor de la tierra, y la fuerza gravitatoria (su peso) se está empleando en proporcionarles la aceleración centrípeta que necesitan para mantenerse en órbita. Esto produce una pérdida aparente de peso similar a lo que ocurre en un ascensor cuando inicia la bajada o se descuelga, ó cuando salta al vacío un paracaidista antes de abrir su paracaídas. Por tanto se trata de es una ingravidez aparente que aparece siempre que se esté en caída libre.

b) **<u>Tipos de órbitas según la E_{Total} o Em de un cuerpo.</u>**

$$E_{Total} = Em = -\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r} = -\frac{1}{2}m' g_0 \frac{r_T^2}{r_T + h}$$

$$r = r_T + h$$



a) $E_{Total} < 0$ El satélite se mantiene en la órbita:

a-1) $E_{Total} = -\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r}$ la trayectoria es una circunsferencia

a-2) $-\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r} < E_{Total} < 0$ la trayectoria es una elipse exterior de la órbita circular. El origen de las fuerzas está en uno de sus focos.

a-3) $E_{Total} \leq -\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r}$ la órbita es una elipse interior con el centro de las fuerzas en el otro foco.

b) $E_{Total} = 0$ la órbita es una parábola (velocidad de fuga)

c) $E_{Total} > 0$ la órbita es una hipérbola, al superar la energía total el satélite escapa del campo gravitatorio y todavía le sobra energía.

Los satélites permanecen en sus órbitas en el primer caso (a); el segundo caso es para la velocidad de fuga, en el que en el infinito, la velocidad del cuerpo es 0, (b); el tercer caso es también para una velocidad de fuga, pero la velocidad en el infinito no es cero, sino que el cuerpo lleva una velocidad extra o supletoria (c).

FUENTES: FÍSICA. 2º BACHARELATO BAÍA
FISQUIWEB