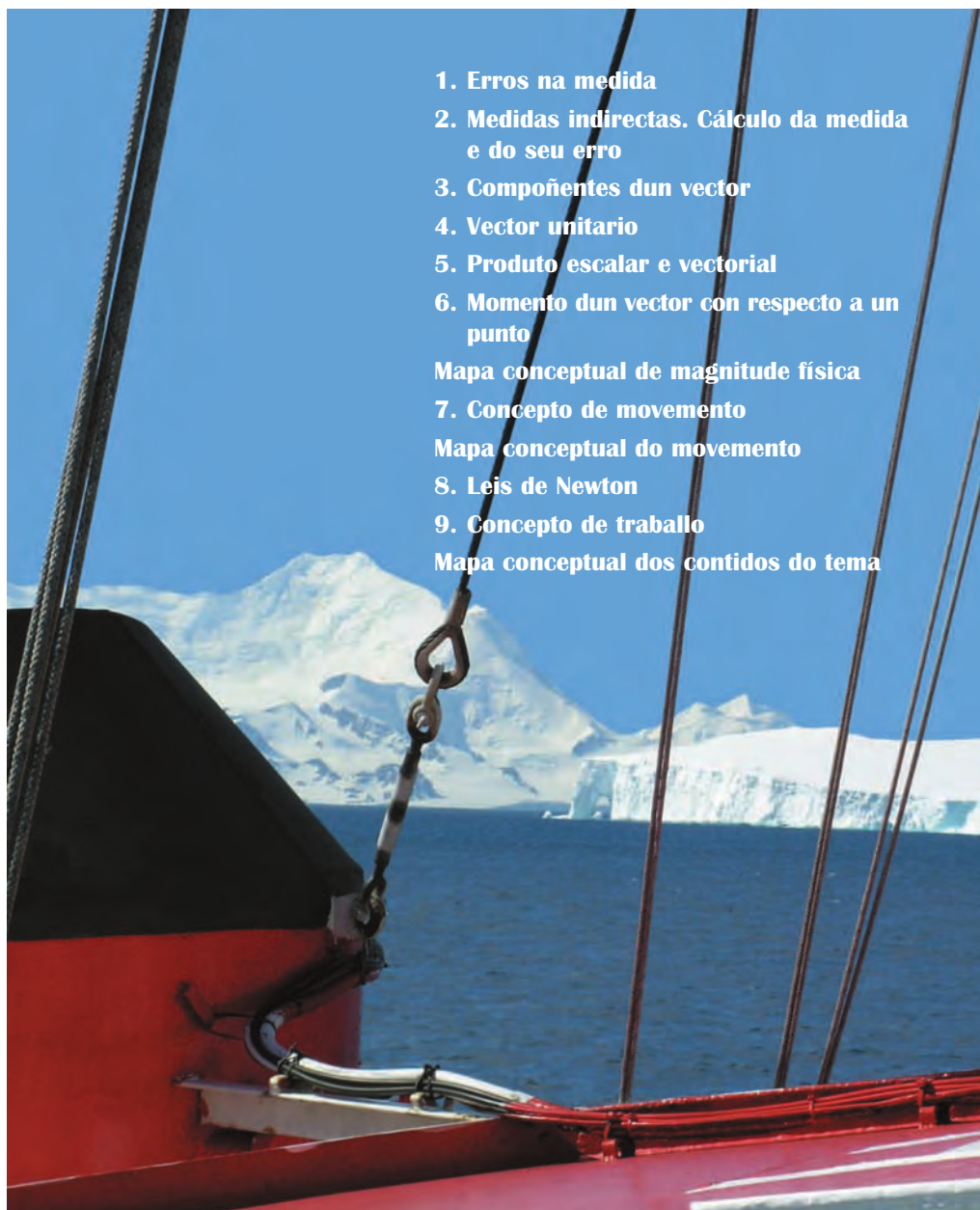


Tema 1 Repaso de conceptos

1. Erros na medida
 2. Medidas indirectas. Cálculo da medida e do seu erro
 3. Componentes dun vector
 4. Vector unitario
 5. Produto escalar e vectorial
 6. Momento dun vector con respecto a un punto
- Mapa conceptual de magnitude física
7. Concepto de movemento
- Mapa conceptual do movemento
8. Leis de Newton
 9. Concepto de traballo
- Mapa conceptual dos contidos do tema



1. ERROS NA MEDIDA

Toda medida vai acompañada dun erro, que pode deberse a diferentes causas, como:

- Unha equivocación. A medida equivocada non se ten en conta.
- Un mal uso do aparello de medida, un mal funcionamento deste etc. Esta causa de erro coñécese como **erro sistemático** e pode eliminarse cando se utilizan aparellos que funcionan correctamente e se manipulan de forma adecuada.
- O método utilizado é a limitación dos nosos sentidos. Estas causas conducen ao **erro accidental**, que non podemos eliminar, pero si minimizar aplicando as leis da estatística a un gran número de medidas. Como a probabilidade de cometer un erro por defecto é a mesma que a de cometelo por exceso, os valores obtidos oscilarán ao redor dun **valor medio**, que é o que se toma como **valor da medida**.

1.1. Erro absoluto

Para determinar o intervalo no que está comprendido o valor real da medida, defínese o **erro absoluto** (Δ) como aquela cantidade para a que o valor verdadeiro da medida vai estar incluído no intervalo:

$$[v_{\text{medio}} - \Delta v, v_{\text{medio}} + \Delta v]$$

Podemos calculalo seguindo o criterio de:

- Calcular o valor medio das medidas, omitindo aquelas que presenten unha desviación esaxerada.
- Calcular en valor absoluto a diferenza entre o valor de cada medida e o da media aritmética.
- Facer o valor medio das diferenzas anteriores.

Tómase como erro absoluto da medida o valor que sexa maior de entre:

- O valor medio das desviacións.
- A imprecisión do aparello de medida.

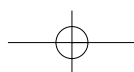
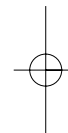
A medida da magnitude exprésase da forma: **valor medio** $\pm$ **erro absoluto**, dando o erro con 1 soa cifra significativa.

1.2. Erro relativo

O cociente do erro absoluto entre o valor da medida indícanos o seu grao de precisión e coñécese como **erro relativo**:

$$E_{\text{relativo}} = \frac{E_{\text{absoluto}}}{\text{valor da medida}}$$

Exprésase con 1 soa cifra significativa e xeralmente é un número pequeno, polo que é habitual expresalo en tanto por cento.



- Consideremos as seguintes medidas da masa dun corpo feitas cunha balanza: 27,756 g, 27,757 g, 27,751 g, 27,761 g, 27,755 g, 27,759 g.

Calcula:

- O valor que se tomará como masa do corpo.
- O erro absoluto da medida, dando o valor da mesma.
- O erro relativo da medida.

Solución:

$$a) \frac{27,756 + 27,757 + 27,761 + 27,755 + 27,759}{5} = 27,7576 \rightarrow 27,758 \text{ g}$$

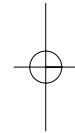
$$b) \begin{aligned} |27,756 - 27,758| &= 0,002 \\ |27,757 - 27,758| &= 0,001 \\ |27,761 - 27,758| &= 0,003 \\ |27,755 - 27,758| &= 0,003 \\ |27,759 - 27,758| &= 0,001 \end{aligned}$$

O valor medio das desviacións é:

$$\frac{0,002 + 0,001 + 0,003 + 0,003 + 0,001}{5} = 0,002$$

A medida vai ter tres cifras decimais, tomándose como valor desta: $(27,758 \pm 0,002) \text{ g}$.

$$c) E_r = \frac{0,002}{27,758} \cdot 100 \rightarrow E_r = 0,007\%$$



2. MEDIDAS INDIRECTAS. CÁLCULO DA MEDIDA E DO SEU ERRO

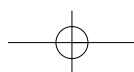
Moitas veces o valor da cantidade dunha magnitude física obtense mediante operacións alxebraicas. Con cantos decimais se dá o resultado?

2.1. Suma e resta

O resultado da operación non pode ter máis cifras decimais que o valor experimental que menos decimais posúa e o erro absoluto obtense sumando os erros absolutos de cada sumando. Exemplo:

$$30,780 \text{ m} + 6,646 \text{ m} - 10,03 \text{ m} = ?$$

O número que obtemos na calculadora é 27,396 m. Pero esta suma só debe ter dúas cifras decimais debido ao terceiro sumando (10,03 m). Despois de facer o correspondente redondeo resulta: $(27,40 \pm 0,01) \text{ m}$.



2.2. Multiplicación e división

O cálculo do erro absoluto dun produto de factores pode obterse diferenciando a expresión e substituíndo despois as diferenciais polos erros absolutos correspondentes (Δ). Así, para o produto $l_1 \cdot l_2 = S$ será:

$$S = l_1 \cdot l_2 \rightarrow dS = d(l_1 \cdot l_2) = d l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot d l_2 \rightarrow \Delta S = \Delta l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot \Delta l_2$$

Tamén podemos facer este cálculo a partir do erro relativo. Este obtense sumando os erros relativos dos distintos factores:

$$E_r = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta(l_1 \cdot l_2)}{l_1 \cdot l_2} = \frac{\Delta l_1 \cdot l_2}{l_1 \cdot l_2} + \frac{l_1 \cdot \Delta l_2}{l_1 \cdot l_2} = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} = E_{r \text{ de } l_1} + E_{r \text{ de } l_2}$$

Agora, recordando que: $E_r = E_{\text{absoluto}}/\text{valor da medida}$, obtemos: $E_{\text{absoluto}} = E_r \cdot \text{valor de medida}$.

Exercicio resolto

- Dado un rectángulo de dimensións: $l_1 = 5,2 \text{ m}$ e $l_2 = 9,23 \text{ m}$, calcula a súa superficie, indicando o seu erro absoluto.

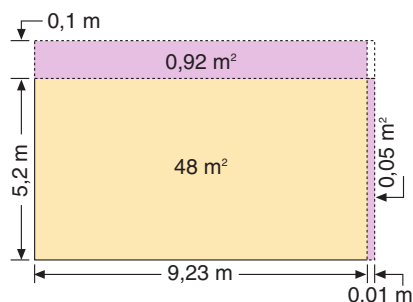
Solución:

En xeral, o resultado da operación redondearase ata que posúa o mesmo número de cifras decimais, ou de cifras significativas, que a do factor que menos teña.

$$S = 5,2 \text{ m} \times 9,23 \text{ m} = ?$$

Tendo en conta que o número que aparece na calculadora é 47,996, en principio o resultado será:

$$S = 5,2 \text{ m} \times 9,23 \text{ m} = 48,0 \text{ m}^2$$



Pero o número de cifras co que hai que expresar o resultado depende do erro absoluto, polo que procedemos ao seu cálculo.

O erro absoluto que se comete por exceso no cálculo da superficie do rectángulo é o da parte coloreada de violeta na figura (desprezamos a área do pequeno rectángulo que aparece sen pintar) e podémolo obter diferenciando a expresión $S = l_1 \cdot l_2$, substituíndo despois as diferenciais polos correspondentes erros absolutos:

$$S = l_1 \cdot l_2 \rightarrow dS = d(l_1 \cdot l_2) = d l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot d l_2 \rightarrow \Delta S = \Delta l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot \Delta l_2$$

Nos valores de $l_1 = 5,2 \text{ m}$ e $l_2 = 9,23 \text{ m}$ non se dá de forma expresa o erro absoluto das medidas, entendendo entón que este é o de 1 unidade na última cifra significativa, podendo expresarse como:

sar as cantidades anteriores como: $l_1 = (5,2 \pm 0,1) \text{ m}$ e $l_2 = (9,23 \pm 0,01) \text{ m}$. Substituíndo na ecuación anterior temos:

$$E_{\text{absoluto de } S} = \Delta S = 5,2 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} + 0,1 \text{ m} \cdot 9,23 \text{ m} = 0,975 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ m}^2$$

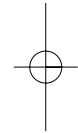
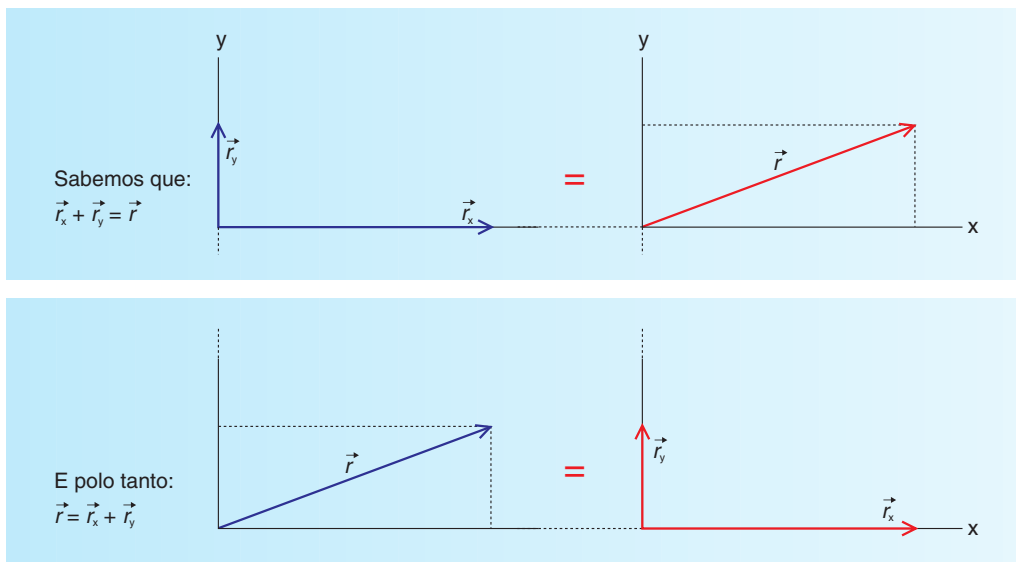
Isto indícanos que a superficie calculada está afectada dun erro nas unidades, polo que o seu valor exprésase con dúas cifras significativas: 48 m^2 ($48 \pm 1 \text{ m}^2$).

A igual resultado chegamos se calculamos o erro absoluto con axuda do erro relativo:
 $E_{\text{absoluto}} = E_r \cdot \text{valor de medida}$:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{0,1}{5,2} + \frac{0,01}{9,23} = 0,02 \\ E_r &= \frac{E_{\text{absoluto}}}{\text{valor de medida}} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_{\text{absoluto}} = E_r \cdot \text{valor de medida} = 0,02 \cdot 48,0 = 0,96 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ m}^2$$

E a medida da superficie do rectángulo é: $S = (48 \pm 1) \text{ m}^2$

3. COMPOÑENTES DUN VECTOR

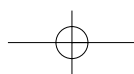


$\vec{r}_x$ e $\vec{r}_y$ son os **compoñentes** do vector $\vec{r}$ nas direccións dos eixes x e y.

Fixémonos que $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$, pero $r \neq r_x + r_y$ (soamente o módulo do vector resultante será igual á suma dos módulos dos vectores compoñentes cando estes coincidan en dirección).

Isto que fixemos no plano, podemos levalo a tres dimensións, resultando:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \rightarrow |\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

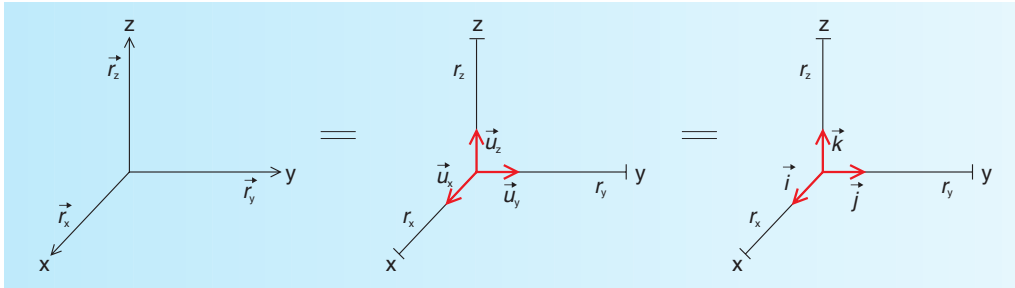


4. VECTOR UNITARIO

Defínese o vector unitario¹ do vector $\vec{r}$ como aquel vector de módulo unidade e con igual dirección e sentido que o vector $\vec{r}$ e represéntase por $\vec{u}_r$, sendo $\vec{u}_r = \vec{r}/r$.

Os vectores unitarios nas direccións dos eixes de coordenadas cartesianas son: $\vec{u}_x$ ou $\vec{i}$, $\vec{u}_y$ ou $\vec{j}$, $\vec{u}_z$ ou $\vec{k}$, podendo escribir $\vec{r}$ da forma:

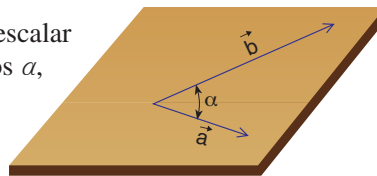
$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \cdot \vec{u}_x + r_y \cdot \vec{u}_y + r_z \cdot \vec{u}_z = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$$



5. PRODUTO ESCALAR E VECTORIAL

5.1. Produto escalar de dous vectores

Sexan os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Represéntase o seu produto escalar pola expresión: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, e defínese como: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$, sendo α o ángulo formado polos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Da definición de produto escalar vemos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ -xa que } \cos \alpha \text{ é igual a } \cos(-\alpha) \text{ -}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \text{ -xa que } \vec{i} \cdot \vec{i} = i \cdot i \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ -}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

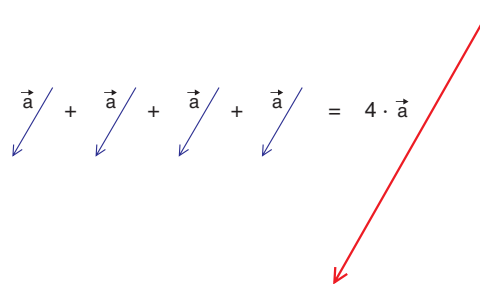
$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ -xa que } \vec{i} \cdot \vec{j} = i \cdot j \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \text{ -}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

¹ Recordando o produto dun escalar por un vector, podemos considerar todo vector como múltiplo doutro calquera da súa mesma dirección e sentido. Se ten o módulo unidade, chámasele **vector unitario**.



O produto escalar de dous vectores en función dos seus compoñentes cartesianos é:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} +$$

$$a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} +$$

$$a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(xa que $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$)

O produto escalar de dous vectores libres en función dos seus compoñentes cartesianos é igual á suma dos produtos dos seus compoñentes homónimos.

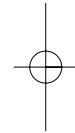
Exercicio resolto

- Dados os vectores: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ², expresados en unidades do sistema internacional, fai o seu produto escalar e calcula o ángulo que forman.

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 4 \text{ unidades do SI.}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a \cdot b \cdot \cos \alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \\ a &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \\ b &= \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 = 3 \cdot 7 \cdot \cos \alpha \rightarrow \alpha = 79^\circ$$



Cuestión teórica

- Comenta se se cumpren as seguintes igualdades:

a) $\vec{a} \cdot \vec{a} \neq a^2$

R: Si

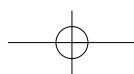
b) Se $\vec{a} \neq \vec{0}$, e $\vec{b} \neq \vec{0}$, pode ocorrer que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

R: Si

c) Pode cumprirse a igualdade $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b$?

R: Si

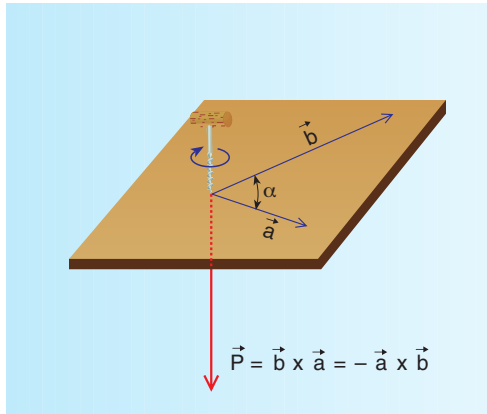
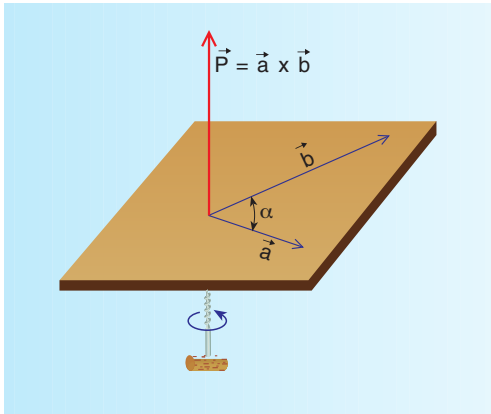
² Estes vectores tamén se poden expresar, respectivamente, da forma: $\vec{a} = (2, 2, -1)$ e $\vec{b} = (6, -3, 2)$



5.2. Produto vectorial de dous vectores

Sexan os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Simbolízase o seu produto vectorial, $\vec{P}$, pola expresión: $\vec{a} \times \vec{b}$ ou $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sendo un vector de:

- **Módulo:** $a \cdot b \cdot |\sin \alpha| = P$
- **Dirección:** a perpendicular ao plano determinado polos dous vectores.
- **Sentido:** o de avance dun sacarroallas que xire levando o primeiro vector multiplicando sobre o segundo polo camiño máis curto.



Da definición de produto vectorial vemos que:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \text{ xa que: } |\vec{i} \times \vec{i}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \text{ xa que: } \begin{cases} |\vec{i} \times \vec{j}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90 = 1 \\ \text{Dirección: a perpendicular ao plano determinado por} \\ \vec{i} \text{ e } \vec{j}, \text{ que é a do eixe z.} \\ \text{Sentido: o de avance dun sacarroallas que leve } \vec{i} \text{ sobre } \vec{j} \\ \text{polo camiño máis curto, resultando ser o vector } \vec{k}. \end{cases}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

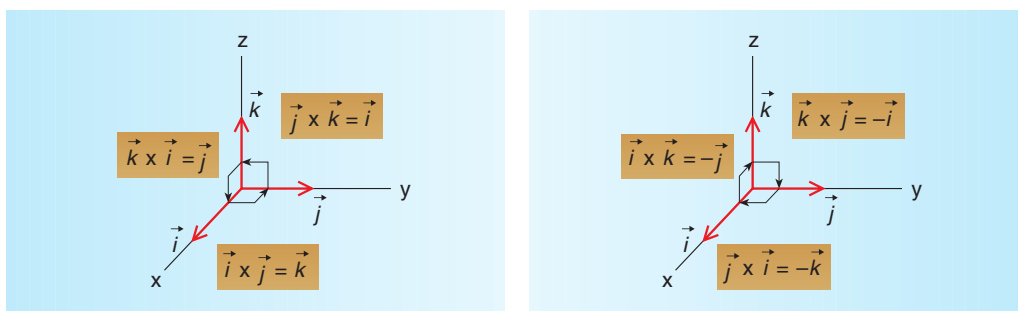
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

Con axuda dos seguintes gráficos recordaremos facilmente o resultado do produto vectorial de dous vectores unitarios ortogonais.



O produto vectorial de dous vectores en función dos seus compoñentes cartesianos é:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

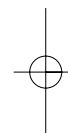
$$a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} +$$

$$a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} +$$

$$a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} = a_x b_y \vec{k} + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_x (-\vec{k}) +$$

$$a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y (-\vec{i}) = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} +$$

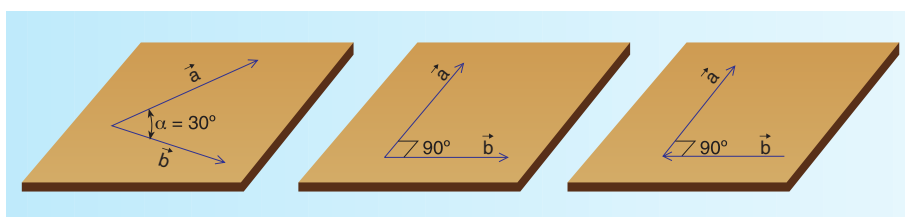
$$(a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$



Esta última expresión pódese recordar máis facilmente coa axuda dun novo operador, chamado **determinante**:

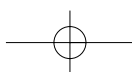
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{P}$$

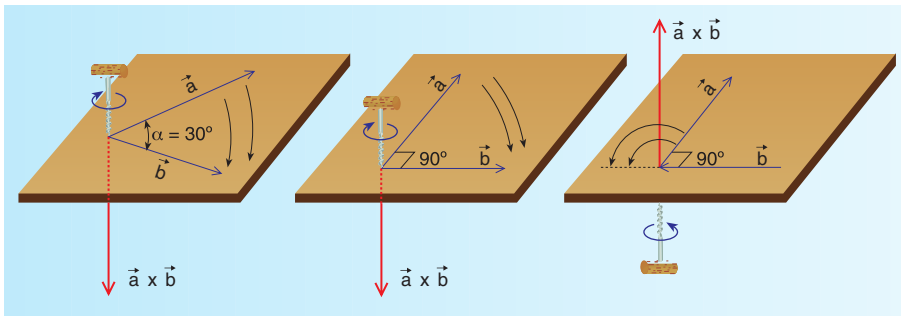
- Di cal será a dirección e o sentido do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ nos seguintes casos:



Solución:

A indicada nos seguintes debuxos.





- **Primeiro caso.** Dirección: a perpendicular ao plano determinado polos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Polo tanto, a vertical ao plano do debuxo.
- Sentido: o de avance dun sacarrollas que xire levando o primeiro vector multiplicando sobre o segundo vector, polo camiño máis curto. Polo tanto, cara abaixo.
- **Segundo caso.** Igual dirección e sentido que no anterior.
- **Terceiro caso.** Neste caso o vector $\vec{b}$ vai cara á esquerda, e para levar $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ polo camiño máis curto temos que facer avanzar o sacarrollas desde abaixo cara arriba.

Exercicio resolto

- Dados os vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, calcula: a) $\vec{a} \times \vec{b}$ e b) $\vec{b} \times \vec{a}$.

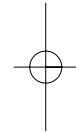
Solución:

a)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2-2)\vec{i} - (-6-2)\vec{j} + (3+1)\vec{k} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

- b) Facendo o mesmo, pero cambiando os compoñentes do vector $\vec{a}$ polos do vector $\vec{b}$ e os do vector $\vec{b}$ polos do $\vec{a}$, chegamos a: $\vec{b} \times \vec{a} = -8\vec{j} - 4\vec{k}$, resultado que se pode prever, xa que: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.



Cuestión teórica

- Comenta se se cumpren as seguintes igualdades:

- a) Pode ocorrer que $|\vec{a} \times \vec{a}| = a^2$?

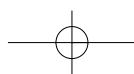
R: Non

- b) Se $\vec{a} \neq \vec{0}$ e $\vec{b} \neq \vec{0}$, pode ocorrer que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$?

R: Si

- c) Pode cumprirse a igualdade: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$?

R: Non



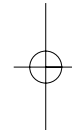
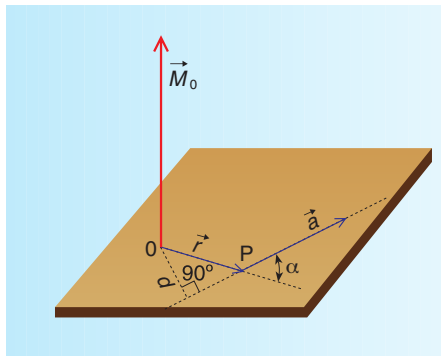
6. MOMENTO DUN VECTOR CON RESPECTO A UN PUNTO

Sexa o vector $\vec{a}$ con orixe no punto P. Defínese o momento do vector escoregante $\vec{a}$ con respecto ao punto O, e represéntase por $\vec{M}$ ou $\vec{M}_O$, como: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a}$, sendo $\vec{r}$ un vector que une o punto O cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{a}$.

De acordo coa definición, o momento dun vector é un novo vector que ten por:

- **Módulo:** $M_O = r \cdot a \cdot \sin \alpha = a \cdot d$, sendo d a perpendicular que vai desde o punto O até a liña de acción do vector $\vec{a}$.
- **Dirección:** a perpendicular ao plano determinando polo vector $\vec{a}$ e o punto con respecto ao cal se calcula o seu momento.
- **Sentido:** o de avance dun sacarroallas que xire levando o vector de posición $\vec{r}$ sobre o vector $\vec{a}$ polo camiño máis curto.

Aínda que o vector momento é un vector libre, acostúmase representalo por un vector aplicado no punto O.



Exercicio resolto

- Dado o vector $\vec{a}$, que ten a súa orixe no punto (3,5) e o seu extremo en (5,4), calcula o seu momento con respecto á orixe de coordenadas.

Solución:

O vector $\vec{a}$ é o indicado na figura:

Sabemos que $\vec{r} + \vec{a} = \vec{r'}$ e, polo tanto, $\vec{a} = \vec{r'} - \vec{r}$:

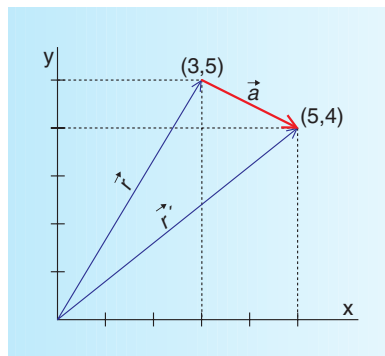
$$\vec{a} = (5\vec{i} + 4\vec{j}) - (3\vec{i} + 5\vec{j})$$

E como para sumar (ou restar) vectores en función dos seus compoñentes se fai sumando (ou restando) os compoñentes homónimos, temos:

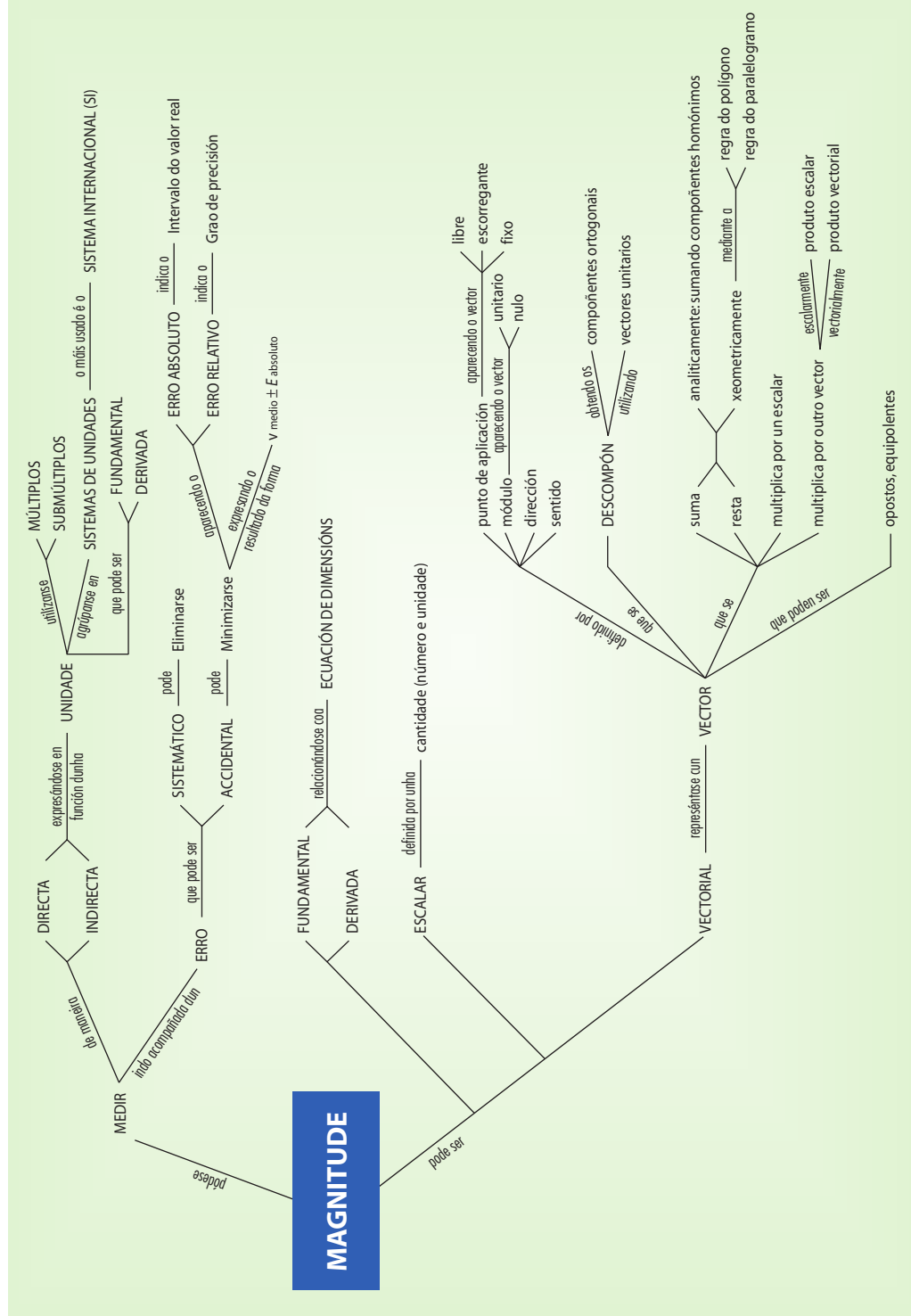
$$\vec{a} = (5 - 3)\vec{i} + (4 - 5)\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

Recordando o concepto de momento dun vector con respecto a un punto, resulta:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a} \rightarrow \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -13\vec{k}$$

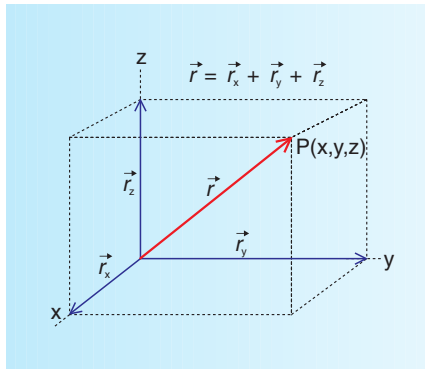


Mapa conceptual de magnitud física

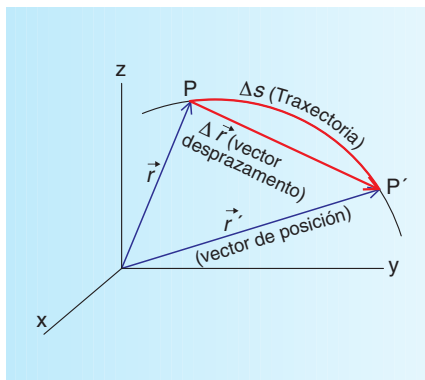


7. CONCEPTO DE MOVIMIENTO

Cando viaxamos sentados nun autobús en marcha, dicir se estamos en repouso ou en movemento esixe establecer primeiramente unha referencia. Así, non cambiamos de lugar nin de posición con respecto ao noso asento; no entanto estamos distanciándonos continuamente con respecto á paraxe de subida. Utilizaremos como elementos de referencia tres eixes de coordenadas rectangulares. Neles, a posición dun corpo vén dada polo **vector de posición**, que é o vector que ten a súa orixe na orixe de coordenadas e o seu extremo no punto material.



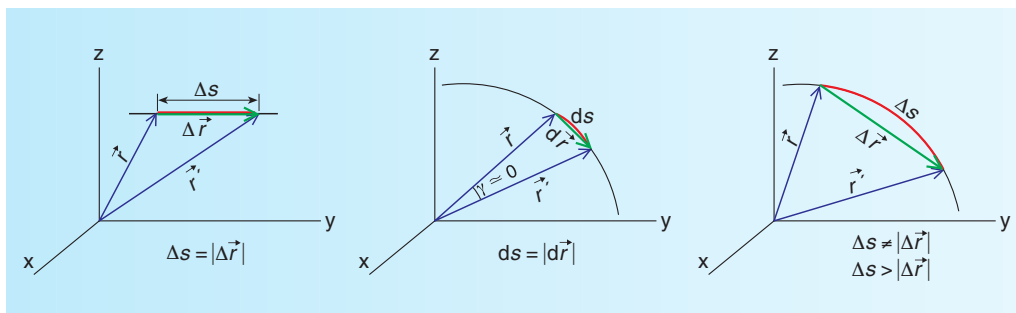
O cambio de posición do móbil podémolo dar polo vector que une o seu punto de partida co de chegada ($\Delta \vec{r}$). Vén ser a diferenza entre os vectores de posición final e inicial e coñécese como **vector desprazamento** ou simplemente **desprazamento**.



O camiño que segue o móbil no seu desprazamento chámase **traxectoria**. Segundo a traxectoria, os movementos clasifícanse en rectilíneos e curvilíneos, incluíndo nestes últimos o movemento circular, parabólico, elíptico etc., en función da forma da curva que describen.

O valor da traxectoria, ou espazo percorrido polo móbil, coincide co módulo do vector desprazamento? A resposta pode ser:

- Si, se o movemento é rectilíneo e non hai retroceso, ou se se supón un desprazamento infinitesimal (xa que neste caso a corda tende a coincidir co arco).
- Non, se non estamos nos supostos anteriores.



7.1. Concepto de velocidade e celeridade

- **Velocidade media:** $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. É un vector de igual dirección e sentido que o vector desprazamento.
- **Velocidade instantánea** ou simplemente **velocidade:** $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. É un vector que ten a dirección de $d\vec{r}$, que é tanxente á traxectoria no punto considerado.
- **Celeridade media** ou **velocidade media escalar:** $c_m = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. É un escalar; é o que na linguaxe coloquial se chama velocidade.
- **Celeridade instantánea** ou **velocidade instantánea escalar:** $c = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$. É un escalar.

Como en xeral non coincide Δs co módulo de $\Delta \vec{r}$, a celeridade media é distinta do módulo da velocidade media. No entanto: $|\vec{r}| = ds$ e $c = v = |\vec{v}|$, podendo escribir $\vec{v}$ da forma: $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$.

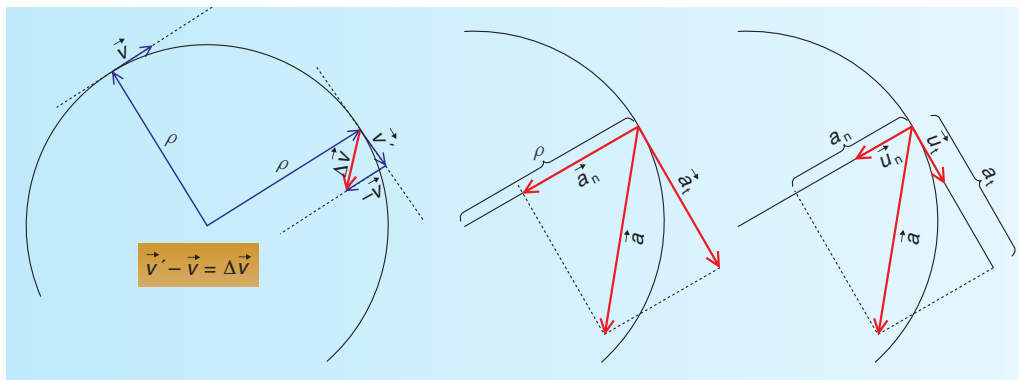
7.2. Concepto de aceleración. Os seus compoñentes intrínsecos

Aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. É un vector de igual dirección e sentido que $\Delta \vec{v}$.

Aceleración instantánea ou simplemente **aceleración:** $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. É un vector de

igual dirección e sentido que $d\vec{v}$ e, en xeral, non é tanxente á traxectoria, apuntando cara á parte interior da curva. Descomponse en dúas direccións (compoñentes intrínsecos): unha na tanxente á traxectoria, $\vec{a}_t$, chamada **aceleración lineal ou tanxencial**, e outra perpendicular á anterior, $\vec{a}_n$, coñecida co nome de **aceleración normal ou centrípeta**, de modo que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n$$



- Estuda o tipo de aceleración (normal e/ou tanxencial) que posúe unha pedra que deixamos caer no baleiro.

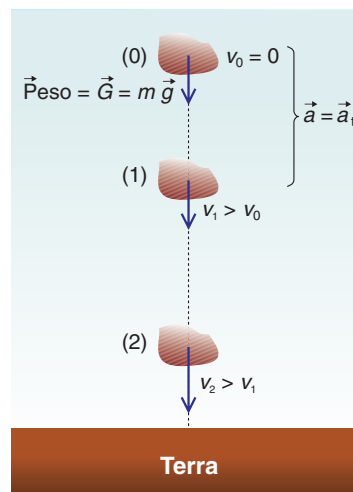
Solución:

Sabemos que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e que $\vec{v}$, como todo vector,

consta de módulo (v), dirección e sentido.

Na cuestión presentada, a dirección e o sentido da velocidade permanecen constantes (que coinciden co do vector desprazamento) pero $\vec{v}$ varía porque aumenta o seu módulo a medida que pasa o tempo. En consecuencia, cando varía o módulo da velocidade no tempo, hai unha aceleración, cuxa dirección é tanxente á traxectoria, existindo a compoñente tanxencial da aceleración, $\vec{a}_t$.

$$\vec{a} = \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t$$

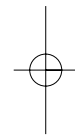
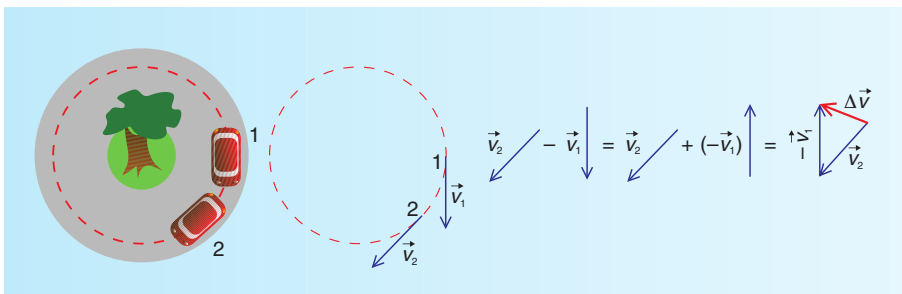


- Un coche percorre unha praza circular de 30 m de radio coa celeridade constante de 20 km/hora. Estuda o tipo de aceleración (normal e/ou tanxencial) con que se move.

Solución:

Nesta cuestión, o módulo da velocidade permanece constante e, polo tanto, $\vec{a}_t = \vec{0}$. Pero varía a dirección da velocidade e, en consecuencia, hai aceleración: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{0} + \vec{a}_n = \vec{a}_n$. Cando varía a dirección da velocidade no tempo, a dirección da aceleración é perpendicular á traxectoria, existindo a compoñente normal da aceleración, $\vec{a}_n$. O seu valor calcúlase coa expresión:

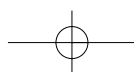
$a_n = \frac{v^2}{\rho}$, sendo ρ o raio de curvatura que, para o caso dunha circunferencia, coincide co seu raio.



7.3. Clasificación dos movementos

Atendendo á súa velocidade, os **movementos clasifícanse** en:

- **Uniformes:** cando o módulo da velocidade permanece constante no tempo: $v = \text{cte}$. A fórmula a utilizar neste movemento é: $\Delta s = v \cdot t$.



Neste movemento a $\vec{v}$ pode variar no tempo. Sucede cando varía a dirección da velocidade permanecendo constante o seu módulo, podendo haber (no movemento uniforme) aceleración xa que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

- **Variados:** o módulo da velocidade varía no tempo. Cando esta variación (a_t) é constante, dise que o movemento é **uniformemente variado**. Este movemento pode ser acelerado (o sentido da aceleración tanxencial coincide co do movemento) ou decelerado (o sentido da aceleración tanxencial é contrario ao do movemento). As fórmulas a utilizar son:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a_t \cdot t$$

Tendo en conta, simultaneamente, a velocidade e a traxectoria do móbil, podemos facer a clasificación:

- **Movemento rectilíneo uniforme:** a traxectoria é rectilínea e o módulo da velocidade constante. En consecuencia, o vector velocidade é constante: $\vec{v}$ constante.

No estudo deste movemento pódese utilizar a fórmula: $\Delta \vec{r} = \vec{v} \cdot t$.

- **Movemento circular uniforme:** a traxectoria é a liña dunha circunferencia e o módulo da velocidade é constante. Neste movemento hai aceleración, que é normal á traxectoria en cada punto.

No estudo deste movemento, ademais da fórmula, $\Delta s = v \cdot t$, pódese utilizar a correspondente angular: $\Delta \varphi = \omega \cdot t$.

- **Movemento rectilíneo uniformemente variado:** a traxectoria é rectilínea e a variación do módulo da velocidade é constante no tempo. Neste movemento hai aceleración, que é tanxencial e constante.

No estudo deste movemento pódense utilizar as fórmulas:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_t \cdot t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_t \cdot t$$

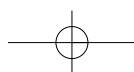
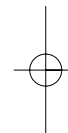
Nestas magnitudes vectoriais hai que substituír o módulo e o sentido correspondentes (a dirección coincide para todas as magnitudes vectoriais por ser o movemento rectilíneo).

- **Movemento circular uniformemente variado:** a traxectoria é a liña dunha circunferencia e a variación do módulo da velocidade é constante no tempo. Neste movemento a aceleración consta do compoñente tanxencial (que é constante en módulo) e do normal (de módulo variable no tempo).

No estudo deste movemento, ademais das fórmulas $\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2$ e $v = v_0 + a_t \cdot t$ pódense utilizar as correspondentes angulares:

$$\Delta \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$



A aceleración hai que substituíla co signo positivo ou negativo, segundo o movemento sexa, respectivamente, acelerado ou decelerado.

Exercicio resolto

- Desde unha altura de 80 m con respecto ao chan lánzase unha pedra, verticalmente e cara arriba, cunha velocidade de 12 m/s. Canto tempo tarda en chegar ao chan?

Solución:

Unha vez lanzada a pedra, a dirección da súa velocidade coincide coa dirección da aceleración á que está sometida, que é a da gravidade. Polo tanto posúe un movemento rectilíneo uniformemente variado. Por outro lado podemos ver que non coincide o módulo do vector desprazamento $|\Delta \vec{r}|$ co espazo total percorrido polo móbil ($s_1 + s_2$).

O problema podémolo enfocar de distintas maneiras. Así:

- Estudar o desprazamento efectuado pola pedra desde que se lanza até que chega ao chan. Isto é: o $\Delta \vec{r}$ do debuxo.
- Estudar o movemento do móbil desde que se lanza até que alcanza a altura máxima e desde esta altura ata que retorna ao chan.

Segundo a **primeira forma** indicada temos:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_t t^2$$

Tomamos unha orixe: o punto "O", e un sentido como positivo: cara abaixo, por exemplo, resultando:

$$\Delta \vec{r} \rightarrow \begin{cases} \text{Módulo } (\Delta r): 80 \text{ m.} \\ \text{Dirección: é a mesma para todas as magnitudes vectoriais que aparecen na ecuación, esquecéndoa.} \\ \text{Sentido: cara abaixo, que consideramos positivo,} \end{cases}$$

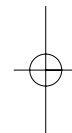
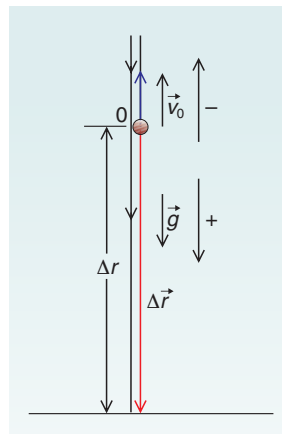
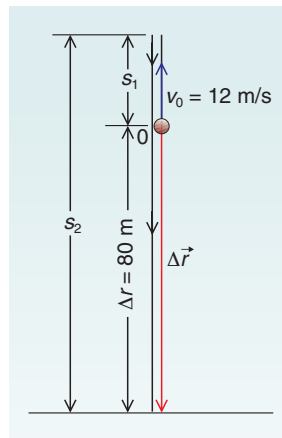
sendo $\Delta r = +80$ (m), con dirección vertical e cara abaixo.

$$\vec{v}_0 \rightarrow \begin{cases} v_0 = 12 \text{ m s}^{-1} \\ v_0 = -12 \text{ (m s}^{-1}\text{)}, \text{ na dirección vertical e cara arriba} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{g} \rightarrow \begin{cases} a = g = 9,8 \text{ m s}^{-2} \\ \vec{a} = \vec{g} = +9,8 \text{ (m s}^{-2}\text{)}, \text{ na dirección vertical e cara abaixo} \end{cases}$$

$$80 = -12t + \frac{1}{2} 9,8 t^2 \rightarrow 4,9 t^2 - 12t - 80 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 4,9 \cdot 80}}{2 \cdot 4,9} = \begin{cases} 5,4 \text{ s} \\ -3,0 \text{ s} \end{cases}$$



Tomamos como solución válida do problema a de 5,4 s. O resultado negativo quere dicir que tres segundos antes de empezar a contar o tempo a pedra se atopaba no chan (se o movemento fose uniformemente variado).

Outra forma:

Calculamos o tempo que tarda a pedra en ir desde “O” até “A” e desde “A” até “B”, e logo sumámoslos.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{g}t \rightarrow 0 = -12 + 9,8t \rightarrow t = 1,2 \text{ s}$$

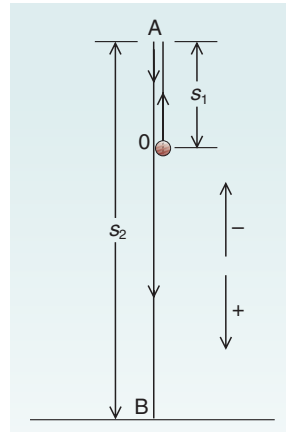
$$-s_1 = -12 \cdot 1,2 + \frac{1}{2} 9,8 \cdot 1,2^2 = 7,3 \text{ m}$$

$$s_2 = s_1 + 80$$

$$7,3 + 80 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t'^2 \rightarrow t' = \pm 4,2 \text{ s}$$

tomando como resultado o valor positivo. Ao igual que dicíamos con anterioridade, o valor negativo quere dicir que 4,2 s antes de empezar a contar o tempo a pedra estaba no punto B.

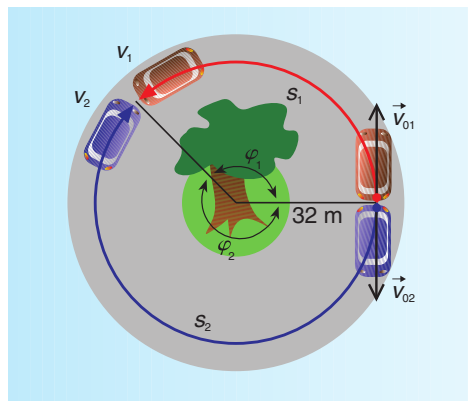
$$t = 1,2 + 4,2 \rightarrow t = 5,4 \text{ s}$$



Exercicio resolto

- Dous coches, que circulan por unha praza circular de 32 m de raio, pasan por un mesmo punto cunha velocidade de 72 km/h, en sentidos contrarios. Se un dos coches decelera cun valor constante de 2 m/s^2 e o outro acelera con igual valor, calcula:

- O tempo que tardan en encontrarse de novo.
- O espazo percorrido por cada coche.
- O módulo da aceleración total de cada coche no momento do encontro.



Solución:

O dato da aceleración que nos dá o problema corresponde á aceleración tanxencial dos coches.

- a) Traballando con magnitudes lineais.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= v_{01} \cdot t + \frac{1}{2} a_{11} \cdot t^2 \rightarrow s_1 = 20t - \frac{1}{2} 2t^2 \\ s_2 &= v_{02} \cdot t + \frac{1}{2} a_{12} \cdot t^2 \rightarrow s_2 = 20t + \frac{1}{2} 2t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow s_1 + s_2 = 40t$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 + s_2 &= 40t \\ s_1 + s_2 &= 2\pi \cdot 32 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\pi \cdot 32 = 40t \rightarrow t = 5,0 \text{ s}$$

Traballando con magnitudes angulares:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ v_0 &= \omega_0 \cdot r \\ a_t &= \alpha \cdot r \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi = \frac{v_0}{r} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_t}{r} \cdot t^2$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{20}{32} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot t^2 \\ \varphi_2 &= \frac{20}{32} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = 2 \cdot \frac{20}{32} \cdot t$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \frac{40}{32} \cdot t \\ \varphi_1 + \varphi_2 &= 2\pi \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\pi = \frac{40}{32} \cdot t \rightarrow t = 5,0 \text{ s}$$

b) Traballando con magnitudes lineais: $s = v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a_t \cdot t^2$.

$$s_1 = 20 \cdot 5,0 - 1/2 \cdot 2 \cdot 5,0^2 \rightarrow s_1 = 75,0 \text{ m}$$

$$s_2 = 20 \cdot 5,0 + 1/2 \cdot 2 \cdot 5,0^2 \rightarrow s_2 = 125,0 \text{ m}$$

Traballando con magnitudes angulares: $\varphi = \omega_0 \cdot t + 1/2 \cdot \alpha \cdot t^2 \rightarrow \varphi = v_0/r \cdot t + 1/2 \cdot a_t/r \cdot t^2$

$$\varphi_1 = \frac{20}{32} \cdot 5,0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot 5,0^2 \rightarrow \varphi_1 = 2,34 \text{ rad}$$

$$s_1 = \varphi_1 \cdot r = 2,34 \cdot 32 = 75,0 \text{ m}$$

$$\varphi_2 = \frac{20}{32} \cdot 5,0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot 5,0^2 \rightarrow \varphi_2 = 3,91 \text{ rad}$$

$$s_2 = \varphi_2 \cdot r = 3,91 \cdot 32 \rightarrow s_2 = 125,0 \text{ m}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\ a_n &= \frac{v^2}{r} \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{(v_0 + a_t \cdot t)^2}{r}\right)^2}$$

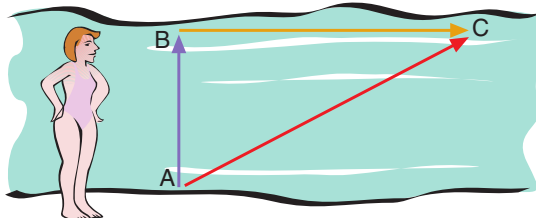
$$a_1 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{(20 - 2 \cdot 5,0)^2}{32}\right)^2} = 3,7 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_2 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{(20 + 2 \cdot 5,0)^2}{32}\right)^2} = 28,2 \text{ m s}^{-2}$$

7.4. Composición de movementos

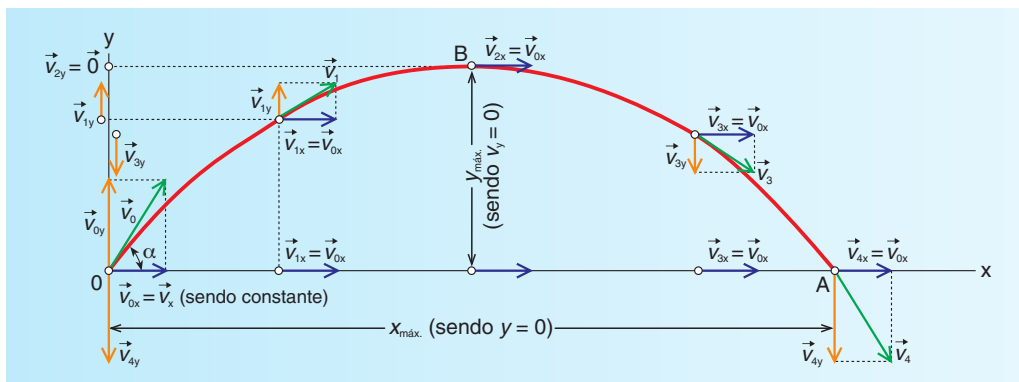
O estudo dun movemento composto podémolo realizar aplicando o principio de Galileo sobre a independencia de movementos que di: “Se un corpo está sometido, por causas distintas, a varios movementos simultáneos, o seu cambio de posición é independente de que os movementos actúen de forma sucesiva ou simultánea”.

O movemento resultante obtense ao sumar vectorialmente os movementos compoñentes. Pensemos que queremos atravesar un río. Se o facemos perpendicularmente á corrente, veremos que non chegamos nun punto situado enfronte do de partida, senón un pouco máis abaixo. Isto é debido a que estamos sometidos simultaneamente a dous movementos: ao que nós causamos nadando e ao de arrastre da corrente, dando como resultado outro movemento, consecuencia dos dous, que ten por:



- Vector de posición a suma vectorial dos vectores de posición dos movementos compoñentes: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$.
- Velocidade a suma vectorial das velocidades dos movementos compoñentes: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- Aceleración a suma vectorial das aceleracións dos movementos compoñentes: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Un caso de movemento composto é o **movemento parabólico**. Ten lugar cando un móbil se despraza con aceleración constante (en módulo, dirección e sentido) e non coincide a dirección da súa velocidade coa da aceleración. Se a aceleración é a da gravidade, ao movemento dáselle o nome de **tiro parabólico**.

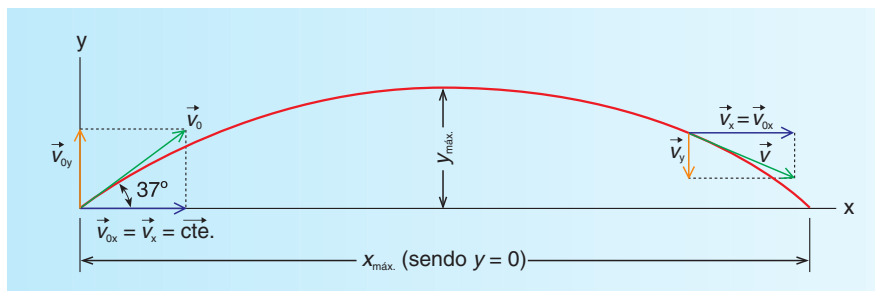


Como o movemento parabólico non é máis que a composición dun movemento rectilíneo uniforme, na dirección horizontal, e doutro rectilíneo uniformemente variado, na dirección vertical, non necesitamos para o seu estudo novos conceptos teóricos.

- Disparase un proxectil desde o chan horizontal cun ángulo de 37° e velocidade $v = 100$ m/s. Acha:
- O alcance máximo do proxectil.
 - A altura máxima que alcanza.
 - A ecuación da traxectoria.
 - A velocidade e a celeridade cando lle faltan 100 m para chegar ao chan e o proxectil está baixando.

Nota: Toma $g = 10$ m/s², $\sin 37^\circ = 0,6$ e $\cos 37^\circ = 0,8$.

Solución:



O proxectil está sometido a dous movementos simultáneos: un rectilíneo e uniforme (eixe x) e outro rectilíneo uniformemente variado (eixe y), polo que recordaremos o principio de Galileo de independencia de movementos: “O cambio de posición é independente de que os movementos actúen de forma simultánea ou separadamente”.

Tomamos como orixe o punto de saída do proxectil, considerando como sentido positivo o de cara arriba e negativo o de cara abaixo.

$$\text{a) } \vec{x}_{\text{máx}} = \vec{x}_0 + \vec{v}_{0x} \cdot t$$

$$x_{\text{máx}} = 100 \cdot \cos 37^\circ \cdot t = 80 \cdot t \quad (1)$$

xa que $x_0 = 0$ ao coller como orixe o punto de lanzamento do proxectil.

Agora, para calcular t facemos uso do outro movemento que ten o proxectil. Sucede que para a situación de $x_{\text{máx}}$ o desprazamento efectuado verticalmente é nulo, de modo que:

$$\Delta \vec{y} = \vec{v}_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t$$

$$0 = 100 \cdot \sin 37^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \rightarrow t = 12 \text{ s}$$

Substituíndo na expresión (1) resulta: $x_{\text{máx}} = 80 \cdot 12 \rightarrow x_{\text{máx}} = 960$ m

$$\text{b) } y_{\text{máx}} = 60 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

Para calcular o tempo que tarda o proxectil en chegar á altura máxima, recordamos que $v_y = 0$. Logo, como $\vec{v}_y = \vec{v}_{0y} + \vec{a} \cdot t$, temos:

$$0 = 60 - 10 \cdot t \rightarrow t = 6 \text{ s}$$

e, daquela:

$$y_{\text{máx}} = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 \rightarrow y_{\text{máx}} = 180 \text{ m}$$

Dada a simetría da traxectoria, a altura máxima ten lugar a unha distancia metade do alcance máximo, sendo o tempo investido en conseguir a altura máxima tamén metade do tempo correspondente ao do alcance máximo.

- c) Sabemos que as ecuacións do movemento son aquelas que nos relacionan coordenada e tempo e a **ecuación da traxectoria** obtense eliminando o tempo das ecuacións do movemento.

$$\left. \begin{aligned} x &= 80 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{80} \\ y &= 60 \cdot t - 5 \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = \frac{60 \cdot x}{80} - \frac{5 \cdot x^2}{6400} = \frac{3 \cdot x}{4} - \frac{x^2}{1280}$$

que é a ecuación dunha **parábola** (polinomio de grao dous) con eixe paralelo ao eixe das “y” (polinomio en “x”) coas ramas cara abaixo (coeficiente en grao dous negativo) e co vértice desprazado da orixe (presenza de termos de grao menor que dous).

d) $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

$$v_x = 80 \text{ m s}^{-1}$$

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{oy} + \vec{g} \cdot t \rightarrow v_y = 60 - 10 \cdot t$$

Este tempo³ “t” calculámolo con axuda da ecuación:

$$100 = 60 \cdot t - 5 \cdot t^2 \rightarrow t = \begin{matrix} 10 \text{ s} \\ 2 \text{ s} \end{matrix}$$

sendo a solución válida a de 10 s, pois para $t = 2$ s o proxectil aínda sobe.

$$v_y = 60 - 10 \cdot 10 = -40 \text{ m s}^{-1}$$

Resultando:

$$\vec{v} = 80 \vec{i} - 40 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

A celeridade é:

$$v = \sqrt{80^2 + (-40)^2} \rightarrow v = 89,4 \text{ m s}^{-1}$$

³ Outras formas:

v_y tamén a podemos calcular coa seguinte expresión: $v_y = 0 + 10 t'$, sendo t' o tempo que tarda o proxectil en percorrer os 80 m (180–100) que hai desde a altura máxima até o punto que está a 100 m do chan. Este tempo calcúlase coa expresión:

$$\Delta r = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 \rightarrow 80 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t'^2 \rightarrow t' = 4 \text{ s}$$

Polo que: $v_y = 10 \cdot 4 = 40 \text{ m/s}$.

Tamén se pode calcular este tempo restándolle a 6 s (que é o tempo que tarda o proxectil en ir desde a altura máxima ata o chan) o tempo investido en ir desde o chan até a altura de 100 m (ou desde a altura de 100 m até o chan). Desta forma será:

$$100 = 100 \cdot 0,6 \cdot t'' - \frac{1}{2} 10 \cdot t''^2 \rightarrow t'' = \begin{matrix} 10 \text{ s} \\ 2 \text{ s} \end{matrix}$$

2 segundos é o tempo investido en ir desde o punto de lanzamento até a altura de 100 m, cando sobe, e 10 s é o que tarda en ir desde o punto de lanzamento até a altura de 100 m, cando baixa. Polo tanto, o tempo investido en ir desde a altura máxima até 100 m antes de chegar ao chan son 4 s.



8. LEIS DE NEWTON

A súa validez está limitada:

- Ao tamaño da partícula e á súa velocidade. Son aplicábeis desde tamaños astronómicos (estrelas, planetas, ...) até a dos átomos e para velocidades sensibelmente inferiores á da luz. Para tamaños atómicos e subatómicos e velocidades próximas á da luz hai que adaptar as ideas da Mecánica Cuántica e Relativista.
- A sistemas de referencia inerciais. Isto é: un sistema de referencia fixo ou con movemento rectilíneo e uniforme: os sistemas de referencia ligados á Terra⁴, considerámoslos inerciais debido a que o valor da súa aceleración é moi pequeno (a Terra está rotando e trasladándose ao redor do Sol).
- Imos facer referencia á dinámica dunha partícula, é dicir, á dun punto material de masa m e de dimensións desprezábais. Os resultados obtidos son aplicábeis a calquera corpo ríxido se o seu movemento é de traslación (isto significa que todos os seus puntos se trasladan con igual velocidade en módulo, dirección e sentido).

8.1. Primeira lei de Newton ou principio da inercia

Experimentalmente obsérvase que se a resultante das forzas que actúan sobre un corpo é nula, este pode encontrarse en repouso ou en m.r.u.

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0} \begin{cases} \text{repouso} \\ \text{m.r.u.} \end{cases}$$

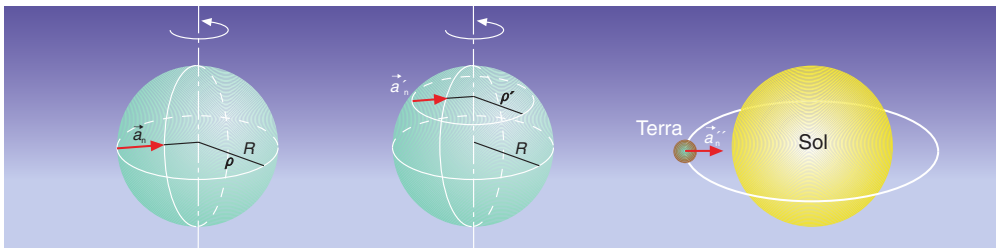
En consecuencia, se a situación dun corpo é a de repouso ou a de movemento rectilíneo e uniforme, a resultante das forzas que actúan sobre el é nula.

⁴ A aceleración que produce o movemento de rotación da Terra nun punto situado no seu Ecuador é:

$$\left. \begin{array}{l} v = \text{cte} \rightarrow \vec{a}_t = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \text{cte} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n \rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho} \\ v = \omega \cdot \rho \end{array} \right\} \rightarrow a_n = \omega^2 \cdot \rho$$

$$a_n = \omega^2 \cdot \rho = \frac{(2\pi)^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

Para outro punto da superficie da Terra que non sexa o Ecuador, a a_n é menor que $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ xa que ρ (radio de curvatura) é menor, chegando a ser cero nos Polos.



A aceleración da Terra a causa do seu movemento orbital ao redor do Sol é:

$$a_n = \left(\frac{2 \cdot \pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

8.2. Segunda lei de Newton ou principio fundamental da Dinámica

Se abandonamos no aire (mellor no baleiro) unha pedra de masa m , vemos que se pon en movemento, variando o seu estado inicial de repouso, aparecendo unha velocidade $\vec{v}$ que aumenta no tempo e, en consecuencia, posúe unha aceleración.

Por outro lado temos que sobre a pedra actúa a forza gravitatoria do peso, $\vec{G}$. Que relación hai entre a forza aplicada á pedra e a aceleración que esta adquire? A resposta a esta pregunta constitúe a segunda lei de Newton, que nos di que “a forza $\vec{F}$ aplicada a un corpo e a aceleración $\vec{a}$ que este adquire son directamente proporcionais, coincidindo esta constante de proporcionalidade coa masa m do corpo”:

$$\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m \rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Esta ecuación dá resposta ás preguntas da Dinámica. Así:

Que clase de forza produce un m.r.u?

Neste movemento a aceleración é nula xa que a velocidade é constante: $\vec{v} = \text{cte}$. Polo tanto, a resultante das forzas é nula: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Que clase de forza produce un m.r.u.v.?

Este movemento caracterízase por ser de aceleración ($\vec{a}$) constante. Como a masa dun corpo tamén a consideramos cte., temos que: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \text{cte} \cdot \text{cte} = \text{cte}$: a resultante das forzas aplicadas ten que ser constante en módulo, dirección e sentido.

Que clase de forza produce un m.c.u.?

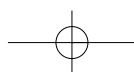
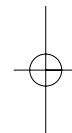
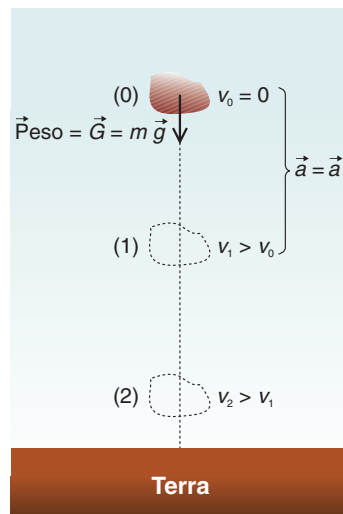
Un móbil con m.c.u. ten unha velocidade que é de módulo constante e de dirección variábel, que en todo momento é tanxente á circunferencia que describe. Esta variación de velocidade é causada por unha aceleración de compoñente tanxencial nulo ($a_t = \Delta v/t = 0$) e compoñente normal non nulo ($a_n = v^2/\rho$), de módulo constante e de dirección variábel:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n.$$

En consecuencia, a resultante das forzas que causan un m.c.u. é de módulo constante e de dirección

variábel, apuntando en todo momento cara ao centro da circunferencia que se describe:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n = \text{cte} \cdot \vec{u}_n$$



8.3. Terceira lei de Newton ou principio de acción e reacción

Se estando sobre uns patíns empuxamos unha parede, observamos que nos poñemos en movemento, variando o noso estado de repouso. En consecuencia, sobre nós actúa unha forza; forza que é exercida pola parede como reacción á que nós lle aplicamos. Estas dúas forzas posúen as características de ser:

- De igual módulo.
- De igual dirección.
- De sentido contrario.
- Exercidas entre os mesmos corpos,

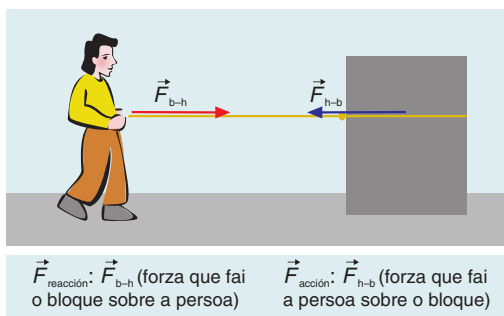
e coñécense como **forzas de acción e reacción**. En consecuencia, as forzas aparecen por parellas e teñen as características antes enunciadas. Isto constitúe a **terceira lei de Newton** e pode enunciarse da forma: “se un corpo A exerce unha forza sobre outro B (chamada acción), este responde sobre o primeiro con outra forza de igual módulo e dirección, pero de sentido contrario (chamada reacción)”:

$$-\vec{F}_{BA} = \vec{F}_{AB}$$

Á primeira vista parece que as forzas de acción e reacción deberían anularse entre si. No entanto isto non ocorre nunca, xa que os puntos de aplicación de ambas forzas son distintos, actuando sobre corpos distintos. Para aclaralo imos comentar uns exemplos:

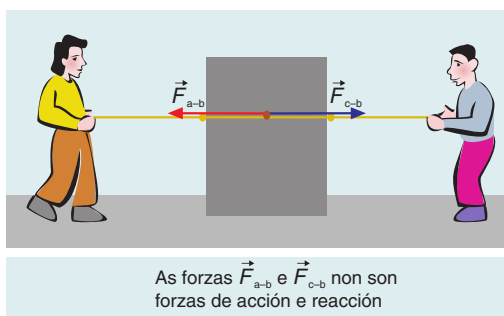
Unha persoa (h), que permanece fixa, tira dun bloque (b), poñéndoo en movemento.

A forza de acción é a que fai a persoa sobre o bloque, $\vec{F}_{h-b}$, e como esta forza é maior que a de rozamento á que está sometido o bloque, a resultante das forzas que actúan sobre este é distinta de cero, adquirindo unha aceleración. A forza de reacción á que fai a persoa é a que exerce o bloque sobre ela, $\vec{F}_{b-h}$, que se anula coa forza de rozamento que actúa sobre a persoa.



Dúas persoas (a e c) tiran con igual forza (módulo), dirección e sentido contrario sobre un mesmo bloque (b), sen movelo.

Estas dúas forzas ao estar aplicadas nun mesmo punto dan unha resultante nula, pero non son de acción e reacción: Non son exercidas entre os mesmos corpos.



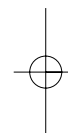
Pensemos agora no libro de Física que temos encima da mesa. Que forzas actúan sobre el? Teñen igual módulo, dirección e sentido contrario? Son de acción e reacción?



O libro está en repouso e, segundo a 1ª lei de Newton, a resultante das forzas que actúan sobre el ten que ser cero; o que significa que se trata de dúas forzas de igual módulo, dirección e sentido contrario. Porén non son de acción e reacción, xa que:

- Non son exercidas entre os mesmos corpos (non teñen os mesmos subíndices).
- Teñen o mesmo punto de aplicación.

Cales son as forzas de acción e reacción das debuxadas anteriormente?



8.4. Primeira e segunda lei de Newton en función da cantidade de movemento

Sabemos que se damos un mesmo impulso a unha bóla de madeira e a outra de ferro de igual volume, a de madeira lanzámola máis lonxe que a de ferro. Isto indícanos que o cambio na velocidade dun corpo non só depende da forza que se exerza sobre el, senón tamén do “masivo” que sexa.

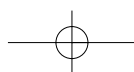
Defínese unha nova magnitude (que relaciona masa e velocidade), chamada **cantidade de movemento** ou **momento lineal**, $\vec{p}$, como: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

Pensemos nunha partícula de masa constante m , que posúe a velocidade $\vec{v}_0$ e cantidade de movemento $\vec{p}_0 = m \cdot \vec{v}_0$. Se unha forza $\vec{F}$ actúa sobre a partícula durante o tempo Δt , esta pasa a ter a velocidade $\vec{v}$ e a cantidade de movemento $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

A relación que existe entre a variación da cantidade de movemento, $\Delta \vec{p}$, da partícula e a forza, $\vec{F}$, que actúa durante o tempo Δt é:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Ao termo $\vec{F} \cdot \Delta t$ chámasele **impulso mecánico**.



A expresión anterior podémola escribir como: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, que cando o intervalo de tempo é

moi pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$) toma a forma diferencial: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

A esta expresión tamén chegamos estudando a variación da cantidade de movemento da partícula de masa constante m no tempo:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

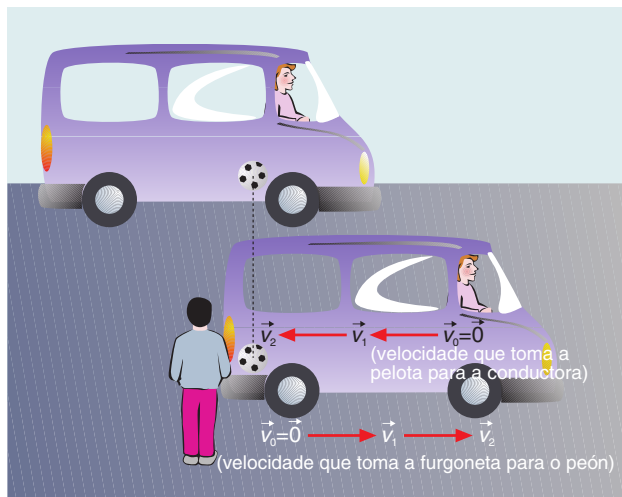
co que a expresión matemática da 2ª lei de Newton pode enunciarse como: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$: “a forza aplicada a unha partícula é igual á variación temporal da súa cantidade de movemento”.

Se $\vec{F}$ é nula, a variación temporal da cantidade de movemento é igual a cero: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$, e $\vec{p}$ é constante: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \dots$. Isto constitúe o **principio de conservación da cantidade de movemento**, que pode enunciarse dicindo que “se a resultante das forzas que actúan sobre unha partícula é nula, o seu momento lineal permanece constante”. Esta é outra forma de enunciar a primeira lei de Newton:

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0} \begin{cases} \nearrow \text{repouso ou m.r.u.} \\ \searrow \vec{p} \text{ constante} \end{cases}$$

8.5. As leis de Newton en sistemas non inerciais.

Forzas de inercia



Pensa nunha furgoneta na que hai unha pelota que se pode mover polo chan, sen rozamento ningún (é como se imaxinarmos a furgoneta sen teito e a pelota colgada dun fío desde un guinche). Cando a furgoneta arranca, a resultante das forzas que actúan sobre a pelota é nula e para un observador situado nun sistema inercial (un home na beirarrúa) verá que a pelota non se move: a furgoneta avanza cunha aceleración $\vec{a}$ e a pelota permanece en repouso fronte a el).

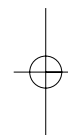
Pero para un observador que viaxa na furgoneta (sistema non inercial), ve como a pelota se vai cara atrás. Para este, a pelota non está en repouso. Segundo a leis de Newton, se á pelota que estaba en repouso non se lle aplica ningunha forza, continuará en repouso. No entanto, a persoa da furgoneta ve como a pelota vai cara atrás, poñéndose en movemento cunha aceleración $\vec{a}_i$, de modo que para ela non se cumpren as leis de Newton. Para que sigan sendo válidas as leis de Newton, o observador non inercial ten que introducir unha forza, chamada **forza de inercia**, que é de igual módulo e dirección, pero e de sentido contrario ao produto da masa do corpo, m , pola aceleración, $\vec{a}$, do sistema non inercial: $\vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_i = -m \cdot \vec{a}$.

Resumindo, diremos que as características das forzas de inercia son:

- Ser introducidas polo observador non inercial, sendo “misteriosas” para este observador.
- Ser ficticias ou irreais desde a perspectiva do observador inercial.
- Ser iguais a: $m \cdot \vec{a}_i$, sendo m a masa do corpo e $\vec{a}_i$ a aceleración do sistema non inercial, sendo $\vec{a}_i = -\vec{a}$.

Nun sistema non inercial non se cumpren as leis de Newton, xa que:

1. A pelota, sobre a que non actúa ningunha forza e inicialmente está en repouso, cando a furgoneta arranca, ponse en movemento (para o observador non inercial). Segundo a 1ª lei de Newton debería continuar en repouso xa que $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0}$. Este observador, para xustificar o observado, ten que introducir a forza de inercia.
2. Continuando co exemplo, a pelota adquire unha velocidade e, en consecuencia, hai unha aceleración. Polo tanto, por unha banda $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0}$ e, por outra, $\vec{a} \neq \vec{0}$, non cumpríndose a segunda lei de Newton. O observador non inercial ten que introducir a forza de inercia para que lle pareza que se cumpre a ecuación fundamental.
3. As forzas de inercia son virtuais, ficticias, que non se deben á interacción entre corpos, senón á aceleración do sistema non inercial de referencia, non cumpríndose a 3ª lei de Newton.



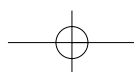
9. CONCEPTO DE TRABAJO

A lei fundamental da Dinámica en calquera das súas dúas formas: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, constitúe a base para a resolución dos problemas dinámicos. Calquera das magnitudes que aparecen nelas: forza, aceleración, cantidade de movemento etc, poden ser unha incógnita en función das outras como datos.

O cálculo de $\vec{p}$ mediante a ecuación anterior esixe coñecer $\vec{F}$ en función do tempo:

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \rightarrow \vec{p} = \int \vec{F}(t) \cdot dt$$

En moitos casos a $\vec{F}$ que actúa sobre unha partícula é función da posición, $\vec{r}$, caso das interaccións gravitatorias, electrostáticas etc., e non do tempo, polo que resulta conveniente definir unha nova magnitude que relacione forza e posición.



Cando unha forza $\vec{F}$ se despraza ao longo dun elemento de traxectoria $d\vec{s}$ (na figura AA', estando A e A' o suficientemente próximos de modo que podemos considerar $ds = |d\vec{r}|$), defínese o traballo efectuado pola forza $\vec{F}$ ao longo dese desprazamento infinitesimal $d\vec{s}$ como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

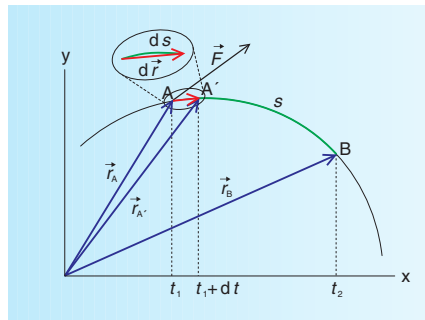
Se a forza percorre unha serie de elementos infinitesimais sucesivos, o traballo total (suma dos traballos elementais) obtémolo integrando a expresión anterior:

$$W_A^B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot \cos \alpha \cdot dr$$

Sendo α o ángulo formado entre $\vec{F}$ e $d\vec{r}$. Se $\vec{F}$ é constante e a traxectoria rectilínea (o que supón que F e $\cos \alpha$ sexan constantes), podemos escribir:

$$W_A^B = F \cdot \cos \alpha \int_{r_A}^{r_B} dr = F \cdot \cos \alpha (r_B - r_A)$$

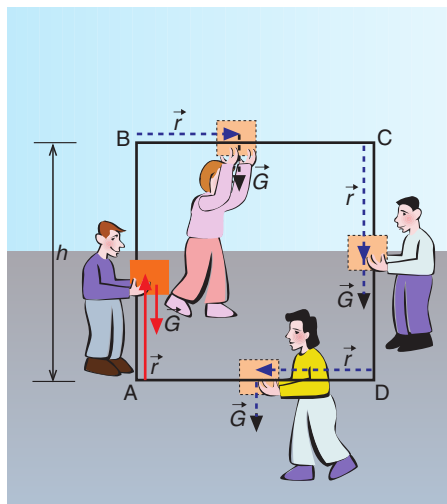
Como se ve na integral anterior, o valor do traballo depende das coordenadas do punto de orixe e destino e do camiño seguido pola forza entre eses dous puntos.



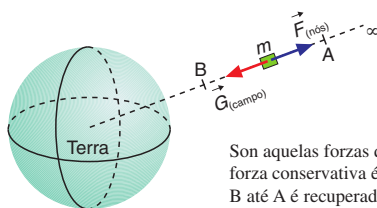
9.1. Traballo dunha forza conservativa

Hai un tipo de forzas para as que o traballo non depende do camiño percorrido por estas: son as chamadas **forzas conservativas**. Dise que unha forza é conservativa se o valor do traballo que desenvolve é independente do camiño seguido⁵. Isto supón que ao longo dunha liña pechada (ciclo) o traballo é nulo.

Un exemplo de forza conservativa é a forza gravitatoria. Para velo imos supoñer que se levanta verticalmente un corpo de masa m desde A até B; despois desprázase horizontalmente até C; logo báixase verticalmente até D e, por último, vólvese (tamén horizontalmente) ao punto de partida. O traballo feito pola forza do peso ao longo do ciclo é:



⁵



Son aquelas forzas que ao realizar un traballo en contra delas, este é totalmente recuperábel. Un caso de forza conservativa é o da forza gravitatoria: o traballo que facemos para levar un corpo de masa m desde B até A é recuperado cando este volve cara á Terra.

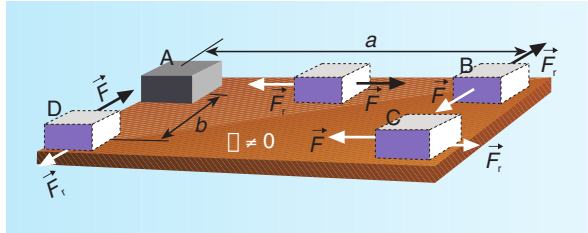
$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A}$$

$$W_{A \rightarrow A} = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

$$W_A^A = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} \cdot \cos 180^\circ + \int_B^C \vec{G} \cdot d\vec{r} \cdot \cos 90^\circ + \int_C^D \vec{G} \cdot d\vec{r} \cdot \cos 0^\circ + \int_D^A \vec{G} \cdot d\vec{r} \cdot \cos 90^\circ$$

$$W_{A \rightarrow A} = -G \cdot r_{AB} + 0 + G \cdot r_{CD} + 0 = 0$$

Un exemplo de forza **non conservativa** é a forza de rozamento. Para comprobalo basta ver se o traballo feito por esta forza entre dous puntos depende do camiño seguido ou se ese traballo ao longo dun ciclo é nulo.

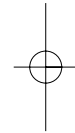


Supoñamos que arrastramos unha masa m situada sobre unha mesa ao longo do camiño indicado na figura. O traballo feito pola forza de rozamento ao longo do ciclo é:

$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A}$$

$$W_{A \rightarrow A} = F_r \cdot a \cdot \cos 180^\circ + F_r \cdot b \cdot \cos 180^\circ + F_r \cdot a \cdot \cos 180^\circ + F_r \cdot b \cdot \cos 180^\circ$$

$$W_{A \rightarrow A} = -2 \cdot F_r \cdot a + (-2 \cdot F_r \cdot b) \neq 0$$



Exercicio resolto

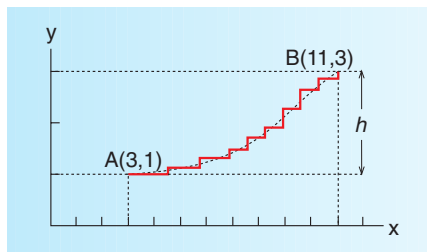
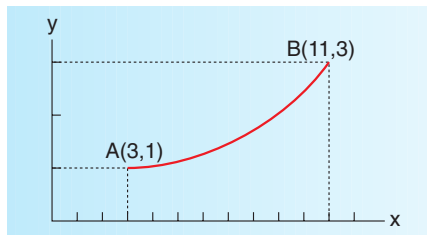
- Subimos un corpo de 30 kg desde o punto A(3,1) até o B(11,3), expresados en metros, seguindo o camiño indicado na figura. Que traballo fai a forza do peso?

Solución:

Como a forza do peso é unha forza conservativa, o traballo que desenvolve non depende para nada do camiño seguido; só depende das posicións de partida e chegada. Isto pódese visualizar descompoñendo a traxectoria curvilínea por outra en “escaleira”. Como a forza do peso é vertical, o ángulo que esta forma co desprazamento horizontal é de 90° sendo, nesta dirección, o traballo nulo.

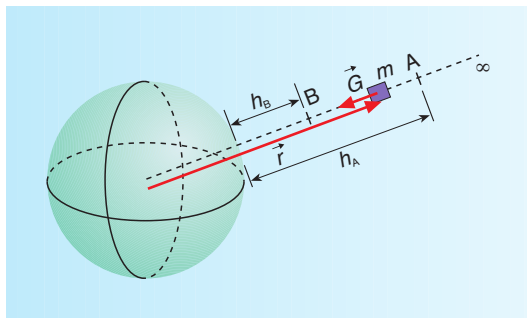
$$W_{A \rightarrow B} = \vec{G} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{G}_y \cdot (\Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y) = G_y \cdot \Delta r_x \cdot \cos 90^\circ + G_y \cdot \Delta r_y \cdot \cos 180^\circ$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 180^\circ = 30 \cdot 9,8 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ \rightarrow W_{A \rightarrow B} = -588 \text{ J}$$



9.2. Traballo dunha forza conservativa e enerxía potencial

O traballo feito por unha forza conservativa, como por exemplo o traballo da forza do peso cando unha masa m vai desde o infinito até un punto A, é independente do camiño seguido e correspóndelle un único valor. A este valor de traballo, cambiado de signo, dáselle o nome de **enerxía potencial** de A: $W_{\infty \rightarrow A}^A = -E_{pA}$. Fixémonos en que:



- $W_{\infty \rightarrow A} > 0$: a forza do peso e o desprazamento teñen o mesmo sentido.
- $E_{pA} < 0$: debido á posición, o corpo ten menos capacidade de realizar traballo (enerxía) en A que no infinito, e se por convenio se toma $E_{p\infty} = 0$ resulta que $E_{pA} < 0$.

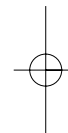
De aí que apareza o signo menos que temos na igualdade: $W_{\infty \rightarrow A} = -E_{pA}$.

Para outro punto B temos: $W_{\infty \rightarrow B} = -E_{pB}$.

O traballo feito pola forza do peso entre A e B podémolo calcular como a diferenza entre os traballos anteriores: $W_{A \rightarrow B} = W_{\infty \rightarrow B} - W_{\infty \rightarrow A}$.

En termos de enerxía potencial escribimos: $W_{A \rightarrow B} = (-E_{pB}) - (-E_{pA}) = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p$.

Esta expresión dinos que a diferenza de enerxía potencial dunha partícula entre dous puntos A e B dun campo de forzas conservativo é igual ao traballo, con signo negativo, que realizan as forzas do campo para levar a esta partícula desde o punto A até o B.

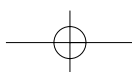


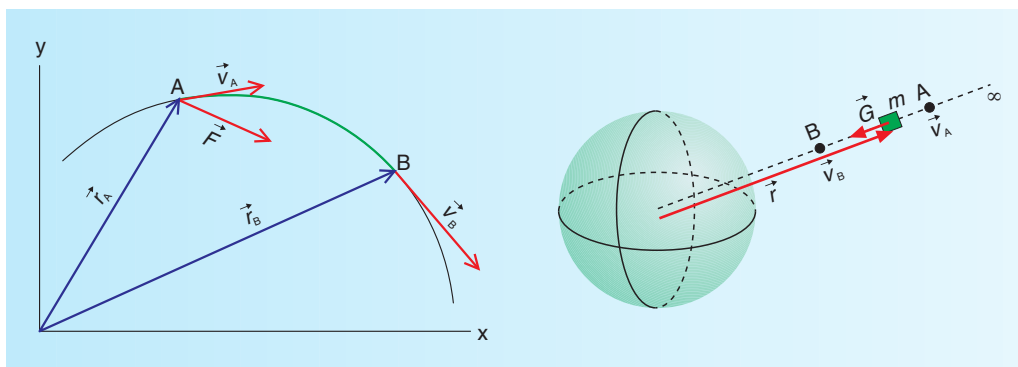
9.3. Traballo e enerxía cinética

En xeral, para saber o traballo que unha forza fai, é necesario coñecer a forza en función da posición: $W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Cando non temos esta información podemos relacionar o traballo coa variación da enerxía cinética.

Todos sabemos que un corpo que se move cunha velocidade $\vec{v}$ pode realizar un traballo: pode desprazar ou deformar a outro corpo. Por outro lado pensemos nun amigo, ao que non lle arranca a moto: empuxámolo cunha forza $\vec{F}$ ao longo dun percorrido realizando un traballo. En ambos casos se produce:

- Unha variación da velocidade ($\Delta \vec{v}$).
- Un traballo (W).





Estas magnitudes deben de estar relacionadas, xa que son aspectos diferentes dunha mesma interacción. A relación que hai entre traballo e velocidade é:

$$W_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Á expresión $\frac{1}{2} m v^2$ chámasele **enerxía cinética**, E_k , e con esta simboloxía podemos escribir:

$$W_A^B = E_{k_B} - E_{k_A} = \Delta E_k$$

A variación de enerxía cinética que unha partícula de masa m experimenta cando sobre ela actúa unha forza $\vec{F}$ váinos permitir coñecer o traballo que esta forza desenvolve.

Recordemos que a igualdade anterior se cumpre para as forzas conservativas e non conservativas. Pensemos nunha pedra que lanzamos verticalmente cara arriba dentro do campo gravitatorio terrestre. Se se ten en conta o rozamento co aire, as forzas que actúan sobre o corpo son: a forza do peso e a forza de rozamento, sendo o $W_{\text{total}} = W_{\text{peso}} + W_{F_{\text{rozamento}}} = \Delta E_k$. Como o $W_{F_{\text{conservativa}}} = -\Delta E_p$ resulta que: $W_{\text{total}} = -\Delta E_p + W_{F_{\text{non conservativa}}} = \Delta E_k \rightarrow W_{F_{\text{non conservativa}}} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_{\text{mecánica}}$. O traballo feito polas forzas non conservativas é igual á variación da enerxía mecánica.

Ao longo dun ciclo, cando a pedra regresa ao punto de partida, o $W_{\text{total}} = W_{F_{\text{non conservativa}}} = \Delta E_k < 0$ (a velocidade final no punto de lanzamento é menor que a inicial: a forza de rozamento oponse ao movemento, sendo o seu traballo negativo).

9.4. Conservación da enerxía mecánica

A suma da enerxía cinética e da enerxía potencial recibe o nome de **enerxía mecánica**. Cando a forza que actúa sobre unha partícula é conservativa, podemos obter o traballo feito entre dous puntos como a variación da enerxía cinética ou como a variación da enerxía potencial:

$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= \Delta E_k = E_{k_B} - E_{k_A} \\ W_A^B &= -\Delta E_p = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} E_{k_B} - E_{k_A} &= -(E_{p_B} - E_{p_A}) \\ E_{k_B} - E_{k_A} &= -E_{p_B} + E_{p_A} \\ E_{k_B} + E_{p_B} &= E_{k_A} + E_{p_A} = \text{cte.} \end{aligned}$$

Segundo a expresión anterior temos que, cando as forzas son conservativas, a enerxía mecánica dunha partícula permanece constante.

Exercicio resolto

- Lanzamos verticalmente e cara arriba unha pedra de 2 kg cunha velocidade de 6 m/s, retornando ao punto de partida cunha velocidade de 4 m/s. Calcula: a) o traballo da forza do peso e b) o traballo da forza de rozamento.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } W_A^A &= W_A^B + W_B^A = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{G} \cdot d\vec{r} \\ W_A^B &= \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

A forza do peso é unha forza conservativa e o traballo dunha forza conservativa ao longo dun ciclo é nulo:
 $W_{\text{peso}} = 0 \text{ J}$.

- b) O traballo total podémolo relacionar coa variación de enerxía cinética:

$$W_{\text{total}} = \Delta E_k = E_{k_f} - E_{k_o} \rightarrow W_{\text{total}} = 1/2 \cdot 2 \cdot 4^2 - 1/2 \cdot 2 \cdot 6^2 \rightarrow W_{\text{total}} = -20 \text{ J}$$

Por outra banda, o traballo total é igual á suma do traballo desenvolto polas forzas conservativas e non conservativas, co que podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{total}} &= W_{F \text{ conservativa}} + W_{F \text{ non conservativa}} \\ W_{F \text{ conservativa}} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow W_{F \text{ non conservativa}} = W_{F \text{ rozamento}} = W_{\text{total}} = -20 \text{ J}$$

O traballo é negativo porque a forza de rozamento se opón ao movemento, diminuindo a enerxía mecánica da pedra.

