Inecuaciones

74 Resuelve esta inecuación: $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x+4}{x^2-2x+1}\geq\dfrac{3-x}{x^2-x}+\dfrac{1}{x-1}$

Solución

Pasamos todos los términos a un miembro de la inecuación: $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x+4}{x^2-2x+1}-\dfrac{3-x}{x^2-x}-\dfrac{1}{x-1}\geq 0$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores. Para ello, primero los factorizamos.

$x^2-2x+1=(x-1)^2$ $\qquad$ $x^2-x=x(x-1)$

$$\frac{3}{x}-\frac{x+4}{(x-1)^2}-\frac{3-x}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}\geq 0$$

$$\text{m.c.m.}\left(x^2-2x+1, x^2-x, x-1\right)=x(x-1)^2$$

Calculamos las fracciones algebraicas equivalentes reducidas a común denominador y operamos.

$$\frac{3(x-1)^2}{x(x-1)^2}-\frac{x(x+4)}{x(x-1)^2}-\frac{(3-x)(x-1)}{x(x-1)^2}-\frac{x(x-1)}{x(x-1)^2}\geq 0$$

$$\rightarrow \frac{3x^2-6x+3-x^2-4x+x^2-4x+3-x^2+x}{x(x-1)^2}\geq 0\rightarrow\frac{2x^2-13x+6}{x(x-1)^2}\geq 0\rightarrow\frac{2(x-6)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x(x-1)^2}\geq 0$$

Estudiamos el signo del cociente, teniendo en cuenta que es positivo si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo.

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right)$	$(1,6)$	$(6,+\infty)$
$2(x-6)\left(x-\frac{1}{2}\right)$	+	+	−	−	+
$x(x-1)^2$	−	+	+	+	+
$\dfrac{2(x-6)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x(x-1)^2}$	−	+	−	−	+

Como en la inecuación aparece el signo $\geq$, la solución debería está formada por los intervalos en los que el cociente toma un valor positivo o 0. Sin embargo, en este caso, 0 anula al denominador y como no se puede dividir por cero, 0 no es parte de la solución.

Por tanto, la solución es: $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[6,+\infty)$

Ahora tú

75 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{4-x}{2x-x^2}-\dfrac{x-6}{x^2-4x+4}\leq\dfrac{2}{x-2}$

b) $\dfrac{x}{2-x}-\dfrac{x+1}{x^2-4}\geq\dfrac{1}{x-2}$

c) $\dfrac{x^2+6x+9}{3x^2+12x+9}-\dfrac{3+x}{x^2+x}>\dfrac{1-x}{x}$