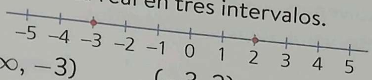
Inecuaciones polinómicas de grado superior a 1

Para resolver inecuaciones como $2x - x^2 \leq 3x - 6$:

1. Hallamos las soluciones de la ecuación correspondiente.

   $2x - x^2 = 3x - 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = -3, x = 2$

   Estos puntos dividen la recta real en tres intervalos.



$(-\infty, -3)$ $(-3, 2)$ $(2, +\infty)$

2. Para saber cuáles son los intervalos solución, elegimos un valor que pertenece a cada intervalo y comprobamos si cumple o no la desigualdad inicial.

   En $(-\infty, -3)$: $x = -4 \rightarrow 2 \cdot (-4) - (-4)^2 \leq 3 \cdot (-4) - 6 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución.

   En $(-3, 2)$: $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 \leq 3 \cdot 0 - 6 \rightarrow (-3, 2)$ no es solución.

   En $(2, +\infty)$: $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10 - 10^2 \leq 3 \cdot 10 - 6 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución.

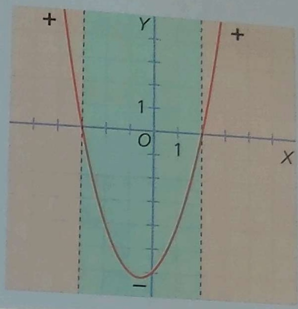
   En este caso, como en la inecuación aparece el signo $\leq$ debemos incluir los extremos de estos intervalos.

   Luego la solución es: $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

Las **inecuaciones polinómicas de grado superior a 1** son aquellas que están formadas por polinomios de grado mayor que 1.

Presta atención

Una manera de identificar el signo correspondiente a cada intervalo es hacerlo gráficamente. Así, si representamos $f(x) = x^2 + x - 6$ tenemos:



Inecuaciones racionales

Para resolver inecuaciones con fracciones algebraicas, como $1 - \frac{2}{x+1} \leq \frac{1}{x^2-1}$, pasamos todos los términos a uno de los miembros, dejando 0 en el otro. Obtenemos así una única fracción algebraica, de la que estudiamos su signo, que varía según los signos del numerador y del denominador.

1. Pasamos todos los términos al primer miembro y operamos.

$$1 - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \leq 0 \rightarrow \frac{(x^2-1) - 2(x-1) - 1}{x^2-1} \leq 0 \rightarrow \frac{x^2-2x}{x^2-1} \leq 0$$

2. Factorizamos el numerador y el denominador.

$$\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

3. Estudiamos el signo del cociente en cada intervalo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x(x-2)$	+	+	−	−	+
$(x+1)(x-1)$	+	−	−	+	+
$\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-1)}$	+	−	+	−	+

Como no se puede dividir por 0, no incluimos los valores que anulan el denominador, en este caso, −1 y 1. Además, como en la inecuación aparece el signo $\leq$ debemos incluir los extremos de los intervalos.

Por tanto, la solución es: $x \in (-1, 0] \cup (1, 2]$

Las **inecuaciones racionales** son aquellas en las que aparecen fracciones algebraicas en alguno de sus miembros.

Presta atención

Para averiguar el signo de un producto o un cociente, podemos comprobar el signo de cada factor teniendo en cuenta que $x - a$ es negativo para valores menores que a y positivo para valores mayores que a.

También podemos tomar un valor en cada intervalo.