EXERCICIOS DE XEOMETRÍA

1) Calcular as ecuacións paramétricas, a ecuación continua, e as ecuacións xerais da recta que para por P(2,-1,3) e ten como vector director $\vec{d} = (1,-1,4)$

Solución

Ec. vectorial : (x,y,z) = (2,-1,3) + α(1,-1,4)

Ec. paramétricas:	Ec. continua
x= 2 + α y= -1 - α z= 3 + 4α	$x-2=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{4}$ Ecuacións xerais x + y -1 = 0 4x - z - 5= 0

2) Calcular a ecuación continua da recta que pasa polo punto P(-1,1,3) e é paralela á recta s.

s: $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Solución

Imos obter as ecuacións paramétricas de s

(1) z = 1 - 2x + y ⇨ (2) x + y - 1 + 2x - y = 0 ⇨ 3x= 1 ⇨ x= - 1/3 ⇨ (1) z = 5/3 + y

Así pois cada solución é da forma (-1/3, y, 5/3 + y)

Polo que :

un punto da recta (-1/3, 0 , 5/3)

un vector director $\vec{v}$ = (0,1,1) polo que a recta r non admite ecuación continua ao ser 0 un dos compoñentes do vector director.

3) Calcular as ecuacións paramétricas e a ecuación xeral do plano π que pasa polos punto A(-1,0,2) e B(0,3,-1), e que é paralelo á recta r:

$$\mathbf{r:}\ \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u>

Ecuación vectorial de r

(1) x = y (2) y - 2y + z - 1 = 0 ⇨ z = 1 + y

Así pois cada solución é da forma (α, α, 1+ α)

polo que a ecuación vectorial da recta é (x , y , z) = (0 , 0 , 1) + α(1,1,1)

ou sexa que (1,1,1) é un vector director da recta, e polo tanto do plano (xa que a recta é paralela ao plano)

Así pois temos

Punto do plano A(-1,0,2)

Vectores directores do plano $\overrightarrow{AB}$ = (1,3,-3) e $\vec{v}$ = (1,1,1)

Ecuacións paramétricas:	Ecuación xeral
x = -1 + α + β y = α + 3β z = 2 + α - 3β	$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 3x-2y-z+3=0

4) Determina as ecuacións xerais dos planos XY, XZ, e YZ.

<u>Solución</u>

Plano XY z = 0, plano XZ y = 0 , plano YZ x = 0

5) Determina as ecuacións xerais dos eixes de coordenadas.

Eixe X	Eixe Y	Eixe Z
z=0	z=0	x=0
y=0	x=0	y=0

6) Estudar a posición relativa, segundo os valores do parámetro α , dos planos:

π: $3x + \alpha y + z = 3$

π´: $2\alpha x - y + z = 5$

π´´: $4x + 3\alpha y + z = \alpha$

<u>Solución</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & -1 & 1 \\ 4 & 3\alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 1 & 3 \\ 2\alpha & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Calculemos o rango de A segundo os valores de α

$|A| = -3 + 4\alpha + 6\alpha^2 + 4 - 9\alpha - 2\alpha^2 = 4\alpha^2 - 5\alpha + 1$

$|A| = 0$ se $\alpha = 1$ ou $\alpha = 1/4$

Entón

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 1/4$ ⇨ Rango(A) = 3 = Rango (A*) ⇨ SCD, os tres planos córtanse nun punto

Se $\alpha = 1$

Podemos comprobar que Rango(A) = 2 = Rango (A*) ⇨ SCI, os tres planos córtanse nunha recta

Se $\alpha = 1/4$

Podemos comprobar que Rango(A) = 2 e Rango (A*) = 3 ⇨ SI, os tres planos córtanse dous a dous (xa que non hai planos paralelos)

7) Estudar, segundo os valores do parámetro m, a posición relativa da recta

$$\textbf{r:}\ \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

e do plano π: x + my - z = 3

<u>Solución</u>

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$ A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 & 3 \end{pmatrix}$

|A| = 2- m

Se m $\neq$ 2 Rango(A) = 3 = Rango (A*) ⇨ SCD, a recta corta ao plano nun punto

Se m = 2 podemos comprobar que Rango(A) = 2 = Rango (A*) ⇨ a recta está contida no plano.

8) Dadas as rectas :

r : x= y= z

s: $x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$

a) Estudar a súa posición relativa.

b) Calcular a ecuación da recta que corta a r e é paralela a t: (x,y,z)= (1,2,3) + α(1,2-1)

<u>Solución</u>

a) Un vector director de r é $\vec{v}$ = (1,1,1) e un punto A(0,0,0)

Un vector director de s é $\vec{w}$ = (1,2,2) e un punto B(1,2,0) e $\overrightarrow{AB}$ = (1,2,0)

M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ten rango 3, polo que as rectas de cruzan.

b) Haberá infinitas rectas que corten a r e sexan paralelas a t, basta con tomar o vector director de t $\vec{v}$ = (1,2,-1), e un punto calquera de r

9) Determinar a posición relativa das rectas:

r: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = \ \ t \\ z = -1-t \end{cases}$ **s:** $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$

Solución

Obtemos as ecuacións xerais de r : $\begin{cases} x-y=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$ A* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ Para determinar o rango podemos eliminar a 1ª fila (2ª + 4ª), e vemos que rango(A) = rango(A*) = 3 polo que o sistema ten solución única e as rectas se cortan nun punto.

10) Calcular o ángulo que forman os vectores $\vec{u} = (2,-1,2)\ e\ \vec{v} = (1,-1,0))$

Solución

cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ = $\dfrac{2+1}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ polo que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ = π/4

11) Dados os vectores $\vec{u} = (-2,-1,2)\ e\ \vec{v} = (1,-1,1))$**, calcular** $\vec{u}\ x\,\vec{v}$

Solución

$\vec{u}\ x\,\vec{v}$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = $-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ = (1,4,3)

12) Calcular a área do triángulo de vértices A(2,1,0) B(1,0,-1) C(0,2,1).

Solución

$\overrightarrow{AB}$ = (-1,-1,-1) $\overrightarrow{AC}$ = (-2,1,1)

$\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{AC}$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = (0,3,-3) ⇨ | $\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{AC}$ | = $\sqrt{18}$

polo que a area do triángulo é $\sqrt{18}$/2

13) Calcular o volume do tetraedro de vértices O,A,B,C, sendo O a orixe de coordenadas, e A,B,C os puntos onde o plano π: 2x - 3y + 4z -12= 0 corta aos eixes de coordenadas.

Solución

Punto de corte do plano co eixe X (y=0,z=0) é (6,0,0)

Punto de corte do plano co eixe Y (x=0,z=0) é (0,-4,0)

Punto de corte do plano co eixe Z (x=0,y=0) é (0,0,3)

O produto mixto, $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = -72. Así o volume do paralelepípedo que forman os tres vectores é 72 u^3, e o do tetraedro pedido 72/6 = 12 u^3.

14) Calcular as ecuacións normal e xeral do plano π que pasa polo punto P(1,2,3) e que é perpendicular á recta r: $\begin{cases} x-2y=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

Solución

Ecuacións paramétricas de r $\begin{cases} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$ polo que un vector director da recta é (2,1,-1), que será un vector normal ao plano. Como temos un punto do plano, a ecuación normal será: $\pi \equiv 2(x-1) +1(y-2) -1 (z-3) = 0$

e a ecuación xeral $\pi \equiv 2x +y-z-1 = 0$

15) Calcular o ángulo formado pola recta r: $\begin{cases} 2x-y+z+3=0 \\ y+3z-1=0 \end{cases}$ **e o eixe Z.**

Solución

Un vector director da recta $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{k} - \vec{i} - 6\vec{j} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ = (-4,-6,2)

Un vector director do eixe Z $\vec{k}$ = (0,0,1)

cos (r,Z) = | cos ($\vec{v}, \vec{k}$) | = $\left| \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{56}\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{56}}$ polo que $\left(\widehat{r,Z}\right)$ = 74,30º

16) Calcular o ángulo que forma o plano XY co plano π: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + 3\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$

<u>Solución</u>

Dous vectores directores do plano π son (2,1,0) e (3,-1,1). Un vector normal ao plano π é $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = (1,-2,-5) = $\vec{v}$. Un vector normal ao plano XY é (0,0,1)= $\vec{k}$

$\cos\left(\widehat{\pi, XY}\right)$ = |cos ($\vec{v}$, $\vec{k}$)|= $\left| \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} \right|$ = $\dfrac{5}{\sqrt{30}\sqrt{1}} = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$ polo que $\left(\widehat{\pi, XY}\right)$ = 24,09º

17) Consideremos o plano π: αx + z - 2=0

a) Discutir, segundo os valores do parámetro α, a posición relativa co plano XY.

b)Calcular os valores de α para os que a recta perpendicular a π pasando pola orixe de coordenadas forma un ángulo de π/3 co plano XY.

<u>Solución</u>

A* = $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

a) Se α ≠ 0 rango(A) = rango(A*) = 2 ⇨os planos córtanse nunha recta

Se α = 0 rango(A) = 1 e rango(A*) = 2 os planos son paralelos

b) Un vector normal ao plano XY é (0,0,1)= $\vec{k}$

Un vector normal ao plano π é $\vec{n}$ = (α,0,1), será un vector director da recta r

$\text{sen}\left(\widehat{r, XY}\right)$ = |cos ($\vec{n}$, $\vec{k}$)|= $\left| \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|} \right| = \left| \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}\sqrt{1}} \right| = \left| \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

de onde $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En ambos os dous casos ao resolver temos que α = ± $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

18) Calcular a distancia entre o punto P(3,-2,1) e o plano *π*: 2x - 3y - z + 2 = 0

Solución

d(p,π) = $\left|\dfrac{2\cdot 3+(-3)(-2)+(-1)1+2}{\sqrt{4+9+1}}\right| = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$

19) Calcular a distancia do punto P(1,1,-3) á recta r: $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$

Solución

Vemos que o punto P non pertence á recta r. Calculamos un punto calquera da recta, por exemplo Q(2,5,0), e un vector director da recta $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = (-1,-2,1) = $\vec{v}$

Así d(P,r) = $\left|\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}\right| = \dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{6}} = \sqrt{20}u$ xa que $\overrightarrow{PQ}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ = (10,-4,2)

20) Dados os planos

***π*: 2x - y + 3z = 1**

***π´*: -4x + 2y - 6z + 1= 0**

Determinar a súa posición relativa e calcular, de ser o caso, a distancia entre eles.

Solución

Os planos son claramente paralelos. A distancia entre eles será a distancia dun punto dun deles ao outro, Un punto de π é (0,-1,0)

d(π,π´) = $\left|\dfrac{2(-1)+1}{\sqrt{16+4+36}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{56}} = \dfrac{1}{2\sqrt{14}}$ u.

21) Dada a recta r: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ **e o plano π: 3x - z + 1 = 0**

determina a súa posición relativa e calcula a distancia d(r,π).

<u>Solución</u>

Consideremos a matriz dos coeficientes e a ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Dado que rango(M) = 2 e rango (M*)= 3 o sistema non ten solución, recta e plano son paralelos. A distancia será a distancia dun punto de r ao plano

P(0,0,3)

$$d(r,\pi) = \left|\frac{(-1)3+1}{\sqrt{9+1}}\right| = \frac{2}{\sqrt{10}} \text{ u}$$

22) Dadas as rectas r: $x - 2 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ **e s:** $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ **determina a súa posición relativa e calcula a distancia d(r,s).**

<u>Solución</u>

Pr(2,0,1) $\vec{v}$ = (1,2,-1)

Ps(0,1,0) $\vec{w}$ = (1,2,-1)

É evidente que son paralelas

$$d(r,s) = d(Ps,r) = \left|\frac{|\overrightarrow{\Pr Ps} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{\sqrt{1+9+25}}{\sqrt{1+4+1}}\right| = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} \text{ u}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1,-3,-5)$$

23) Dadas as rectas r: $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z}{2}$ e s: $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t \\ z = 3t-2 \end{cases}$ determina a súa posición relativa e calcula a distancia d(r,s).

<u>Solución</u>

Pr(1,0,0) $\vec{v}$ = (2,1,2)

Ps(-1,0,-2) $\vec{w}$ = (1,2,3)

rango $\left(\overrightarrow{\mathrm{Pr}Ps}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ = rango $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ = 3 pois o seu determinante é -4, distinto de cero, polo que as rectas crúzanse.

d(r,s) = $\left| \frac{\left[\overrightarrow{\mathrm{Pr}Ps}, \vec{v}, \vec{w}\right]}{\vec{v} x \vec{w}} \right| = \frac{4}{\sqrt{26}}$ pois $\vec{v}$ x $\vec{w}$ = (-1,-4,3)

24) Calcular o valor de m para que os puntos A(2,1,-2) B(1,1,1) e C(0,1,m) queden na mesma liña. Calcular tamén o punto simétrico do punto P(-2,0,0) respecto da recta que pasa polos puntos A e B.

<u>Solución</u>

$\overrightarrow{AB}$ = (-1,0,3) , $\overrightarrow{BC}$ = (-1,0,m-1)

É evidente que estes dous vectores son proporcionais se m = 4.

Para resolver a segunda cuestión, a ecuación da recta que pasa por A e B

r: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1 \\ z = 1+3t \end{cases}$; un punto calquera de r é da forma (1-t,1,1+3t)

Se I e o punto proxección ortogonal de P sobre r entón $\overrightarrow{PI} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PI} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{PI}$ = (3-t,1,1+3t) $\overrightarrow{AB}$ = (-1,0,3)

$\overrightarrow{PI} \bullet \overrightarrow{AB}$ = 10t ⇨ t = 0 ⇨ I = (1,1,1)

Se P´ é o punto simétrico buscado entón $\vec{PI} = \vec{IP'}$

(3,1,1) = (x-1,y-1,z-1)⇨ P´= (4,2,2)

25) Dadas as rectas r: $x = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$ **e s:** $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

a) Posición relativa das dúas rectas.

b) Ecuación do plano que contén a r e é paralelo a s.

<u>Solución</u>

a) Pr= (0,1,2) $\vec{vr}$ = (1,-1,-3) Ps= (1,3,1) $\vec{vs}$ = (1,2,1) $\vec{\text{Pr}Ps}$ = (1,2,-1)

rango$\left(\vec{\text{Pr}Ps}, \vec{v}r, \vec{v}s\right)$ = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ = 3 pois o determinante é distinto de 0, polo que as rectas se cruzan.

b) $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 0 ⇨ 5x-4y+3z-2=0

26) Os puntos A(1,1,0) B(0,1,1) e C(-1,0,1) son vértices consecutivos do paralelogramo ABCD.

a) Calcula as coordenadas do vértice D

b) Calcula a área do paralelogramo.

c) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto B e é perpendicular á recta que pasa por A e C.

<u>Solución</u>

a) $\vec{BC} = \vec{AD}$ ⇨ (-1,-1,0) = (x-1,y-1,z) ⇨ D = (0,0,0)

b) Área do paralelogramo | $\vec{AD}$ x $\vec{AB}$ | = $\sqrt{3}$ pois $\vec{AD}$ x $\vec{AB}$ = (-1,1,-1)

c) $\vec{AC}$ = (-2,-1,1) será un vector normal ao plano que pasa por B(0,1,1)

entón o plano será -2(x) -1(y-1) +1(z-1) = 0 ⇨ -2x-y+z= 0

27) Dadas as rectas s: $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ **e r:** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

a) Posición relativa das dúas rectas.

b) Calcular, se é posible, a ecuación do plano que contén a r e s.

c) Ángulo formado por r e s.

<u>Solución</u>

a) Pr= (1,2,2) $\vec{vr}$ = (0,1,2) Ps= (0,-1,-2) $\vec{vs}$ = (1,2,2) $\overrightarrow{\mathrm{Pr}Ps}$ = (-1,-3,-4)

rango $\left(\overrightarrow{\mathrm{Pr}Ps}, \vec{v}r, \vec{v}s\right)$ = rango $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ = 2 pois F3 = -F1 -F2

Vemos ademais que as rectas non son paralelas, polo que se cortarán nun punto.

b) $\begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 0

c) cos (r,s) = cos ($\vec{vr}$, $\vec{vs}$) = $\left|\frac{v\vec{r} \times v\vec{s}}{|v\vec{r}||v\vec{s}|}\right|$ = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ u ⇨ o ángulo é de 26,565º

28) Que relación ten que existir entre a e b para que os vectores (a,b,1), (-b,-1,a) e (-a,b,a) estean sobre un mesmo plano.

<u>Solución</u>

Para estar no mesmo plano teñen que ser linealmente dependentes, polo tanto

$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ -b & -1 & a \\ -a & b & a \end{vmatrix}$ = 0 ⇔ $-a^2 - b^2 - a^2b - a - a^2b + b^2a = 0$ ⇔ $-a^2 - b^2 - 2a^2b - a + b^2a = 0$

29) Dados os puntos A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2) e D(1,2,0)

a) Probar que non son coplanarios.

b)Ecuación do plano π determinado polos puntos A,B e C

c) Calcular a distancia do punto D ao plano π.

Solución

a) Se fosen coplanarios det ($\vec{AB}$, $\vec{AC}$ $\vec{AD}$) = 0, pero este determinante vale 7, polo que non son coplanarios.

b) $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$

c) $d(D,\pi) = \left| \dfrac{2-6-1}{\sqrt{4+9+1}} \right| = \dfrac{7}{\sqrt{14}}$ u

30)Dado o plano π: 3x + 2y - z + 10 = 0, e o punto P(1,2,3)

a) Achar a ecuación da recta r perpendicular ao plano π, que pase polo punto P.

b) Achar o punto Q intersección de π e r.

c) Calcular o punto R intersección de π co eixe OY.

d) Achar a área do triángulo P,Q,R.

Solución

a) $\vec{vr} = (3,2,-1)$ P(1,2,3)

r: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

b) $3(1+3\lambda) + 2(2+2\lambda) - (3-\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q = (-2,0,4)$

c) Eixe OY x=0, z=0 $\Rightarrow$ 2y=-10 $\Rightarrow$ y= -5 $\Rightarrow$ R = (0,-5,0)

d) Área = 1/2 $|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \dfrac{\sqrt{630}}{2}$ u^2

31) Calcular a distancia entre a recta r: x + 1 = y = z - 3, e a recta s determinada polo punto (1,-1,3) e o vector director $\vec{v} = (1,0,3)$

<u>Solución</u>

$$d(r,s) = \left| \frac{\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}, \vec{w}\right]}{\vec{v} x \vec{w}} \right| = \frac{8}{\sqrt{14}} \text{ u}$$

32) Calcular o punto do plano 2x + y - z = 1 máis próximo ao punto (1,2,-3).

<u>Solución</u>

Recta ⊥ ao plano por (1,2,-3) $r \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

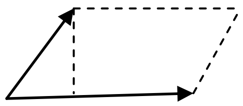
Punto de intersección: 2(1+2λ) + 2 + λ +3+λ = 1 ⇨ λ = -2 ⇨ punto (-1,1,-2)

33) A proxección do vector $\vec{v}$ sobre o vector $\vec{u}$ vale 2. O módulo do vector $\vec{u}$ vale 3 e o módulo do vector $\vec{v}$ vale 5. Canto vale a proxección do vector $\vec{u}$ sobre o vector $\vec{v}$?. Canto vale a área do paralelogramo que forman $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

<u>Solución</u>

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| prox_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| prox_{\vec{v}} \vec{u}$

3•2 = 5x ⇨ x= 6/5



$|\vec{v}|^2 = h^2 + \; prox_{\vec{u}} \vec{v}^{\,2}$ ⇨ h= $\sqrt{21}$ ⇨ Área = $3\sqrt{21}$ u^2

34) Sexa r a recta que pasa polos punto (2,2,4) e (-1,1,2) e π o plano que pasa polos puntos (1,0,1) , (1,-1,0) e (3,0,0).

a) Son paralelos plano e recta?

b) Calcular o punto P de intersección da recta e o plano.

c) Calcular o ángulo que forman a recta e o plano.

d) Determinar os puntos, s e t, da recta r que distan catro unidades do plano π.

e) Achar a distancia do punto P ao eixe OX.

Solución

a) $\overrightarrow{vr}$ = (-3,-1,-2)

$\overrightarrow{w_1\pi}$ = (2,1,0) $\overrightarrow{w_2\pi}$ = (2,0,-1)

Ecuación do plano π≡ $\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ⇨ π≡ x - 2y +2z - 3 = 0

$\overrightarrow{n\pi}$ = (1,-2,2) $\overrightarrow{n\pi} \bullet \overrightarrow{vr}$ = -5 ≠ 0 polo que r e π non son paralelos.

b) π≡ x - 2y +2z - 3 = 0 r ≡ $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-4}{2}$

Resolvendo o sistema o punto de intersección é P=(1/5, 7/5 , 14/5)

c) sen(r,π) = |cos ($\overrightarrow{vr}$, π)| = $\dfrac{5}{3\sqrt{14}}$, polo que o ángulo pedido é de 26,45º

d) Un punto calquera da recta é da forma (2-3α, 2-α, 4-2α)

d(Pr,π) = $\left|\dfrac{2-3\alpha-4+2\alpha+8-4\alpha-3}{3}\right| = 4$ ⇨ |-5α+3|= 12 ⇨α=-9/5, α= 3

polo que os puntos pedidos son S= (37/5, 19/5,38/5) e T=(-7, -1-2)

e) d(P,OX) = $\left|\dfrac{|\overrightarrow{PxP} \times \vec{v}x|}{|\vec{v}x|}\right| = \sqrt{\dfrac{245}{25}}$ u xa que $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 7/5 & 14/5 \end{vmatrix}$ = (0,-14/5,7/5)

35) Sabemos que as rectas r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+k}{3}=\frac{z-1}{-2}$ **e s:** $\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-k}{3}$ **se cortan nun punto**

a) Calcula o valor de k.

b) Acha a ecuación xeral do plano que as contén.

<u>Solución</u>

a) Se se cortan nun punto o rango $\left(\overrightarrow{\text{Pr}Ps},\vec{v}r,\vec{v}s\right)$ = rango $\begin{pmatrix} 1 & -3+k & k-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ten que ser 2, polo que o determinate da matriz ten que ser cero e isto cúmprese para k= -6

b) π≡ $\begin{vmatrix} x & y+3 & z+6 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 0 ⇨ -13x + 4y - 7z + 6 = 0