ESPAZO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL: ÁNGULOS, PERPENDICULARIDADE DE RECTAS E PLANOS

1.- Ángulos no espazo

Ángulo que forman dous vectores.

Dados dous vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, a definición de produto escalar dinos que:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

A partirdla definición de produto escalar podemos despexar o coseno:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

De aí temos que:

$$\boxed{\text{Ángulo que forman } \vec{u} \text{ e } \vec{v} = (\vec{u},\vec{v}) = \text{arcos } \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

Exemplo:

Acha o ángulo que forman os vectores $\vec{u} = (3,2,6)$ e $\vec{v} = (-4,5,1)$

$\vec{u}.\vec{v} = -12+10+6 = 4$

$\| \vec{u} \| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$; $\| \vec{v} \| = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{u} \| . \| \vec{v} \|} = \dfrac{4}{7\sqrt{42}}$.

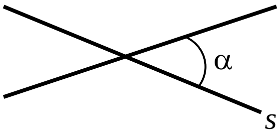
Buscando coa calculadora o ángulo que ten por coseno $\dfrac{4}{7\sqrt{42}}$, obtemos $\alpha = 84{,}94^{o}$

Una vez visto isto, estamos en condiciones de comezar.

Ángulo que forman dos rectas.

Se temos dúas rectas *r* e *s*, e tomamos vectores directores de cada unha delas, entón o ángulo que forman esas rectas será o ángulo que forman os seus vectores directores.

$$r : \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$



$$s : \frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}$$

É dicir, $ang(r,s) = ang(\vec{u},\vec{v})$

Polo tanto todo se reduce a calcular o ángulo formado por eses vectores.

Da definición de produto escalar temos:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}}$$

(Nota: Tomamos o valor absoluto ao fin de obter o menor dos ángulos que forman as rectas).

Exemplo:

Calcula o ángulo formado por r e s, sendo: $r : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{5}$ $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Os vectores de dirección das respectivas rectas son $\vec{u} = (1,-1,5)$ e $\vec{v} = (2,1,-1)$, polo tanto,

$$\cos\alpha = \frac{|1.2 + (-1).1 + 5.(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2-1-5|}{\sqrt{27}\sqrt{6}} = \frac{4}{9\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 71{,}68^{\circ}$$

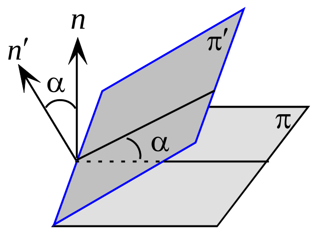
Ángulo que forman dous planos.

Dados dous planos π_1 e π_2, o ángulo que forman ditos planos só ten sentido calculalo cando estes se corten, pois en caso contrario o ángulo será 0. Sendo ese o caso, o ángulo formado por dous planos é igual ao que forman os seus vectores normais.

$$ang(\pi_1, \pi_2) = ang(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

Dous planos $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ e $\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$, consideremos os seus vectores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, tal e como vemos en la figura:

$$\vec{n}_1 = (A, B, C)$$
$$\vec{n}_2 = (A', B', C')$$



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| . \|\vec{n}_2\|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}}$$

Exemplo

Calcula o ángulo que forman os planos $\pi_1 : 2x - y - 3 = 0 ; \pi_2 : x + y - z = 0$

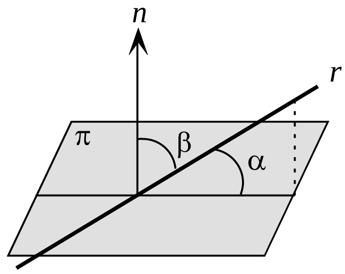
Os vectores perpendiculares a cada un dos planos son: $\vec{n}_1 = (2,-1,0)$ e $\vec{n}_2 = (1,1,-1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| . \|\vec{n}_2\|} = \frac{|2-1+0|}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}},$$ $\alpha = 75{,}03^{\circ}$ que é o ángulo formado por $\pi_1 \ e \ \pi_2$.

<u>Ángulo que forman recta e plano.</u>

Igual que no caso anterior vamos a considerar unha recta r e un plano π que se corten, pois noutro caso o ángulo que forman é 0. Se consideramos entón un vector director da recta, $\vec{v}$, e un vector normal ao plano, $\vec{n}$, como na figura:

Temos que se α é o ángulo que forman a recta e o plano, entón $\beta = 90^{\circ} - \alpha$ será o ángulo que forman o vector director da recta, $\vec{v}$, e o vector normal ao plano, $\vec{n}$. Hai que indicar que α y β son complementarios



Así pois:

$$\boxed{ang(r,\pi) = complementario \ \ ang(\vec{v},\vec{n})}$$

Polo tanto, a partir de $\vec{n} = (A, B, C)$ e de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, o primeiro que faríamos sería achar β:

$$\boxed{\cos\beta = \frac{|\vec{n}.\vec{v}|}{\|\vec{n}\| . \|\vec{v}\|} = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

A continuación, acharíamos α tendo en conta que $\beta = 90^{\circ} - \alpha$.

Nembargante, ao ser α e β complementarios, verifícase que $sen\alpha = \cos\beta$, polo que:

$$\boxed{sen\alpha = \cos\beta = \frac{|\vec{n}.\vec{v}|}{\|\vec{n}\| . \|\vec{v}\|} = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

e calculamos o ángulo formado pola recta e o plano directamente

<u>Exemplo:</u>

Calcula o ángulo que forma a recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$ co plano de ecuación $x + 3y + z - 5 = 0$

Vector perpendicular ao plano: $\vec{n}$ = (1, 3, 1)
Vector director da recta $\vec{v}$ = (1, 2, -1)

$$sen\alpha = \frac{|1.1 + 3.2 + 1.(-1)|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{|1+6-1|}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}};$$ $\alpha = 47{,}6^{\circ}$