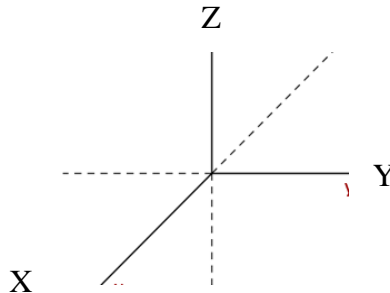


Vectores no espazo

Un **sistema de coordenadas tridimensional** constrúese trazando un eixe Z, perpendicular na orixe de coordenadas aos eixes X e Y.

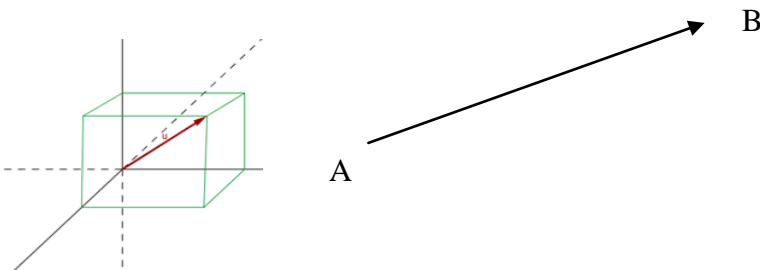
Cada **punto** ven determinado por **tres coordenadas** $P(x, y, z)$.



Os eixes de coordenadas determinan tres planos coordenados: XY, XZ e YZ. Estes planos coordenados dividen ao espazo en oito rexións chamadas **octantes**, no primeiro octante as tres coordenadas son positivas.

Definición:

Chamamos **vector fixo** \overrightarrow{AB} ao segmento orientado que ten por orixe o punto A e por extremo o punto B.



Elementos característicos dun vector fixo.

Módulo: É a lonxitude do segmento AB. Representámolo por $|\overrightarrow{AB}|$ O **módulo** dun **vector** é un **número** sempre **positivo**, agás o **vector nulo** que ten módulo **cero**.

Dirección: É a dirección da recta que o contén. Se dous vectores son paralelos, teñen a mesma dirección.

Sentido: É o que vai da orixe ao extremo. Representámolo pola punta da frecha. Unha dirección ten dous sentidos.



Compoñentes dun vector no espazo

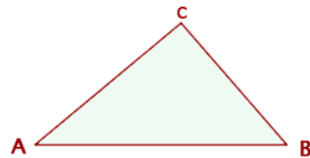
Se as coordenadas de dous puntos A e B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, as **coordenadas ou compoñentes do vector** \overrightarrow{AB} son as coordenadas do extremo menos as coordenadas da orixe.

Exemplo:

Se $A(2,-1,3)$ e $B(5,4,-4)$, entón $\overrightarrow{AB}=(3,5,-7)$

Exemplo:

Determinar as **compoñentes dos vectores** que se poden trazar no triángulo de vértices $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ e $C(-1, 2, 1)$.



$$\overrightarrow{AB} = (3 + 3, 6 - 4, 3 - 0) = (6, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{BA} = (-6, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1 + 3, 2 - 4, 1 - 0) = (2, -2, 1)$$

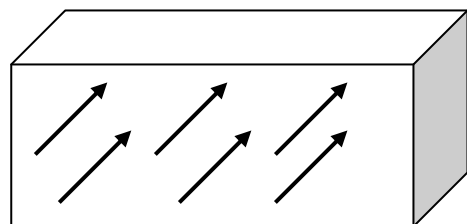
$$\overrightarrow{CA} = (-2, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1 - 3, 2 - 6, 1 - 3) = (-4, -4, -2)$$

$$\overrightarrow{CB} = (4, 4, 2)$$

Definición

Chamamos **vectores equipolentes** aos vectores fixos que teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido. É obvio que hai infinitos vectores equipolentes entre si, basta con trasladalos dun lado a outro.



Exemplo:

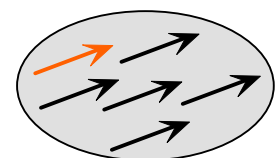
Se $A(2,-1,3)$ e $B(5,4,-4)$, entón $\overrightarrow{AB}=(3,5,-7)$

Se $C(3,0,5)$ e $D(6,5,-2)$, entón $\overrightarrow{CD}=(3,5,-7)$

Por tanto, os vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} son equipolentes

Definición

Chamamos **vector libre** ao conxunto formado por un vector fixo e todos os vectores equipolentes a el. Calquera dos vectores fixos é un representante.



Exemplo:

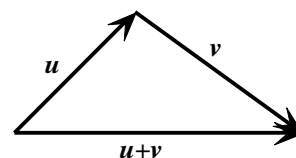
Todos os vectores equipolentes aos vectores anteriores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} nos darán como resultado $(3,5,-7)$, polo tanto falaremos do vector libre $\vec{u}=(3,5,-7)$, sen indicar o seu orixe nin o seu extremo.

2.- Operacións con vectores libres.

Suma de vectores (xeometricamente)

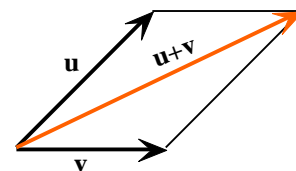
Para sumar dous vectores \vec{u} , \vec{v} , podemos facelo de dúas maneiras:

1.- Desde un punto calquera , colocamos un vector equipolente a \vec{u} e, a partir do extremo deste, colocamos outro vector equipolente a \vec{v} de xeito que coincida o extremo do primeiro coa orixe do segundo. A suma é o vector que ten como orixe a orixe do primeiro e como extremo o extremo do segundo.



2.- Lei do paralelogramo:

Formamos un paralelogramo con dous vectores equipolentes aos dados de forma que coincidan as orixes. A suma é ea diagonal do paralelogramo tomando como orixe a orixe dos vectores equipolentes elixidos.



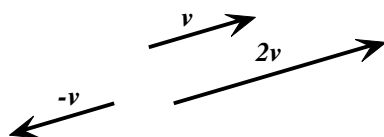
Produto dun vector por un número real (xeometricamente)

O produto dun vector \vec{v} por un número real k é outro vector, que expresaremos por $k\vec{v}$, e que ten as seguintes características:

Dirección: a mesma que \vec{v}

Sentido: o mesmo que \vec{v} se k é positivo e sentido contrario se k é negativo.

Módulo: o produto del módulo de v polo valor absoluto de k . $\|k\vec{v}\|=|k|\cdot\|v\|$



Cálculo do módulo coñecendo as súas componentes (coordenadas)

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Dados os vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 3, 4)$, determinar os módulos de \vec{u} e \vec{v}

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

Cálculo do módulo coñecendo as coordenadas dos puntos

$$A = (x_1, y_1, z_1) \quad B = (x_2, y_2, z_2)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia entre dous puntos

A **distancia entre dous puntos** é igual ao **módulo do vector** que ten de extremos eses puntos.

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Determina a **distancia entre os puntos** A(1, 2, 3) e B(-1, 2, 0).

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{13}$$

Vector unitario

Un **vector unitario** ten de **módulo a unidade**.

A normalización dun vector consiste en asociarlle outro **vector unitario**, da **mesma dirección e sentido** que o vector dado, dividindo cada compoñente do vector polo seu módulo.

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Operacións de vectores no espazo

Suma de vectores

Para sumar dous vectores se suman as súas respectivas compoñentes.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Exemplos

Dados $\vec{u} = (2,1,3)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$, $\vec{w} = (1,2,3)$, acha o vector $\vec{x} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$.

$$\vec{x} = (4,2,6) + (3,-3,0) - (1,2,3) = (6,-3,3)$$

Dados os vectores $\vec{u} = (2,4,5)$ e $\vec{v} = (3,1,2)$, acha o módulo do vector $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = (-1,3,3)$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

Propiedades da suma de vectores

Asociativa

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

Conmutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Elemento neutro

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Elemento opuesto

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Produto dun número real por un vector

O produto dun número real $k \in \mathbb{R}$ por un vector \vec{u} é outro vector:

De igual dirección que o vector \vec{u} .

Do mesmo sentido que o vector \vec{u} se k é positivo.

De sentido contrario do vector \vec{u} se k é negativo.

De módulo $|k| |\vec{u}|$

As compoñentes do vector resultante obtéñense multiplicando por k as compoñentes do vector.

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

Propiedades do produto dun número por un vector

Asociativa

$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

Distributiva respecto á suma de vectores

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

Distributiva respecto aos escalares

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

Elemento neutro

$$1\vec{u} = \vec{u}$$

Exemplo: Dado $\vec{v} = (6, 2, 0)$ determinar \vec{u} de modo que sea $3\vec{u} = \vec{v}$.

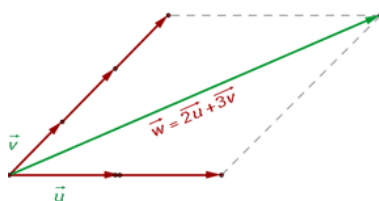
$$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v} = \left(2, \frac{2}{3}, 0\right)$$

Dependencia e independencia lineal. Bases

Combinación lineal

Unha **combinación lineal** de dous ou máis vectores é o **vector** que se obtén ao **sumar** eses **vectores multiplicados** por sendos **escalares**.

$$v = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$$



Calquera **vector** se pode poñer como **combinación lineal** de outros que teñan **distinta dirección**.

Esta **combinación lineal** é única.

Vectores linealmente dependentes

Varios **vectores libres** do espazo dise que son **linealmente dependentes** se hai unha **combinación lineal** deles que é igual ao **vector cero**, sen que sexan **cero** todos os **coeficientes** da **combinación lineal**.

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

Propiedades

1. Se varios **vectores** son **linealmente dependentes**, entón polo menos **un** deles se pode expresar como **combinación lineal** dos demais.

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{0} \text{ se lin. indep. } \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\text{p.e } a_1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\vec{v}_2 - \frac{a_3}{a_1}\vec{v}_3$$

Tamén se cumpre o contrario: se un **vector** é **combinación lineal** doutros, entón todos os **vectores** son **linealmente dependentes**.

2. Dous vectores do espazo son **linealmente dependentes** se, e só se, son **paralelos**.

3. Dous **vectores libres** do espazo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son **linealmente dependentes** se as súas compoñentes son proporcionais.

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad (u_1, u_2, u_3) = (kv_1, kv_2, kv_3) \quad \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = k$$

4. Tres **vectores libres** do espazo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son **linealmente dependentes** se

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Determinar os valores de k para que sexan **linealmente dependentes** os vectores $\vec{u} = (3, k, -6)$ $\vec{v} = (-2, 1, k+3)$ $\vec{w} = (1, k+2, 4)$

. Escribir \vec{u} como **combinación lineal** de \vec{v} \vec{w} , sendo k o valor calculado.

Os vectores son **linealmente dependentes** se o **determinante** da matriz que forman é **nulo**, é dicir que o rango da matriz é menor que 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k+3 \\ 1 & k+2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$12 + k^2 + 3k + 12k + 24 - (-6 - 8k + 3k^2 + 15k + 18) = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0 \quad k = -2 \quad k = 6$$

$$(3, -2, -6) = a(-2, 1, 1) + b(1, 0, 4)$$

$$(3, -2, -6) = (-2a + b, a, a + 4b)$$

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ -2 = a \\ -6 = a + 4b \end{cases} \quad a = -2 \quad b = -1$$

$$\vec{u} = -2\vec{v} - \vec{w}$$

Vectores linealmente independentes

Varios vectores libres son **linealmente independentes** se ningún deles pode ser escrito cunha **combinación lineal** dos restantes, ou o que é o mesmo

$$\text{se } a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Os **vectores linealmente independentes** teñen **distinta dirección** e os seus **compoñentes** no son **proporcionais**.

Tres **vectores libres** do espazo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son **linealmente independentes** se

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemplo: Estudar se son **linealmente dependentes ou independentes** os vectores:

$$\vec{u} = (2, 3, 1), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (0, 3, -1)$$

$$a(2, 3, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 3, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + 3c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$r = 2$ $n = 3$ Sistema compatible indeterminado.

O sistema ten infinitas solucións, polo tanto os vectores son **linealmente dependentes**.

Base

Tres **vectores** \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} , linealmente independentes forman unha **base**, por que calquera **vector** do espazo se pode poñer como **combinación lineal** deles.

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

As **coordenadas do vector** respecto á **base** son:

$$\vec{x} = (a, b, c)$$

Base ortogonal

Unha **base** é **ortogonal** se os vectores que a compoñen son **perpendiculares** entre si.

Base ortonormal

Unha **base** é **ortonormal** se os vectores que a compoñen son **perpendiculares** entre si, e ademais teñen **módulo 1**.

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j} \quad \vec{j} \perp \vec{k} \quad \vec{k} \perp \vec{i}$$

Esta base formada polos vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se denomina **base canónica**.

Exemplo

¿Para qué valores de a os vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,a,1)$ e $\vec{w} = (1,1,a)$, forman unha **base**?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a^2 + 1 + 1 - a - a - 1 \neq 0 \quad a^2 - 2a + 1 \neq 0$$

$$(a - 1)^2 \neq 0 \quad a \neq 1$$

Para $a \neq 1$, os **vectores** forman unha **base**.

Producto escalar: definición, propiedades e aplicacións.

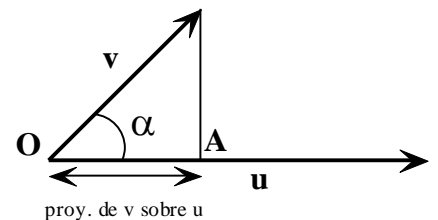
Definición: Dados dous vectores \vec{u} e \vec{v} , chamamos produto escalar deses dous vectores a:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}), \text{ se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \bullet \vec{v} &= 0, \text{ se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

Interpretación xeométrica

O produto escalar de dous vectores non nulos é xeometricamente o produto do módulo do primeiro pola proxección do segundo sobre o primeiro.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) \text{ polo que } \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|}$$



Propiedades do produto escalar

1.- Conmutativa: $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

2.- Asociativa respecto aos escalares: $(k \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v})$

3.- $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ (xa que $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0 \geq 0$)

4.- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ entónces $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$,

(é dicir que o produto escalar de dous vectores (distintos de 0) é 0 se e só se eses dous vectores son perpendiculares). Isto é sinxelo de ver a partir da definición, e é unha propiedade fundamental que se utiliza en multitude de ocasiónes.

5.- Distributiva respecto á suma de vectores: $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

Expresión en coordenadas do produto escalar:

Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ son dous vectores cuxas coordenadas están expresadas respecto a unha base ortonormal (por exemplo a base canónica), entón:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Demostración

Antes de nada fixémonos nos produtos escalares dos vectores da base canónica:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad (\text{todo pola propia definición})$$

Aplicando as propiedades do produto escalar e as expresións deses vectores respecto á base canónica, teremos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}) \bullet (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}) \stackrel{\text{Prop. distr. y asoc.}}{=} \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1 \cdot z_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + y_1 \cdot z_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} \\ &\quad + z_1 \cdot y_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 \cdot z_2 \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

pero, tendo en conta os produtos escalares dos vectores da base canónica, quédanos:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

(Esta expresión é a que utilizaremos normalmente para multiplicar escalarmente dous vectores pois case sempre coñeceremos as súas coordenadas).

Exemplo:

Se $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} = (2, 3, -5)$ e $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k} = (-1, 4, -6)$, entón

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + (-5) \cdot (-6) = 40$$

Aplicacións do produto escalar:

1.- Para comprobar se unha base é ortogonal ou ortonormal.

Se $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é unha base ortogonal de vectores entón debe cumprir que:

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 \quad \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0$$

Se $B (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é una base ortonormal de vectores entón, ademais, debe cumprir que:

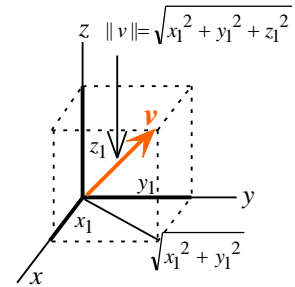
$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = 1 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = 1 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = 1 \\ \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0 \end{array}$$

2.- Para achar o módulo dun vector en coordenadas:

Sabemos que $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$, así se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, tendo en conta a expresión en coordenadas do produto escalar:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1 + z_1 \cdot z_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Isto é o que se prevía, xa que se observamos a figura, o módulo do vector \vec{u} , obtense aplicando dúas veces o teorema de Pitágoras. Así é como tradicionalmente se calcula, e non co produto escalar.



Exemplo:

Calcula o módulo do vector $\vec{u} = (3,2,6)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

3.- Para calcular o ángulo que forman dous vectores:

A partir da definición de produto escalar podemos despegar o coseno:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

De aí temos que:

$$\text{Ángulo que forman } \vec{u} \text{ e } \vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Exemplo:

Acha o ángulo que forman os vectores $\vec{u} = (3,2,6)$ e $\vec{v} = (-4,5,1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -12 + 10 + 6 = 4$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{7\sqrt{42}}$$

Buscando coa calculadora o ángulo cuxo coseno é $\frac{4}{7\sqrt{42}}$, temos

$$\alpha = 84,94^\circ$$

4.- Para calcular un vector perpendicular ou ortogonal a un dado:

Dado o vector $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, un vector perpendicular ou ortogonal a el será un vector $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ tal que $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

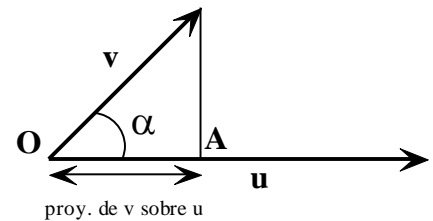
Exemplo:

Acha un vector perpendicular a $\vec{u} = (3,2,6)$

Basta considerar o vector $\vec{v} = (-4,0,2)$, xa que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12 + 0 + 12 = 0$

5.- Para calcular a proxección dun vector sobre outro:

Dados dous vectores \vec{v} e \vec{u} como os da figura, a proxección de \vec{v} sobre \vec{u} , que denotamos $\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$, é a proxección de \vec{v} sobre unha recta na dirección de \vec{u} , tal e como vemos na figura:



A partir do debuxo temos que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|}$, y por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) \text{ polo que } \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

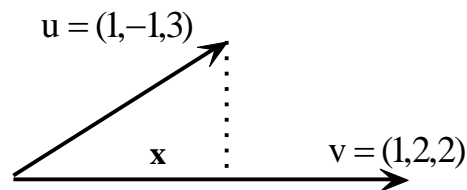
Exemplo:

Acha la proxección ortogonal do vector $\vec{u} = (1,-1,3)$ sobre $\vec{v} = (1,2,2)$

Solución:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5$$

O ángulo que forman os vectores é agudo (xa que o produto escalar é positivo)



$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot x \Rightarrow 5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (que é a medida do segmento x)}$$

Dividimos o vector v polo seu módulo a fin de obter un vector da mesma dirección e sentido pero de módulo unidade:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3; \quad \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Finalmente, o vector unitario obtido o multiplicamos por $\frac{5}{3}$:

$$\text{proy. de } u \text{ sobre } v = \vec{x} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

Produto vectorial

Definición 1

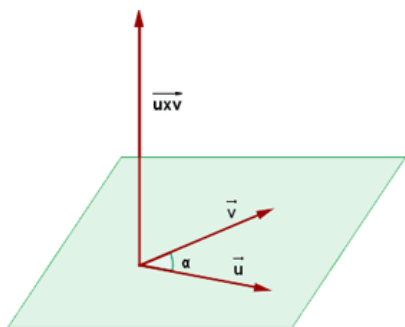
a) O produto vectorial de dous vectores \vec{u} e \vec{v} é outro vector que se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ e que se obtén do seguinte modo:

1. Se \vec{u} e \vec{v} son non nulos e non proporcionais, entón $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vector de
 - i. Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\widehat{u, v})$
 - ii. Dirección: perpendicular a \vec{u} e a \vec{v}
 - iii. Sentido: cara arriba se $(\widehat{u, v}) < 180^\circ$ e cara abaixo se $(\widehat{u, v}) > 180^\circ$ (tomando o ángulo en sentido positivo, é dicir, contrario ao movemento das agullas do reloxo).
2. Se \vec{u} e \vec{v} son linealmente dependentes, é dicir, se algún deles é $\vec{0}$ ou se teñen a mesma dirección, entón $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Definición 2.

O **produto vectorial** de **dous vectores** linealmente independentes é outro **vector** cuxa **dirección** é **perpendicular** a os dous vectores e o seu **sentido** sería igual ao avance dun **parafuso** ao xirar de u cara v . O seu **módulo** é igual a:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen } \alpha$$



O **produto vectorial** de **dous vectores** linealmente dependentes é o vector $\vec{0}$.

O **produto vectorial** pódese expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Exemplos

Calcular o **produto vectorial** dos vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

Dados os vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, calcular o **produto vectorial** dos mesmos.

Comprobar que el vector resultante é **ortogonal** a \vec{u} e \vec{v}

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad (-2, -2, 4) \cdot (3, -1, 1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

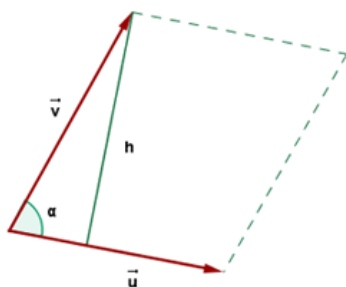
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \quad (-2, -2, 4) \cdot (1, 1, 1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

O produto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal aos vectores \vec{u} e \vec{v}

Área do paralelogramo

Xeometricamente, o **módulo do produto vectorial** de dous vectores coincide coa **área do paralelogramo** que ten por lados a eses vectores.

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



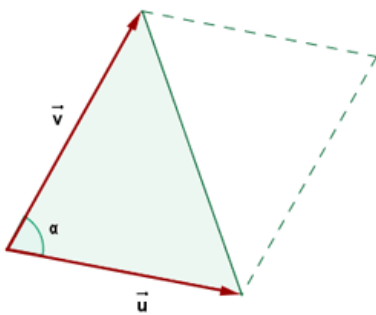
Exemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (3,1,-1)$ e $\vec{v} = (2,3,4)$, calcular a área do paralelogramo que ten por lados os vectores \vec{u} e \vec{v} .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294} u^2$$

Área dun triángulo



$$A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Exemplo

Determinar a **área do triángulo** cuxos vértices son os puntos A(1, 1, 3), B(2, -1, 5) e C(-3, 3, 1).

$$\vec{AB} = (1, -2, 2) \quad \vec{AC} = (-4, 2, -2)$$

$$\vec{w} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} u^2$$

Propiedades do produto vectorial

1. Anticonmutativa

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

2. Homoxénea

$$\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda \vec{v}$$

3. Distributiva

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

4. O **produto vectorial** de dous **vectores paralelos** é igual ao **vector nulo**.

$$\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

5. O **produto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ é **perpendicular** a \vec{u} e a \vec{v}

Produto mixto

O **produto mixto** dos vectores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} es igual ao **produto escalar do primeiro vector polo produto vectorial dos outros dous**.

O **produto mixto** represéntase por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

O **produto mixto** de tres vectores é igual ao determinante que ten por filas as coordenadas deses vectores respecto a unha base ortonormal.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemplos

Calcular o **produto mixto** dos vectores:

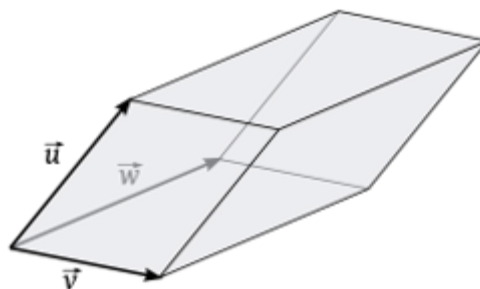
$$\vec{u} = (2, -1, 3) \quad \vec{v} = (0, 2, -5) \quad \vec{w} = (1, -1, -2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (2, -1, 3) \cdot (-9, -5, -2) = -18 + 5 - 6 = -19$$

Volume do paralelepípedo (Interpretación xeométrica)

O valor absoluto do **produto mixto** representa o **volume do paralelepípedo** cuxas arestas son tres vectores que concorren nun mesmo vértice.



Calcular o **volume do paralelepípedo** formado polos vectores:

$$\vec{u} = (3, -2, 5) \quad \vec{v} = (2, 2, -1) \quad w = (-4, 3, 2)$$

$$V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

Volume deun tetraedro O volume dun tetraedro é igual a 1/6 do produto mixto, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Obter o **volume do tetraedro** que ten por vértices os puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

$$\overline{AB} = (1 - 3, 2 - 2, 4 - 1) = (-2, 0, 3) \quad \overline{AC} = (4 - 3, 0 - 2, 3 - 1) = (1, -2, 2)$$

$$\overline{AD} = (1 - 3, 1 - 2, 7 - 1) = (-2, -1, 6)$$

$$V = \frac{1}{6} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}u^3$$

Propiedades do produto mixto

1. O **produto mixto** non varía se se permutan circularmente os seus factores, pero cambia de signo se estes se traspoñen.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

2. Se **tres vectores** son **linealmente dependentes**, é dicir, se son **coplanarios**, o **produto mixto** vale **0**.

Problemas de vectores

1 Expresa o vector $\vec{m} = (1, 2, 3)$ como combinación lineal dos vectores: $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

2 Sendo $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e $\vec{e} = (0, 1, 1)$, demostrar que dichos vectores son linealmente independentes e expresa o vector $\vec{m} = (1, 2, 3)$ como combinación lineal deles.

3 Dados os vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 0)$, demostra que ditos vectores forman unha base e calcula as coordenadas do vector $(1, \vec{w} - 1, 0)$ respecto desta base.

4 Dados os vectores: $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$.

a) Demostrar que forman unha base.

b) Achar as coordenadas dos vectores da base canónica respecto desta base.

5 Determinar o valor do parámetro k para que os vectores $\vec{x} = k\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $\vec{y} = -\vec{u} + k\vec{v} + \vec{w}$ sexan:

a) Ortogonais.

b) Paralelos.

6 Dados os puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ e $C(1, 6, a)$, pídese:

1 Calcular para qué valores do parámetro a están aliñados.

2 Determinar, se existen, valores de a para os cales A , B e C son tres vértices dun paralelogramo de área 3.

7 Achar dous vectores de módulo a unidade e ortogonais a $(2, -2, 3)$ y $(3, -3, 2)$.

Exercicios do produto escalar e vectorial

1 Dados os vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 3, 0)$, calcular:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b. $\vec{v} \times \vec{w}$

c. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

d. $|\vec{u}|, |\vec{v}|, |\vec{w}|$

e. $\cos(\vec{v}, \vec{w})$

2 Dados os vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 3, 4)$, determinar:

a) Os seus módulos

b) $\vec{u} \times \vec{v}$

c) Un vector unitario ortogonal a \vec{u} e a \vec{v}

d) A área do paralelogramo que ten por lados os vectores \vec{u} e \vec{v} .

3 Ángulo que forman os vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

Exercícios do produto vectorial e mixto

1 Calcular o produto mixto: $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}]$.

2 Dados os vectores $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 0)$, calcular o **produto mixto** $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

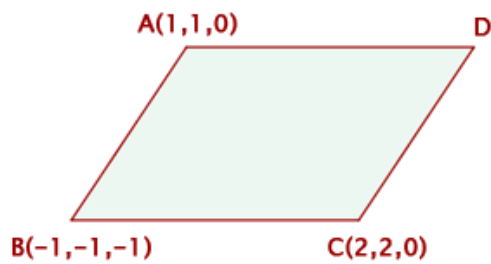
Canto vale o **volume do paralelepípedo** que ten por arestas os vectores dados?

3 Sexan $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ e $C(-1, 2, 1)$ os tres vértices dun triángulo. Pídesese:

a) Calcular o coseno de cada un dos tres ángulos do triángulo.

b) Calcular a área do triángulo.

4 Considerar a seguinte figura:



Pídesese:

1 Coordenadas de D para que ABCD sexa un paralelogramo.

2 Área deste paralelogramo.