Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

Solución

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1,1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2 y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$

Solución

Sexan $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 2$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + m^3 + 3m^2 = m^3 + 4m^2 + 3m = m(m^2 + 4m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3,-1,0\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,0\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m = -3$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$, co cal tamén $\operatorname{rank} A^* = 1$. Ao ser $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 1 <$ n.º de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = -1$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que, de novo, o sistema é incompatible (non ten solución).

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións: $\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$.

Solución

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9$

$\Longrightarrow$ $rang(C) = 2$ se $m = 3$; $rang(C) = 3$ se $m \neq 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre $rang(A) \geq rang(C)$):

- $m \neq 3 \Rightarrow rang(A) = 3$ (neste caso $rang(C) = 3$)
- $m = 3 \Rightarrow rang(A) = 2$ (se $m = 3$, 1ª ecuación = 3*2ª ecuación e $rang(C) = 2$)

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < n^{\underline{o}}\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado.$
$m \neq 3 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^{\underline{o}}\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado.$

b) Para $\boxed{m = 3}$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$\left.\begin{matrix} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{cases}$

As infinitas solucións son

$$\boxed{\begin{matrix} x = -\dfrac{\lambda}{3} + 2 \\ y = \dfrac{\lambda}{3} + 1; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{matrix}}$$

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x \quad\quad -z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$

Solución

a) Matriz de coeficientes: $C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&0&-1&m\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow rang(C)\geq 2$

Dúas columnas proporcionais

$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-1-2+1+2=0$

$\Rightarrow rang(C)=2$

Cálculo do rango de A:

Sempre $rang(A)\geq rang(C)$

$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&m\\1&1&1\end{vmatrix}=1+2m-m-2=m-1$

$\Rightarrow rang(A)=\begin{cases}3 & se\ m\neq 1\\ 2 & se\ m=1\end{cases}$

Discusión:

$\boxed{m=1,\ rang(C)=rang(A)=2<3=nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado.}$

$\boxed{m\neq 1,\ rang(C)=2<3=rang(A).\ Sistema\ incompatible\,.}$

b) Para $\boxed{m=1}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{matrix}x+2y=1+z\\ x \quad\quad =1+z\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=0$$

As infinitas solución son:

$$\boxed{\begin{matrix}x=1+\lambda\\ y=0 \qquad ;\quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\ \lambda\end{matrix}}$$

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema:

$$\begin{aligned} mx + 3y + 4z &= m \\ x - 4y - 5z &= 0 \\ x - 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 0$ e cando $m = 1$.

Solución

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 & m \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 16m - \cancel{12} - 15 + 16 - 15m + \cancel{12} = m + 1;$$

Polo tanto

- $m = -1 \Rightarrow rang(C) = 2$
- $m \neq -1 \Rightarrow rang(C) = 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

- $m \neq -1 \Rightarrow rang(A) = 3$ (sempre $rang(A) \geq rang(C)$)
- Se $m = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

Discusión:

$m = -1 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. *Sistema incompatible. Non ten solución*

$m \neq -1 \Rightarrow rang(C) = 3 = rag(A) =$ *nº de incógnitas. Sistema compatible determinado. Solución única*

b) Para $\boxed{m = 0}$

Sistema homoxéneo. Por a) e un sistema compatible determinado. Polo tanto

$$\boxed{x = y = z = 0}$$

Para $\boxed{m = 1}$. Por a), é un sistema compatible determinado, ten solución única que calculamos pola regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = {}^1/_2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = -{}^1/_2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = {}^1/_2$$

$$\boxed{x = {}^1/_2; \; y = -{}^1/_2; \; z = {}^1/_2}$$

a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$
b) Resólveo cando $m = 5$.

Solución

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$

Orlamos este menor

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5$

$\Rightarrow rang(C) = \begin{cases} 2 & se \;\; m = 5 \\ 3 & se \;\; m \neq 5 \end{cases}$

Discusión:

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 5, \;\; rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado. \\ m \neq 5, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 1 - y \\ 4x + 3z &= 5 - 5z \end{aligned}\right\}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 5-5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 4 & 5-5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = y - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \lambda \end{array}}$$

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 3x - 2y \qquad &= 0 \\ x - \ y + \ z &= m \\ x + my - 2z &= m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

Solución

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -2 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3m - 4 = -3m$

$\Rightarrow \ rang(C) = \begin{cases} 2 & se \ m = 0 \\ 3 & se \ m \neq 0 \end{cases}$

Cálculo do rango de A:

Sempre $\ rang(A) \geq rang(C)$

A^* é unha matriz 3x4 $\Rightarrow rang(A) \leq 3$

$m \neq 0 \ \Rightarrow \ rang(C) = 3$

$m = 0 \ \Rightarrow a \text{ última columna de } A \text{ é de ceros}$

$\Rightarrow \ rang(C) = rang(A), \ \forall m$

Discusión:

$m = 0, \ rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = \text{nº de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.}$
$m \neq 0, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = \text{nº de incógnitas. Sistema compatible determinado.}$

b) Para $\boxed{m = 0}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x - \ y &= -z \end{aligned}\right\}$$

Entón:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-2z) = \ 2z$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-3z) = \ 3z$

$\Rightarrow$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= 3\lambda \ ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \ \lambda \end{aligned}}$$