Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución

1.a) En primeiro lugar, despéxase X:

$$A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB).$$

É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Analízanse agora as dimensións: do esquema

$$\underbrace{A^2}_{4\times 4}\underbrace{X}_{p\times q} + \underbrace{A}_{4\times 4}\underbrace{B}_{r\times 3} = \underbrace{B}_{r\times 3}$$

dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3.

1.b)

- **Cálculo de $(A^2)^{-1}$:** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$.

  Logo $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Cálculo de $B - AB$:** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde

$$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de X:**

$$X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A + I$ é invertible, despexa X na ecuación $A - X = AX$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.

Solución:

1.a) $A - X = AX \Leftrightarrow A = AX + X \Leftrightarrow A = (A + I)X \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1}A.$

1.b) Claramente, $A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Posto que $\det(A + I) = 4 + 1 = 5$, tense

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (A + I)^{-1}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}$. Pídese:
a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: neste caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)
b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA+(A+B)^T=2I+XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $A+B$.

Solución

1.a) Nótese que $2A=A+B+A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & -2\end{pmatrix}$, de onde $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}$. Polo tanto, $B=A+B-A=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}$.

Como $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ e $B^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 8\\-4 & -7\end{pmatrix}$, tense finalmente que

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 8\\-4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -8\\4 & 8\end{pmatrix}.$$

1.b) En primeiro lugar, imos despexar X:

$$XA+(A+B)^T=2I+XB \Leftrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T \Leftrightarrow X=[2I-(A+B)^T](A-B)^{-1}.$$

Non hai ningún problema no último paso porque $A-B$ é invertible: $\det(A-B)=16\neq 0$.

- Cálculo de $2I-(A+B)^T$: como $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$,
$$2I-(A+B)^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix}.$$
- Cálculo de $(A-B)^{-1}$: ao ser $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}$ e $\det(A-B)=16$,
$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & -4\\4 & 0\end{pmatrix}^T=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 4\\-4 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix}.$$

Tras estes cálculos, resulta

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Dá resposta aos apartados seguintes:
a) Despexa X na ecuación $XA+B=C$, sabendo que A é unha matriz invertible.
b) Calcula X tal que $XA+B=C$ se $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) $XA+B=C \Leftrightarrow XA=C-B \Leftrightarrow X=(C-B)A^{-1}$.

1.b) $C-B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$. Posto que $\det A=8-3=5$, tense

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X=(C-B)A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7 & 3\\7 & -3\\7 & -3\end{pmatrix}.$$

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Que relación existe entre a súa inversa A^{-1} e a súa trasposta A^t?

b) Estuda, segundo os valores de λ, o rango de $A - \lambda I$, sendo I a matriz identidade de orde 3.Calcula as matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

a) $|M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m = -1}$$

$$\frac{1}{4} M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4}M \Leftrightarrow \frac{1}{4}M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2+m+4 & m^2+5m+4 \\ m+1 & m+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

b) $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Que relación existe entre a súa inversa A^{-1} e a súa trasposta A^t?

b) Estuda, segundo os valores de λ, o rango de $A - \lambda I$, sendo I a matriz identidade de orde 3.Calcula as matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

a)

$$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

b)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$$

Polo tanto: $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0$.

λ=-1 é unha solución da ecuación $\lambda^3 + 1 = 0$. Como $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ e $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{array}{ll} Se\ \lambda = -1, & entón\ \ rang(A - \lambda I) = 2 \\ Se\ \lambda \neq -1, & entón\ \ rang(A - \lambda I) = 3 \end{array}}$$

$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e vimos que $A + I$ non ten inversa. Entón:

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{x = y = z\}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}}$$

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ, o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

Solución

a) $AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$3 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(\ AA^t - \lambda I) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6)$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} Se\ \ \lambda \neq 0\ \ e\ \ \lambda \neq 6,\ \ rang(\ AA^t - \lambda I) = 2 \\ Se\ \ \lambda = 0\ ou\ \lambda = 6,\ \ rang(\ AA^t - \lambda I) = 1 \end{array}}$$

b)

$AA^t X = 6X \quad \Leftrightarrow \quad (\ AA^t - 6I)X = 0$

Sabemos polo apartado a) que a matriz $AA^t - 6I$ non ten inversa, polo que imos obter infinitas solucións

$(\ AA^t - 6I)X = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow 3x - 3y = 0 \ \Rightarrow \ x = y$

As infinitas solucións son

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}}$$

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k, o rango das matrices AB e BA.

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Así

$$|AB| = -4k - 4 - 6k - 18 - 12k - 4 + 12k + 12 + 6k + 2 + 4k + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow \boxed{rang(AB) = 2}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+2)$$

Polo tanto

$$\boxed{\begin{array}{ll} Se\ k = -2, & entón\ rang(BA) = 1 \\ Se\ k \neq -2, & entón\ rang(BA) = 2 \end{array}}$$

b) Vimos que $det(A \cdot B) = 0$ e polo tanto $A \cdot B$ non ten inversa. Se $k = 0$

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{array} \right.$$

Como a terceira ecuación é suma das dúas primeiras, podemos prescindir dela

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3z \\ 3x + y = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 3z - x \\ 3x + 3z - x = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 4z \\ x = -z \end{array} \right.$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

a) Calcula os posibles valores de a, b, c para que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique a relación $(A - 2I)^2 = 0$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e 0 a matriz nula de orde 2.
b) ¿Cal é a solución dun sistema homoxéneo de dúas ecuacións con dúas incógnitas, se a matriz de coeficientes é unha matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando a relación $(A - 2I)^2 = 0$?
c) Para $a = b = c = 2$, calcula a matriz X que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solución

a) $(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & b(a-2)+b(c-2) \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix}$

Polo tanto:

$$(A - 2I)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ b(a-2)+b(c-2) = 0 \\ (c-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 2 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 2 \end{array}}$$

b) Tendo en conta o apartado anterior, a matriz de coeficientes do sistema homoxéneo sería

$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e polo tanto teriamos:
rang(A) = 2 = nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado, solución única. Como a trivial sempre é solución dun sistema homoxéneo, concluimos que a solución é

$$\boxed{x = y = 0}$$

c) Neste caso, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ademais, $\det(A) = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = (A^{-1})^2 \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1})^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}}$$

a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i. Calcula o rango, segundo os valores de λ, de $A - \lambda I$, sendo I a matriz unidade de orde 3.

ii. Calcula a matriz X que verifica $XA - 2A = 3X$.

Solución

a) Dado un elemento a_{ij} dunha matriz cadrada $n \times n$, ao suprimir a súa fila e a súa columna, obtense unha submatriz $(n-1) \times (n-1)$ e o seu determinante é un menor de orde $n-1$, que se chama menor complementario do elemento a_{ij} e represéntase por α_{ij}.

Chámase adxunto de a_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir, é o menor complementario co seu signo ou co signo contrario, segundo $i+j$ sexa par ou impar.

b)

i) $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + \cancel{1} - \cancel{1} - (1-\lambda) - \cancel{(1-\lambda)} + \cancel{(1-\lambda)} =$$
$$= (1-\lambda)[\cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1}] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

Se $\lambda = 0$:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $\lambda = 1$:
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Se $\lambda = 2$:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{Para\ \lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq 2, rang(A - \lambda I) = 3}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 0, rang(A - \lambda I) = 2}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 1, rang(A - \lambda I) = 2}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 2, rang(A - \lambda I) = 2}$$

ii) $XA - 2A = 3X \Leftrightarrow X(A - 3I) = 2A \Leftrightarrow X = 2A(A-3I)^{-1}$

Polo apartado i., sabemos que existe $(A-3I)^{-1}$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$(A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$$