

EXERCICIOS MATRICES E DETERMINANTES

1) Se A e B son dúas matrices cadradas da mesma orde, e certo que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

2) Se A e B son dúas matrices cadradas da mesma orde, e certo que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

3) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $|A|$ pola regra de Sarrus

b) $|A|$ desenrolando pola segunda fila.

c) $|A|$ desenrolando pola primeira columna.

d) $|A|$ desenrolando pola terceira columna.

4) Calcula o seguinte determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

5) Calcula os seguintes determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6) Calcular a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

7) Resolve a ecuación matricial $AX + B = C$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8) Resolve a ecuación matricial $AXB = C$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$,

a) Calcular o rango de $A \cdot A^t$

b) Calcular o rango de $A^t \cdot A$

c) Se $a = 1$, resolver a ecuación matricial $AA^tX=B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

10) Sexa M unha matriz cadrada de orde 3, con $\det(M) = -1$, e que ademais verifica $M^3 + M + I = 0$, sendo I a matriz unidade de orde 3. Calcula os determinantes das matrices $M + I$, e $3M + 3I$

11) Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determinar M , se $MA=B$

b) Comprobar que $M^2 = I$, e deducir a expresión de M^n

12) Dada a matriz de orde n

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}, \text{ Calcula } \det(A_2), \det(A_3), \det(A_5)$$

13) Estudar segundo os valores do parámetro m o rango da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m + 2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$

14) Resolver a ecuación matricial $A^2X=B$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

15) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Calcular a expresión xeral de A^n , e de $(A^n)^{-1}$

16) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, achar todas as matrices $P = \begin{pmatrix} a & -3 \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP=PA$

17) Calcular o rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ segundo os valores do parámetro a .

18) a) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$, achar os valores de x para os que a matriz é regular ($\det(A) \neq 0$).

b) Se $x = 5$, calcula os valores de b para que $|bA| = 1$

19) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, sendo λ un número real:

a) Determinar $B = A^2 - 2A$

b) Determinar os valores de λ para os cales a matriz B ten inversa.

c) Calcular B^{-1} para $\lambda = 1$

20) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular os valores de m para os cales A é unha matriz singular ($\det(A) = 0$).

b) Para $m = 1$, calcular a matriz X que verifica a seguinte condición: $XA + X - 2A = 0$

21) Se a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ten determinante n , calcula o valor do determinante das matrices

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

22) a) Sexan F_1, F_2, F_3 as fila 1ª, 2ª e 3ª dunha matriz cadrada M de orde 3, e $|M| = -2$. Calcular o determinante da matriz que ten por filas $F_1 - F_2, 2F_1$, e $F_2 + F_3$

b) Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, achar X, Y tales que $X + Y^{-1} = C$, e $X - Y^{-1} = C$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEAIS

1) Clasificar e resolver (por substitución) o seguinte sistema:

$$x + y - z = 0$$

$$2x + y = 4$$

$$x - y - z = -4$$

2) Clasificar e resolver (por substitución) o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Clasificar e resolver (por substitución) o seguinte sistema:

$$x + y - z = 0$$

$$-x + 2y + 2z = 4$$

$$3y + z = 1$$

4) Dado o sistema

$$2x + y - z = 1$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$-2x + y - 4z = -12$$

Expresalo en forma matricial $AX = B$, e resolver esta ecuación matricial.

5) Discutir e resolver segundo o valor do parámetro m o seguinte sistema:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + y - z = 6$$

$$3x + 3y + mz = 9$$

6) Discutir e resolver segundo o valor do parámetro m o seguinte sistema:

$$x - z = 1$$

$$m y + 3z = 2$$

$$4x + y - mz = 1$$

7) a) Resolve, se é posible, o sistema de ecuacións lineais

$$x+y-z=5$$

$$2x+y-2z=2$$

b) Calcula o valor de m para que ao engadir ao sistema anterior a ecuación $x+2y-z=m$ resulte un sistema compatible indeterminado.

8) Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Calcula os valores de m para os que o rango de A é menor que 3

b) Estudar se o sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ten solución para cada un dos valores de m obtidos no apartado anterior.

9) Discutir segundo os valores do parámetro m o seguinte sistema de ecuacións:

$$x - y + z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x - 2y + 4z = m$$

10) Discutir segundo os valores do parámetro m o seguinte sistema de ecuacións, e calcular en cada caso as solucións

$$x - y + mz = 0$$

$$mx + y - z = 0$$

$$(m+1)x + z = 0$$

11) Dado o sistema de ecuacións lineais:

$$x + ay + z = 9$$

$$3x + 5y + z = 9$$

$$ax + y + z = 9$$

a) Probar que é compatible, indicando os valores do parametro a para os cales é indeterminado.

b) Resolvelo para $a=7$.

12) Discutir segundo os valores do parámetro m o seguinte sistema:

$$2x + 3y + z = m$$

$$x - 2y + z = 2$$

$$3x + y + 2z = 1$$

e resolvelo se é posible para $m = -1$

13) Estudar a compatibilidade do seguinte sistema, segundo os valores do parámetro a , e resolvelo cando sexa posible.

$$x - y = 5$$

$$y + z = a$$

$$x - 2z = 3$$

$$2z - 3z = a$$

14) Discutir segundo os valores do parámetro m o seguinte sistema:

$$x + my + mz = 1$$

$$x + my + mz = m$$

$$my + mz = 4m$$