

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta  $x + y = 7$  e a gráfica da parábola  $f(x) = x^2 + 5$ .  
 (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)

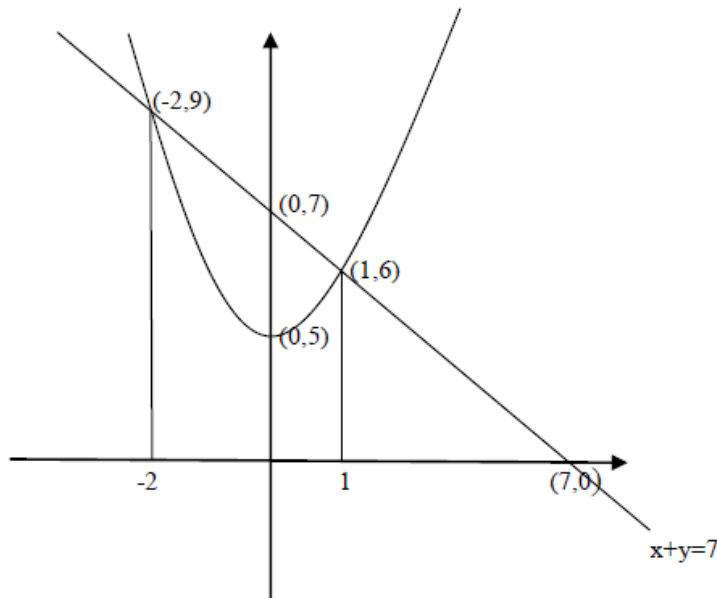
**Solución**

$x + y = 7 \Rightarrow$  Puntos de corte da recta cos eixos:  $(0,7)$ ,  $(7,0)$

$f(x) = x^2 + 5 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x \Rightarrow \text{Decrecente en } (-\infty, 0) \text{ e crecente en } (0, \infty) \\ \text{Corte cos eixos: } (0,5); \text{ Vértice } (0,5); f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{convexa} \end{cases}$

Puntos de corte de recta e parábola:

$$\begin{cases} y = 7 - x \\ y = x^2 + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de corte das gráficas: } (-2,9); (1,6)$$



$$\text{Área} = \int_{-2}^1 [7 - x - (x^2 + 5)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola  $y = x^2 - 4x$  e a recta  $y = x - 4$ . (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).

**Solución**

Estudo da parábola:

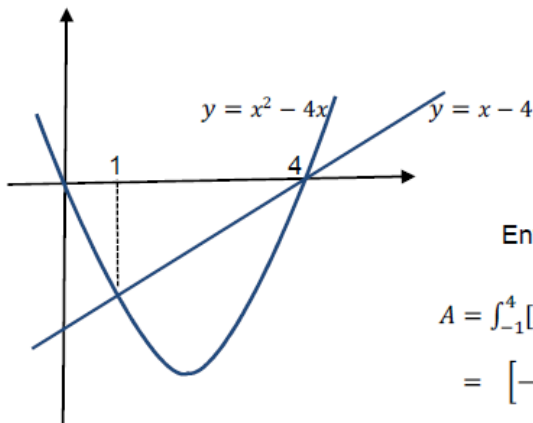
$$y = x^2 - 4x = x(x - 4) \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0) \text{ e } (4,0)$$

$$y' = 2x - 4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Vértice: } (2, -4).$$

$$y'' = 2 \Rightarrow \text{Convexa.}$$

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow (1, -3), (4, 0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^4 [x - 4 - (x^2 - 4x)] dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-1}^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola  $y = 3x - x^2$  e a súa recta normal no punto  $(3,0)$ . (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

**Solución**

$$\left. \begin{aligned} y &= 3x - x^2 \\ y' &= 3 - 2x \\ y' = 0 &\Leftrightarrow x = 3/2 \\ y'' &= -2 < 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Longrightarrow \text{máximo: } (3/2, 9/4) = \text{vértice da parábola} \\ &\Longrightarrow \text{cóncava} \end{aligned}$$

$$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Longrightarrow \text{Puntos de corte da parábola cos eixes: } (0,0), (3,0)$$

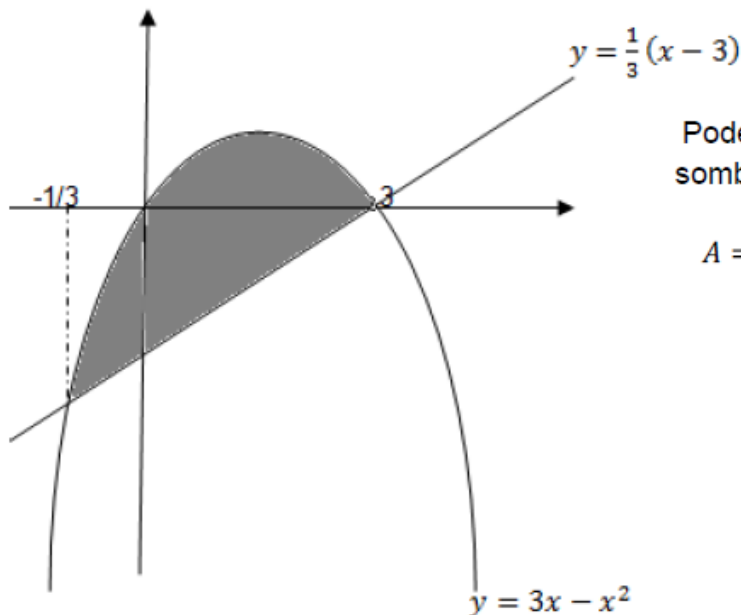
$$y'(3) = -3 \Longrightarrow \text{pendente da recta normal á parábola no punto } (3,0): 1/3$$

Ecuación da recta normal á parábola no punto  $(3,0)$ :

$$y = \frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$$

Puntos de corte da recta normal e a parábola:

$$\left. \begin{aligned} y &= 3x - x^2 \\ y &= \frac{1}{3}(x - 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x - 3) = 3x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1/3, -10/9) \\ (3,0) \end{cases}$$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/3}^3 \left[ 3x - x^2 - \frac{1}{3}(x - 3) \right] dx = \\ &= \int_{-1/3}^3 \left[ \frac{8}{3}x - x^2 + 1 \right] dx = \\ &= \left[ \frac{8}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1/3}^3 = \\ &= 12 - 9 + 3 - \frac{12}{81} - \frac{1}{81} + \frac{27}{81} = \\ &= \boxed{\frac{500}{81}u^2} \end{aligned}$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola  $f(x) = 4x - x^2$  e as rectas tanxentes á gráfica de  $f(x)$  nos puntos correspondentes a  $x = 0$  e  $x = 2$  (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade).

**Solución**

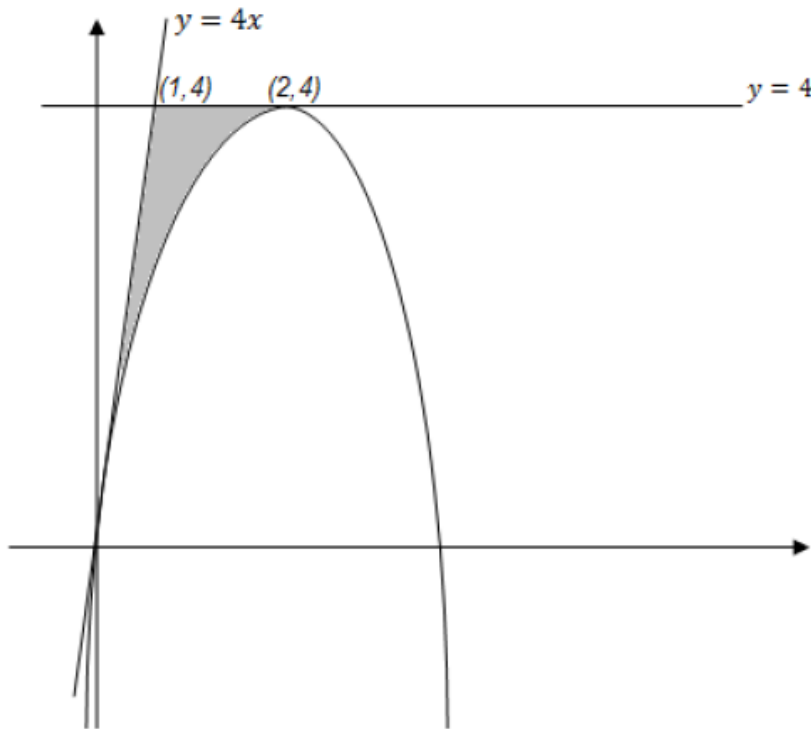
$$f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$$

Puntos de corte cos eixes:  $(0,0), (4,0)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Cóncava. Vértice: } (2,4)$$

Recta tanxente en  $(0,0)$ :  $y = 4x$

Recta tanxente en  $(2,4)$ :  $y = 4$



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [4x - (4x - x^2)] dx + \int_1^2 [4 - (4x - x^2)] dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} + \cancel{8} - \cancel{8} + \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3} u^2}$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola  $y = -x^2 + 2x + 3$ , a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no que a tanxente é paralela á recta  $y = 4x$ . (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

### Solución

En primeiro lugar calculamos os elementos necesarios para a representación da parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y' = -2x + 2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ten un máximo, que é o vértice, no punto } (1,4) \text{ e é cóncava}$$

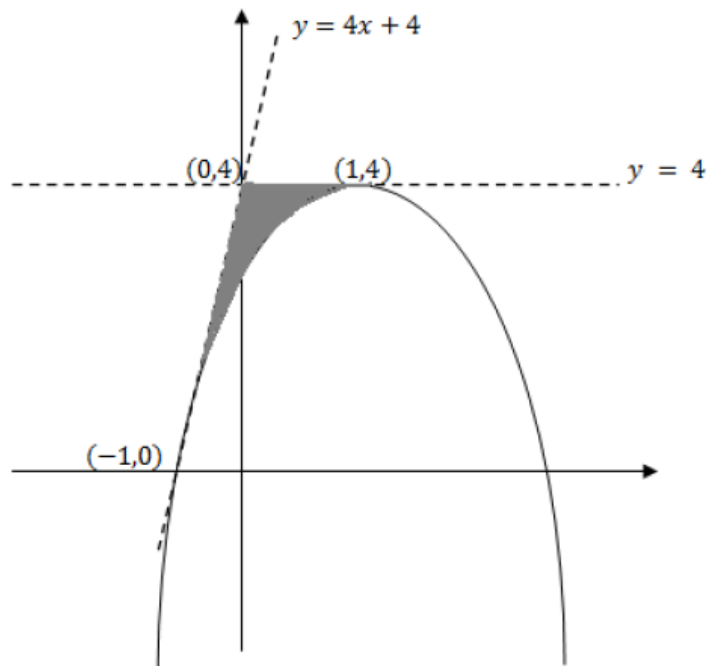
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,3), (-1,0), (3,0)$$

Tanxente no punto  $(1,4)$ :  $y = 4$ .

Determinamos o punto no que a tanxente é paralela á recta  $y = 4x$ . Como a derivada nun punto coincide coa pendente da recta tanxente nese punto, teremos que determinar o punto no que a derivada vale 4 (dúas rectas son paralelas se teñen a mesma pendente):

$$y' = 4 \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow x = -1$$

Tanxente no punto  $(-1,0)$ :  $y = 4(x + 1)$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [4x + 4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx + \int_0^1 [4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = -\left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Dada a función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$  calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de  $f$  e as rectas  $y = 4x - 7$  e  $y = 1$ .

### Solución

$$y = x^2 - x - 1, \quad y' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y'' = 2 > 0.$$

Logo  $y = x^2 - x - 1$  é unha parábola convexa con vértice en  $x = \frac{1}{2}$ .

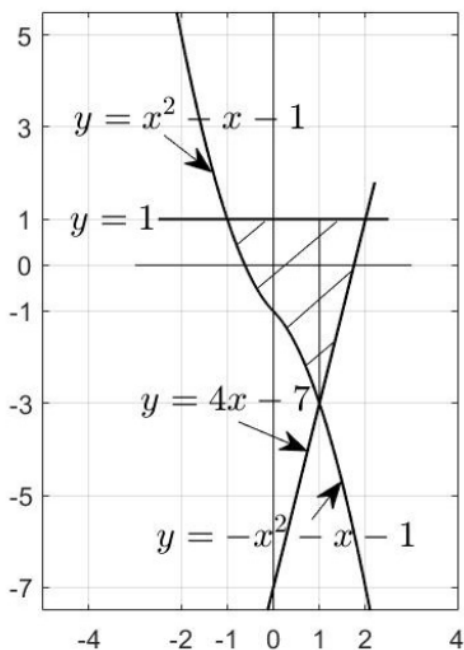
$$y = -x^2 - x - 1, \quad y' = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y'' = -2 < 0.$$

Logo  $y = -x^2 - x - 1$  é unha parábola cóncava con vértice en  $x = -\frac{1}{2}$ .

$x$	$y = x^2 - x - 1$
0	-1
-1	1
-2	5

$x$	$y = -x^2 - x - 1$
0	-1
1	-3
2	-7

$x$	$y = 4x - 7$
0	-7
1	-3
2	1



Como vemos, ao buscar puntos para a representación gráfica xa poden saír os puntos de corte. Se non, procédese como segue.

- Corte de  $y = 1$  con  $y = x^2 - x - 1$ :

$$x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}.$$

Só nos interesa  $x = -1$ .

- Corte de  $y = 1$  con  $y = 4x - 7$ :

$$4x - 7 = 1 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Corte de  $y = 4x - 7$  con  $y = -x^2 - x - 1$ :

$$-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x \in \{-6, 1\}.$$

Só nos interesa  $x = 1$ .

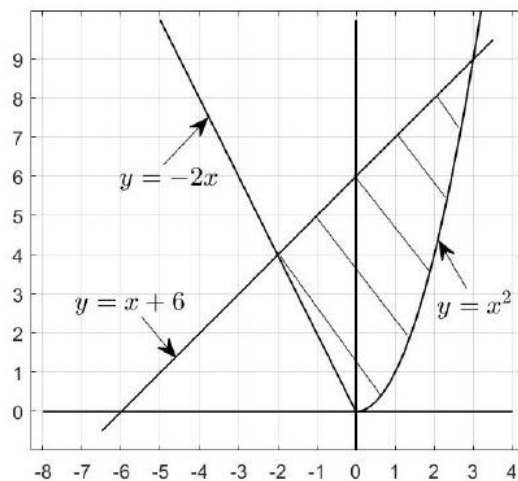
A área pedida é

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [1 - (x^2 - x - 1)] dx + \int_0^1 [1 - (-x^2 - x - 1)] dx + \left[ \text{área dun triángulo} \right] = \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 2) dx + \frac{1 \cdot 4}{2} = \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + 2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) + 2 = 6. \end{aligned}$$

Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de  $f(x) = x + 6$  e  $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

**Solución**

- $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$ .  
Só nos interesa  $x = 3$ .
- $-2x = x + 6 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ .



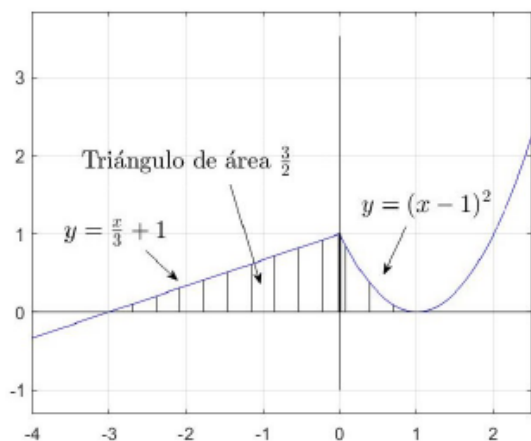
$$A = \left[ \begin{array}{l} \text{área dun triángulo} \\ \text{de base 6 e altura 2} \end{array} \right] + \int_0^3 (x + 6 - x^2) dx.$$

$$\int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^3 = -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{-18 + 9 + 36}{2} = \frac{27}{2}.$$

$$A = 6 + \frac{27}{2} = \frac{12 + 27}{2} = \frac{39}{2} = \mathbf{19.5}.$$

Calcule a área da rexión encerrada polo eixe  $X$  e a gráfica de  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se } x < 0, \\ (x - 1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

**Solución**



Tendo en conta que  $y = \frac{x}{3} + 1$  é a recta que pasa por  $(-3,0)$  e por  $(0,1)$  e que  $y = (x - 1)^2$  é a parábola de vértice  $(1,0)$  que pasa polos puntos  $(0,1)$  e  $(2,1)$ , chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

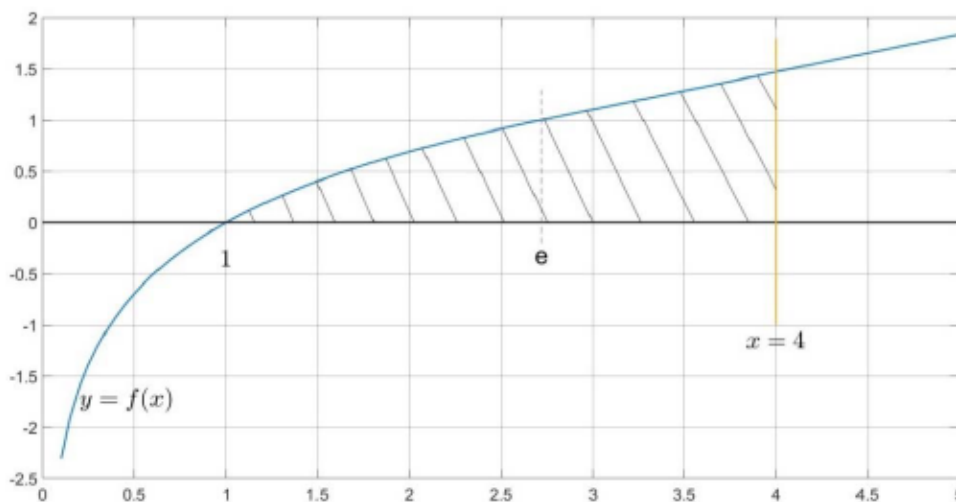
Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x - 1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[ \frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9 + 2}{6} = \frac{11}{6} u^2 = 1.8\bar{3} u^2,$$

onde  $u$  indica "unidade de lonxitude".

Calcula a área da rexión encerrada polo eixe  $X$ , a recta  $x = 4$  e a gráfica de  $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ \frac{x}{e} & \text{se } x \in (e, \infty). \end{cases}$

**Solución**



De acordo coa figura, a área pedida é a seguinte (o adxectivo "encerrada" obríganos a considerar a rexión raiada):

$$\ln e = 1, \ln 1 = 0$$

$$A = \int_1^e \ln x dx + \int_e^4 \frac{x}{e} dx = [x(\ln x - 1)]_1^e + \left[ \frac{x^2}{2e} \right]_e^4 = 1 + \frac{16}{2e} - \frac{e^2}{2e} = 1 + \frac{8}{e} - \frac{e}{2} = \frac{2e + 16 - e^2}{2e} u^2 \approx 2.5839 u^2,$$

onde  $u$  indica "unidade de lonxitude".