

Teorema fundamental do cálculo integral.

Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$, entón a súa función integral asociada $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con $x \in [a, b]$, é derivable nese intervalo e se verifica que $F'(x) = f(x)$.

1) Calcular a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $F(x) = \int_0^x (2 + \cos(t^2))dt$ no punto $x=0$

Solución:

Ecuación da recta tanxente $y - F(0) = F'(0)(x - 0)$

$F(0) = 0$, $F'(x) = 2 + \cos(x^2)$, polo que $F'(0) = 3$

a ecuación da recta pedida é $y = 3x$

2) Dada a función $\int_0^x e^{-t^2} dt$, ten puntos de inflexión?

Solución:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$F'(x) = e^{-x^2} \quad F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$F''(x) = 0 \text{ para } x=0$$

Podemos comprobar que é un punto de inflexión xa que nese punto pasa de convexa a cóncava

3) ¿É aplicable o teorema fundamental do calculo integral á función integral asociada a

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ no intervalo $[-1/2, 1/2]$?. Razoese a resposta e, en caso afirmativo,

comprobar a súa verificación.

Solución

A función é continua en $[-1/2, 1/2]$, por estar este intervalo no dominio da función, e ser cociente de continuas con denominador que non se anula en ningún punto do intervalo.

Entón o teorema fundamental do calculo integral di que a función integral $F(x)$ asociada a $f(x)$ no intervalo $[-1/2, 1/2]$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x)$

Comprobación:

$$F(x) = \int_{-1/2}^x f(t)dt = \int_{-1/2}^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{2} \int_{-1/2}^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-t^2)^{1/2}}{1/2} \right]_{-1/2}^x = -\left[\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Así } F'(x) = 0 - \frac{1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$