1) Debuxa a gráfica da función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

Solucion

$Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte cos eixes:

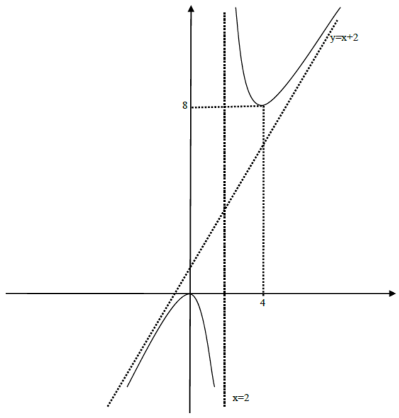
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow g(x)=0 \\ g(x)=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \boxed{x=2} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = 1 \\ b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = x+2}$$



Cálculo dos puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$g'(x)$	>0	<0	<0	>0
$g(x)$	crecente	decrecente	decrecente	crecente

$g(x)$ é crecente nos intervalos $(-\infty,0)$ e $(4,+\infty)$ e $g(x)$ é decrecente nos intervalos $(0,2)$ e $(2,4)$.

Calculamos a segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo: $(0,0)$

$g''(4) = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo: $(4,8)$

$g''(x) \neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$g''(x)$	<0	>0
$g(x)$	cóncava	convexa

$g(x)$ é convexa no intervalo $(2,+\infty)$ e cóncava no intervalo $(-\infty,2)$

Con todos estes datos, a gráfica de $g(x)$ será:

2) Debuxa a gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

Solución

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

Puntos de corte cos eixos:

$$\left.\begin{array}{r} x=0\Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=0\Rightarrow x(x+3)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{(0,0)};\boxed{(-3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \end{array}\right\} \boxed{x=-1} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{r} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x}{x(x+1)}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+3}{x+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}-x}{x+1}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{y=x+2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)-x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x+3=0$, que non ten raíces reais.

Polo tanto, non existen máximos nin mínimos relativos.

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	>0	>0
$f(x)$	crecent e	crecent e

$f(x)$ é crecente no intervalo $(-\infty,-1)$ e no intervalo $(-1,+\infty)$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

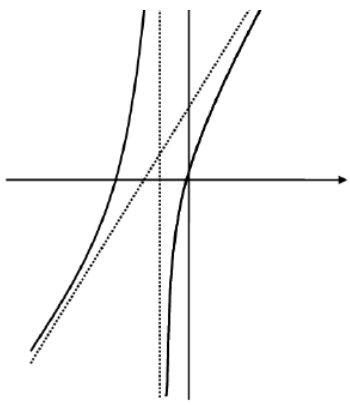
$f''(x)\neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x)$	>0	<0
$f(x)$	convexa	cóncava

$f(x)$ é convexa no intervalo $(-\infty,-1)$ e cóncava no intervalo $(-1,+\infty)$

Con todos estes datos a gráfica da función será:



3) Representar graficamente a función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, previo estudio completo.

<u>Solución</u>

-Domf = R - $\{0\}$

-Punto de corte co eixe Y non hai

-Puntos de corte co eixe X non hai

-Asíntotas verticais x= 0 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas horizontais: non ten (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas oblicuas: non ten (facendo os límites correspondentes)

-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos (facendo a 1ª derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) crece en $(1,+\infty)$

f(x) decrece en $(-\infty,0)\cup(0,1)$

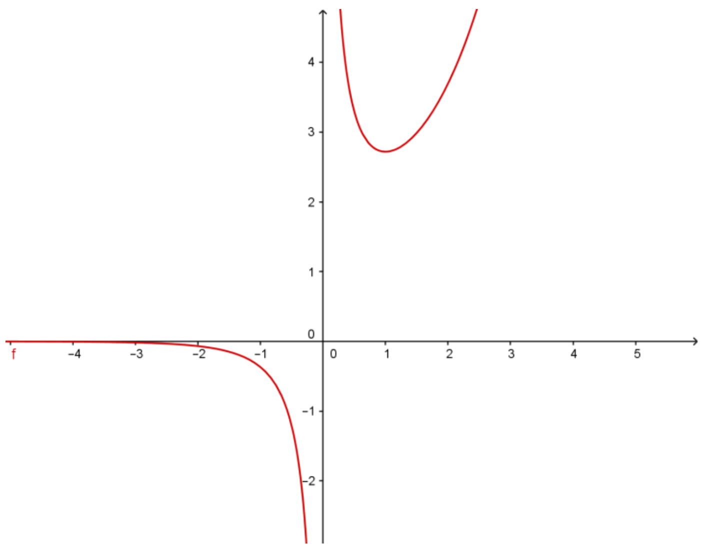
Hai un mínimo relativo en x= 1

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión (facendo a segunda derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) é convexa en $(0,+\infty)$

f(x) é cóncava en $(-\infty,0)$

Non hai puntos de inflexión



4) Representar graficamente a función $f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$

<u>Solución,</u>

-Dom f = R

-Punto de corte co eixe Y (0,1)

-Punto de corte co eixe X (-1,0)

-Asíntotas verticais non hai.

-Asíntotas horizontais: recta y= 0 pois tanto $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0, \quad pero \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

-Asíntotas oblicuas: So poderá haber asíntota oblicua se x→-∝

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(x+1)^2}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x}e^{-x}=-\infty\cdot+\infty=-\infty, \quad non\ hai\ a\,\mathrm{sin}tota\ oblicua\ cando\, x\to-\infty$$

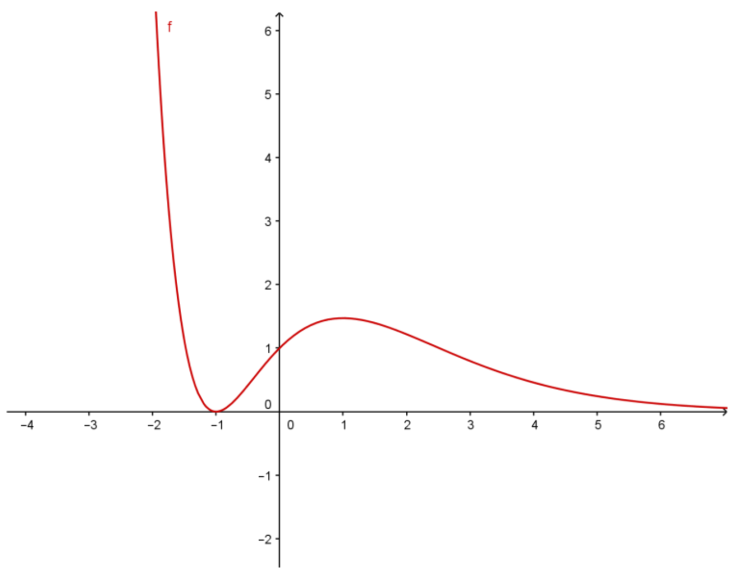
-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos

$f'(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$, que se anula para x= 1 e x = -1, comprobamos que , f decrece en (-∝,-1)∪(1,+∝), e crece en (-1,1), ten un mínimo relativo en x= -1, e un máximo relativo en x= 1

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión:

$f''(x)=\frac{-2xe^x-(1-x^2)e^x}{(e^x)^2}=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$, que se anula en $x=1+\sqrt{2} \quad e \quad x=1-\sqrt{2}$

.Podemos comprobar que son puntos de inflexión, que cóncava entre os dous, e convexa no resto.



Debuxa a gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

Solución,

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R}-\{2\}$

Simetrías:

$f(-x) = 1 + \frac{2}{(-x-2)^2} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) > 0$. Polo tanto non corta ao eixe de abscisas.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Corta ao eixe de ordenadas no punto $(0,\frac{3}{2})$

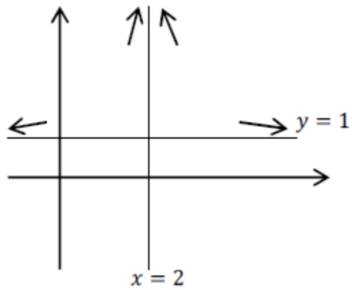
Asíntotas verticais:

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty \\ \\ lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontais:

$lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal

Non hai asíntotas oblicuas



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow$ Non hai puntos críticos

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

A función é crecente en $(-\infty, 2)$ e decrecente en $(2, +\infty)$. Non hai máximos nin mínimos.

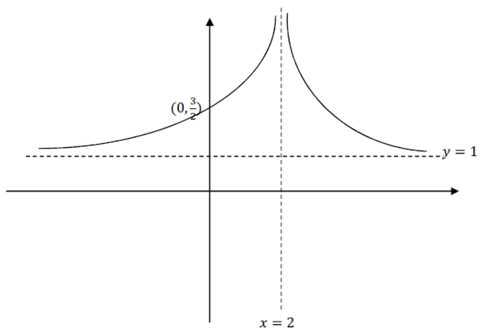
Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$f"(x) = = \frac{12(x-2)^2}{(x-1)^6} = \frac{12}{(x-1)^4} > 0.$ Non hai puntos de inflexión

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f"(x)$	+	+
$f(x)$	∪	∪

Convexa en todo o seu dominio

Gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$



$y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

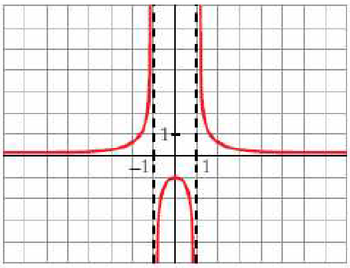
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical

- **Gráfica:**



$y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical

- **Gráfica:**