1) Calcula os valores de a, b, c e d para que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ teña un punto de inflexión no punto $(0,5)$ e a tanxente á súa gráfica no punto $(1,1)$ sexa paralela ao eixe X.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Punto de inflexión no punto $(0,5)$: $\begin{cases} f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ f(0) = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5} \end{cases}$

Entón $f(x) = ax^3 + cx + 5$. Ademais

Pasa polo punto $(1,1)$: $f(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$

Tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,1)$ paralela ao eixe X: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + c + 5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} c = -3a \\ a - 3a + 5 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 2};\ \boxed{c = -6}$$

2) a) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (x+1)e^{-x}$ no punto de corte de $f(x)$ co eixo OX.

b) Calcula, para $f(x) = (x+1)e^{-x}$: intervalos de crecemento e decrecemento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidade e convexidade.

Solución

a) $f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x+1 = 0$ (pois e^{-x} nunca vale 0) $x = -1$ $(-1,0)$

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -x e^{-x}$ $f'(-1) = e$

$y - 0 = e(x+1) \Rightarrow y = ex + e$

b) O dominio de f é R

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e decrecente en $(0, \infty)$

En 0 hai un máximo relativo que vale 1

$f''(x) = -e^{-x} + x e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}(x-1)$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Cóncava en $(-\infty, 1)$ e convexa en $(1, \infty)$

En 1 hai un punto de inflexión que $(1, 2/e)$

3) Calcula os valores de a e b para que a gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ teña un mínimo relativo no punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$. Para eses valores de a e b, calcula: asíntotas e intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$.

<u>Solución</u>

A información que me da é f´(1/2) = 0 e f (1/2) = 4

f(1/2) = a/2 + 2b polo que a/2 + 2b = 4, sacando denominador a+4b = 8

$f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$ f´(1/2) = a-4b polo que a-4b = 0

Resolvendo o sistema a= 4 b= 1 polo que f(x) = $f(x) = 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2+1}{x}$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1}{x^2} = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{x} - 4x\right) = 0$$

Polo tanto a asíntota oblicua é a recta $y = 4x$

Crecemento e decrecemento:

Como $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, temos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

	(-∞, -1/2)	(-1/2, 0)	(0, 1/2)	(1/2, ∞)
f' (x)	+	-	-	+
f (x)	↗	↘	↘	↗

é dicir> Crecente en (-∞, -1/2) ∪ (1/2, ∞),
Decrecente en (-1/2, 0) ∪ (0, 1/2)

4) Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula os valores de a, b, c para que $g(x)$ teña no punto (1, -1) un mínimo relativo e a recta tanxente á gráfica de $g(x)$, en x = 0 , sexa paralela á recta $y = 4x$.

<u>Solución</u>

A información que me da é: g´(1) = 0 , g(1) =-1 , g´(0) = 4

$$g(x) = ax^4 + bx + c \,;\, g'(x) = 4ax^3 + b$$

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1 \\ g'(1) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \\ g'(0) = 4 \Rightarrow b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1; b = 4; c = -4$$