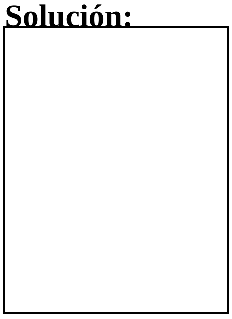
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

<u>Problema 1</u>

Un rectángulo ten un perímetro de 60 cm. e xira arredor de un dos seus lados.
a) Calcula o volume do cilindro obtido en función do lado do rectángulo en torno ao que xira este.
b) Que dimensións debe ter o rectángulo para que o volume do cilindro sexa máximo?

<u>Solución:</u>



x

y

a) Do enunciado dedúcese 2x + 2y = 60
polo que y = (60-2x)/2= (30-x) x € (0,30)

O volume do cilindro será V(x) = $\pi(30-x)^2 x$
(Área da base por altura)

b) Calculamos V´(x)

V´(x) = $2\pi(30-x)(-1)x+\pi(30-x)^2 = -2\pi(30-x)x+\pi(900-60x+x^2) =$
$3\pi x^2 - 120\pi x + 900\pi$

Vexamos cando se anula a derivada

$3\pi x^2 - 120\pi x + 900\pi = 0$
$x^2 - 40x + 300 = 0 \Rightarrow x_1 = 30 \ , x_2 = 10$

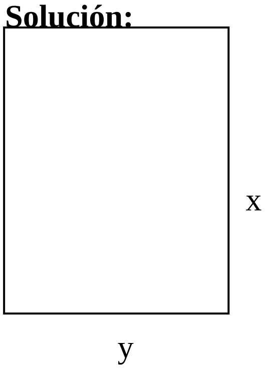
A derivada segunda
V´´(x) = 6πx- 120π

entón
V´´(30)>0
V´´(10) <0 , é o valor para o que se acada o máximo (dimensións 10 de alto e 20 de ancho)

<u>Problema 2</u>

Quérese cercar un campo rectangular que linda cun camiño por un dos seus lados. Se a cerca do lado do camiño custa 6 euros/metro e a dos outros lados 2 euros /metro acha as dimensións do campo de area máxima que pode cercarse con 2560 euros

<u>Solución:</u>



Do enunciado dedúcese , supoñendo que o lado que linda co camiño mide x, que o custo da cerca será
$6x + 2y + 2y + 2x$

Ou sexa: $8x + 4y = 2560$
polo que $y = (2560- 8x)/4 = 640-2x$

A area será $A(x) = (640-2x)x = 640x - 2x^2$

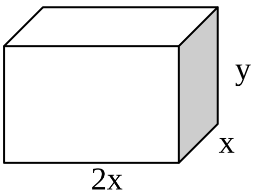
$A'(x) = 640 - 4x$, que se anula en $x= 160$
$A''(x) = -4$
polo que $A''(160)<0$, polo que hai un máximo en 160.

Así as dimensións son de 160 x 320 metros

<u>Problema 3</u>

Quérese fabricar unha caixa de madeira sen tapa cunha capacidade de 2 m^3. Por razóns de porte no transporte da mesma, a lonxitude da caixa ten que seo o dobre que a anchura. Ademais, a madeira para construír a base da caixa custa 12 euros por metro cadrado , mentres que a madeira para construír as caras laterais custa 8 euros/m^2. Acha as dimensións da caixa para que o custe sexa mínimo e calcula dito custo mínimo

Solución



Volume da caixa $2x^2y$

Como $2x^2y= 2$, entón $y = 1/x^2$

A función custo será $C(x) = 12\cdot 2x\cdot x + 8\left(2\cdot 2x\cdot \frac{1}{x^2} + 2\cdot x\cdot \frac{1}{x^2} \right) = 24x^2 + \frac{48}{x}$

Así $C'(x) = 48x - \frac{48}{x^2}$ que se anula para $x=1$

$C''(x) = 48 + \frac{72}{x^3}$; $C''(1) > 0$ polo que en $x= 1$ hai un mínimo , e o custo é $C(1)= 72$ euros.

<u>Problema 4</u>

Divídese unha corda de 100 m. de largo en dous cachos. Cun deles formase un cadrado e co outro unha circunferencia. Acha as lonxitudes dos cachos para que a suma das areas do cadrado e do círculo sexa mínima.

Solución:

Lonxitude do cadrado x
Lonxitude da circunferencia 100-x

Lado do cadrado $\frac{x}{4}$, entón área do cadrado $\frac{x^2}{16}$

Radio do círculo $\frac{100-x}{2\pi}$, entón área do círculo $\pi\left(\frac{100-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}(100-x)^2$

A Área a minimizar á A(x) = $\frac{x^2}{16}+\frac{1}{4\pi}(100-x)^2$

A´(x) = $\frac{2x}{16}$ - $\frac{2}{4\pi}(100-x)$ = $\left(\frac{2}{16}+\frac{2}{4\pi}\right)x-\frac{50}{\pi}$

Vexamos cando A´(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{2}{16}+\frac{2}{4\pi}\right)x-\frac{50}{\pi}$ = 0 $\Leftrightarrow$ (2π +8)x - 800 = 0 $\Leftrightarrow$

$$x = \frac{800}{2\pi+8} = \frac{400}{\pi+4}$$

A´´(x) = $\left(\frac{2}{16}+\frac{2}{4\pi}\right)$ >0 $\forall$x , polo que hai un mínimo en x = $\frac{400}{\pi+4}$

e nese caso y = 100- $\frac{400}{\pi+4}$ = $\frac{100\pi}{\pi+4}$