a) Define función continua nun punto. ¿Que tipo de discontinuidade ten $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ nos puntos $x = 0$ e $x = 2$?

b) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ no seu punto de inflexión.

Solución

a) Una función $f(x)$ dise continua nun punto x_0 se:

1) Existe e é finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$
2) Existe $f(x_0)$
3) O valor da función no punto coincide co límite anterior: $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Discontinuidade en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = -\infty \end{array}\right\}$$

Discontinuidade de salto infinito

Discontinuidade en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = 2 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = 2 \end{array}\right\}$$

Discontinuidade evitable.
Evítase definindo $f(2) = 2$

b) $$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1 \\ f'(x) = 6x^2 - 12x \\ f''(x) = 12x - 12 \\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'''(x) = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No punto (1,-3), $f(x)$ ten un punto de inflexión.

$f'(1) = 6$ = pendente da recta tanxente á grafica de $f(x)$ no punto (1,-3). Polo tanto, a ecuación da recta tanxente no punto (1,-3) é:

$y + 3 = -6(x - 1)$

É dicir: $\boxed{y = -6x + 3}$

a) Calcula $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)
b) Calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Solución

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{3/2} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Substitución: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+2}$

Calculamos as raíces do denominador e facemos a descomposición en fraccións simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A+2B}{(t+2)(t+1)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-1;\ B=1$$

Entón:

$$\int \frac{dt}{t^2+3t+2} = -\int \frac{dt}{t+2} + \int \frac{dt}{t+1} = ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$$

Tendo en conta que $e^x = t$ e aplicando Barrow:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \left[ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(e+2) - ln2 + ln3 = \ln(3e+3) - \ln(2e+4)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = ln\left(\frac{3e+3}{2e+4}\right)}$$

a) Dada a función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ calcula os valores de a, b, c sabendo que $x = \frac{1}{2}$ é unha asíntota vertical e que $y = 5x - 6$ é a recta tanxente á súa gráfica no punto correspondente a $x = 1$. Para os valores de a, b, c calculados, posúe $f(x)$ máis asíntotas?

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Pódese aplicar, no intervalo $[0,1]$, este teorema á función $f(x) = \frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula o punto ao que fai referencia o teorema.

Solución

a) $x = {}^{1}/_{2}$ asíntota vertical $\Rightarrow$ $\boxed{c = 2}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(2x-1) - 2(ax+b)}{(2x-1)^2} = \frac{\cancel{2ax} - a - \cancel{2ax} - 2b}{(2x-1)^2} = \frac{-a - 2b}{(2x-1)^2}$$

Como a recta $y = 5x - 6$ é tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -5 \\ f'(1) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = -1 \\ -a - 2b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{a = 3} \\ \boxed{b = -4} \end{array}\right.$$

Para estes valores de a, b e c, $f(x)$ ten unha asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-4}{2x-1} = {}^{3}/_{2} \Rightarrow \boxed{\textit{Asíntota horizontal: } y = {}^{3}/_{2}}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b) entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

A función dada é unha función racional e o denominador non se anula no intervalo $[0,1]$. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$ e podemos aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial:

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(2c-1)^2} = \frac{1 - 1/2}{1-0} \Rightarrow c^2 - 4c + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - \sqrt{2} \in (0,1) \\ c_2 = 2 + \sqrt{2} \notin (0,1) \end{cases}$$

Polo tanto, o punto que cumpre a igualdade do teorema é:

$$\boxed{c = 2 - \sqrt{2}}$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2$ e a recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

Solución

$f(x) = -x^2 \;\Rightarrow\; f(1) = -1$

$f'(x) = -2x \;\Rightarrow\; f'(1) = -2 =$ pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(1,-1)$

Entón, $m = {}^{1}/_{2}$ = pendente da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,-1)$

Ecuación da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,-1)$:

$y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

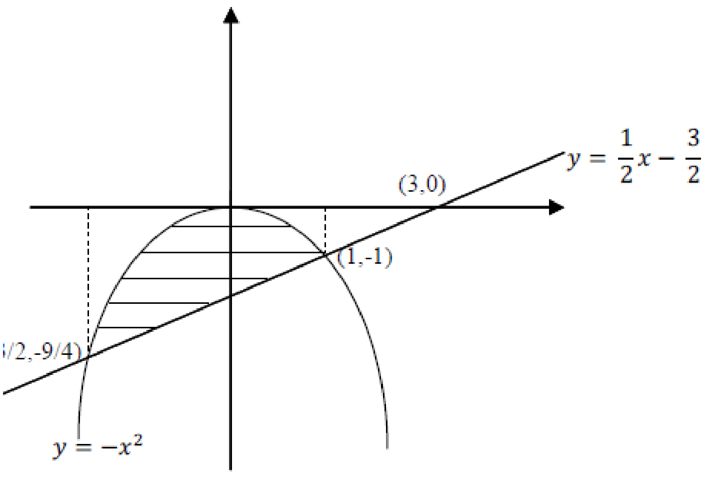
$f''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ é cóncava

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ ten un máximo en $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ é o vértice da parábola

Puntos de corte cos eixes: $\begin{cases} \text{parábola: } (0,0) \\ \text{recta normal: } (3,0), (0,-3/2) \end{cases}$

Puntos de corte da parábola e a recta normal:

$-x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; 2x^2 + x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x_1 = -3/2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-3/2,-9/4);\; (1,-1)$



$A = \int_{-3/2}^{1}\left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-3/2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\right) =$
$\frac{-4-3+18}{12} - \frac{18-9-36}{16} = \frac{11}{12} + \frac{27}{16} = \frac{125}{48}$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{125}{48}\; u^2}$$

a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-2x} - 2x}{sen^2 x}$

b) Queremos dividir un fío metálico de 70 metros de lonxitude en tres partes de maneira que unha delas teña dobre lonxitude que outra e ademais que ao construír con cada parte un cadrado, a suma das áreas dos tres cadrados sexa mínima. Calcula a lonxitude de cada parte.

Solución

a)

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-2x} - 2x}{sen^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-senx + 2e^{-2x} - 2}{2senxcosx} = \lim_{x\to 0} \frac{-cosx - 4e^{-2x}}{2cos^2 x - 2sen^2 x} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

b)

Lonxitudes das partes: $x;\ \ 2x;\ \ 70-3x$

Función a minimizar:

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[x^2 + 4x^2 + (70-3x)^2\right] = \frac{1}{16}\left(14x^2 - 420x + 4900\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(28x - 420)$$

$$\left.\begin{aligned} & f'(x) = 0 \iff x = \frac{420}{28} = 15 \\ & f''(x) = \frac{28}{16} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (15, f(15)) \text{ mínimo}$$

$$\boxed{Lonxitudes\ das\ partes: 15cm; 30cm; 25cm}$$

a) A segunda derivada dunha función $f(x)$ é $f"(x) = 4e^{2x} - 2x$. Ademais a tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0,1)$ é paralela á recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$.

b) Calcula $\int_0^{\pi/2} xsen(2x + \pi)dx$

Solución

a)

$f'(x)$ é unha primitiva de $f"(x)$, así que calculamos a integral indefinida de $f"(x)$:

$\int (4e^{2x} - 2x)dx = 2e^{2x} - x^2 + C$

Para determinar a constante C usamos que $f'(0)$ = pendente da recta $x - y + 3 = 0$. Polo tanto

$1 = f'(0) = 2 + C \Rightarrow C = -1$

Entón, $f'(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$

Calculamos a integral indefinida de $f'(x)$, posto que $f(x)$ é unha primitiva de $f'(x)$

$\int (2e^{2x} - x^2 - 1)dx = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x + K$

E para determinar a constante K, usamos que $f(x)$ pasa polo punto $(0,1)$

$1 = f(0) = 1 + K \Rightarrow K = 0$

Así:

$$\boxed{f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x}$$

b)

$$\int xsen(2x + \pi)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x + \pi) + \int \frac{1}{2}\cos(2x + \pi)\, dx = -\frac{x}{2}\cos(2x + \pi) + \frac{1}{4}sen(2x + \pi) + C$$

$$\left\{\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen(2x + \pi)dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(2x+\pi)}{2} \end{array}\right\}$$

$$\int_0^{\pi/2} xsen(2x + \pi)dx = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x + \pi) + \frac{1}{4}sen(2x + \pi)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

Dada a función $f(x) = \begin{cases} mx & se \;\; x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & se \;\; x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula os valores de a, b e m para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ e teña un extremo relativo en $x = 3$.

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Para os valores $a = 1$, $b = -6$ e $m = -4$, calcula, se existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que a tanxente á gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sexa paralela ao segmento que une os puntos $(0,0)$ e $(5,-4)$.

Solución

Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 1$

a) $$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 1^-} f(x) = m \\ lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b + 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m = a + b + 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} m & se \;\; x < 1 \\ 2ax + b & se \;\; x > 1 \end{cases}$$

Entón, debe cumprirse:

$$\left.\begin{array}{l} m = \;\; a + b + 1 \\ m = 2a + b \end{array}\right\} \leftarrow \text{Para que } f(x) \text{ sexa derivable en } x = 1$$

$$6a + b = 0 \leftarrow \quad (f'(3) = \; 6a + b, f'(3) = 0, \text{ por ter un extremo relativo en } x = 3.)$$

Resolvendo este sistema obtense:

$$\boxed{m = -4; \;\; a = 1; \;\; b = \; -6}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é continua no intervalo $[a,b]$ e derivable en (a,b), entón existe algún punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - \; f(a)}{b - \; a}$$

é dicir, a tanxente á gráfica de $f(x)$, no punto $x = c$, é paralela ao segmento que une os puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Para os valores dados, a función é derivable en $\mathbb{R}$ (en $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$ é polinómica e para eses valores xa vimos que era derivable en $x = 1$) e ademais

$$f(x) = \begin{cases} -4x & se \;\; x < 1 \\ x^2 - \; 6x + 1 & se \;\; x \geq 1 \end{cases} \qquad\qquad f'(x) = \begin{cases} -4 & se \;\; x < 1 \\ 2x - 6 & se \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Temos que encontrar un $c \in (0,5)$ tal que $f'(c)$ coincida coa pendente do segmento que une os puntos $(0,0), (5,-4)$, é dicir:

$$f'(c) = \frac{-4-0}{5-0} = -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 2c - \; 6 \; = \; -\frac{4}{5} \Rightarrow 2c = \; \frac{26}{5}$$

$$\boxed{c = \; {}^{13}/_{5}}$$

a) Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx$

b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Se $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+3e^t}dt$, calcula $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$

Solución

a)

$$e^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{2}{3}ln|t| - \frac{2}{3}ln|1+t| + C =$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)] + C$$

$$e^x = t \Rightarrow x = lnt$$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)]_0^1 = \frac{2}{3}[1 - \ln(1+e) + ln2]$$

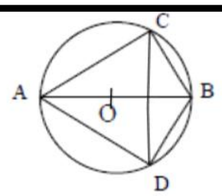
$$\boxed{Solución\text{: } \frac{2}{3}ln\frac{2e}{1+e}}$$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

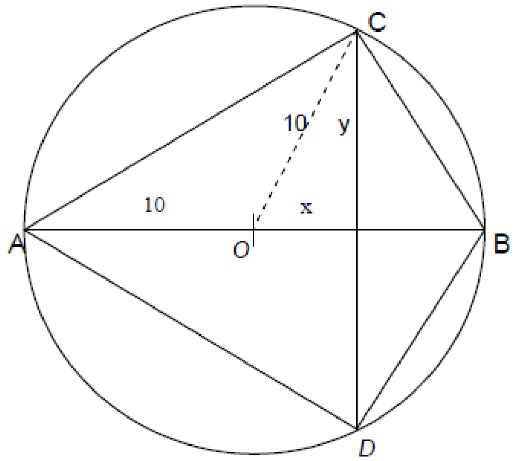
Indeterminación $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3+3e^x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Nunha circunferencia de centro O e radio 10 cm. trázase un diámetro AB e unha corda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A que distancia do centro O da circunferencia debe estar a corda CD, para que a diferencia entre as áreas dos triángulos ADC e BCD sexa máxima?



Solución



Triángulo ADC:
Base: $2y$
Altura: $10+x$

$Área = y(10+x)$

Triángulo BCD:
Base: $2y$
Altura: $10-x$

$Área = y(10-x)$

Diferencia de áreas:

$A_1 - A_2 = y(10+x) - y(10-x) = 2xy$

O teorema de Pitágoras proporciónanos unha relación entre x e y :

$y = \sqrt{10^2 - x^2}$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$f(x) = 2x\sqrt{100-x^2}$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$$f'(x) = 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100-x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow\ x = \pm 5\sqrt{2}$$

Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$$f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{4x\sqrt{100-x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2};\ \ f''(5\sqrt{2}) = -\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} - \frac{200+100}{50} = -8 < 0$$

$$\boxed{Solución: 5\sqrt{2}\ cm.}$$

a) Enuncia o teorema de Rolle. Determina o valor de a para que sexa aplicable o teorema de Rolle á función $f(x) = x^3 + ax - 1$, no intervalo $[0,1]$. Para este valor de a, calcula un punto $c \in (0,1)$ no que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ sexa paralela ao eixe OX.

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$

Solución

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 + ax - 1$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, xa que é unha función polinómica. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$. Para aplicar Rolle neste intervalo, debemos impoñerlle a condición $f(0) = f(1)$

$f(0) = f(1) \quad \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Un punto do intervalo $(0,1)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe OX, será un punto do intervalo no que se anule a primeira derivada (a existencia dese punto está garantida polo teorema de Rolle)

$f(x) = x^3 - x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1;$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, pero $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ non é un punto do intervalo $(0,1)$. Polo tanto:

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$\frac{x^3+3}{x^2-x} = x + 1 + \frac{x+3}{x^2-x}$

Como $x^2 - x = x(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$\frac{x+3}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow A = -3; B = 4$

Entón:

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx = \int \left(x + 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x-1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|x| + 4ln|x-1| + C$$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|x| + 4ln|x-1| + C}$$

a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Ten a ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ algunha solución no intervalo $(0,1)$? ¿Ten esta ecuación máis dunha solución real?

b) Calcula os valores de a e b para que $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$

Solución

a) Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a)\cdot f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideremos a función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x - 2$

$f(x)$ é continua en $[0,1]$ xa que é continua en $\mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.
$f(0) = -2 < 0$
$f(1) = 1 > 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$

teorema de Bolzano

Polo tanto, $\boxed{a\ ecuación\ x^3 + 2x - 2 = 0, ten\ unha\ solución\ real\ no\ intervalo\ \in (0,1).}$

Se $f(x)$ tivese dúas raíces reais c_1 e c_2 entón

$f(x)$ continua en $[c_1,c_2]$ e derivable en (c_1,c_2) por ser continua e derivable en $\mathbb{R}$
$f(c_1) = 0 = f(c_2)$

teorema de Rolle

$\Rightarrow \exists\, d \in (c_1,c_2)$ tal que $f'(d) = 0$
(a función derivada tería unha raíz real)

pero a función derivada, $f'(x) = 3x^2 + 2$, non ten raíces reais. Polo tanto:

$$\boxed{x^3 + 2x - 2 = 0, ten\ unha\ única\ solución\ real\ e\ esa\ solución\ está\ no\ intervalo\ (0,1).}$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2ax+b-2e^{2x}}{2x\cos(x^2)} = \frac{b-2}{0}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Para que este límite sexa finito, ten que ser $\boxed{b = 2}$.

Tomando $b = 2$, resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+2-2e^{2x}}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2a-4e^{2x}}{2\cos(x^2)-4x^2 sen(x^2)} = \frac{2a-4}{2}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Entón

$\frac{2a-4}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

a) Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e os intervalos de concavidade e convexidade da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixes).

<u>Solución</u>

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	Crecente	Decrecente	Crecente

Crecente nos intervalos $(-\infty, 2/3)$ e $(2, \infty)$
Decrecente no intervalo $(2/3, 2)$

$f''(x) = 6x - 8; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3$

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	Cóncava	Convexa

Cóncava en $(-\infty, 4/3)$
Convexa en $(4/3, \infty)$

b) $x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0.$

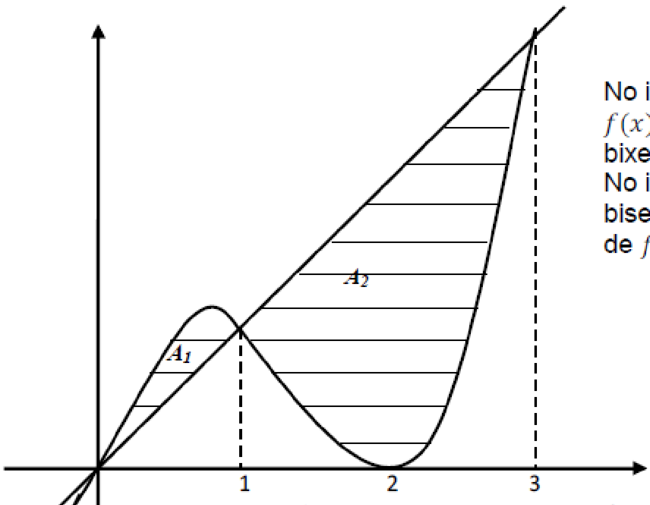
Os puntos de corte de $f(x)$ cos eixes son: $(0,0)$ e $(2,0)$

$x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Os puntos de corte de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$ son: (0,0); (1,1) e (3,3)

Con estes puntos de corte e os resultados do apartado a), podemos debuxar a rexión limitada polas gráficas de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$



No intervalo (0,1), a gráfica de $f(x)$ está por riba da gráfica de bixectriz
No intervalo (1,3), a gráfica da bisectriz está por riba da gráfica de $f(x)$.

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x - x)\,dx + \int_1^3 (x - x^3 + 4x^2 - 4x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{37}{12}\, u^2}$$

a) Calcula: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^x}$

b) Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[1,4]$ tal que $\int_1^2 f(x)dx = 2$ e $\int_1^4 f(x)dx = -4$, ¿cal é o valor de $\int_2^4 5f(x)dx$? Enuncia as propiedades da integral definida que utilices.

Solución

a) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x + xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} 2e^x = \infty$$

Simplificamos

b)

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx \quad \text{(Propiedade 1)}$$

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5\int_2^4 f(x)dx \quad \text{(Propiedade 2)}$$

Polo tanto

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5\int_2^4 f(x)dx = 5\left[\int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx\right] = 5(-4-2) = -30$$

Propiedade 2 Propiedade 1

Así:

$$\boxed{\int_2^4 5f(x)dx = -30}$$

Propiedade 1 (Aditividade respecto ao intervalo de integración): Se $a < b < c$ e $f(x)$ é continua en $[a,c]$ entón

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Propiedade 2: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ entón

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \text{para calquera } c \in \mathbb{R}.$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, e as rectas $y = 20$; $x - y + 15 = 0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

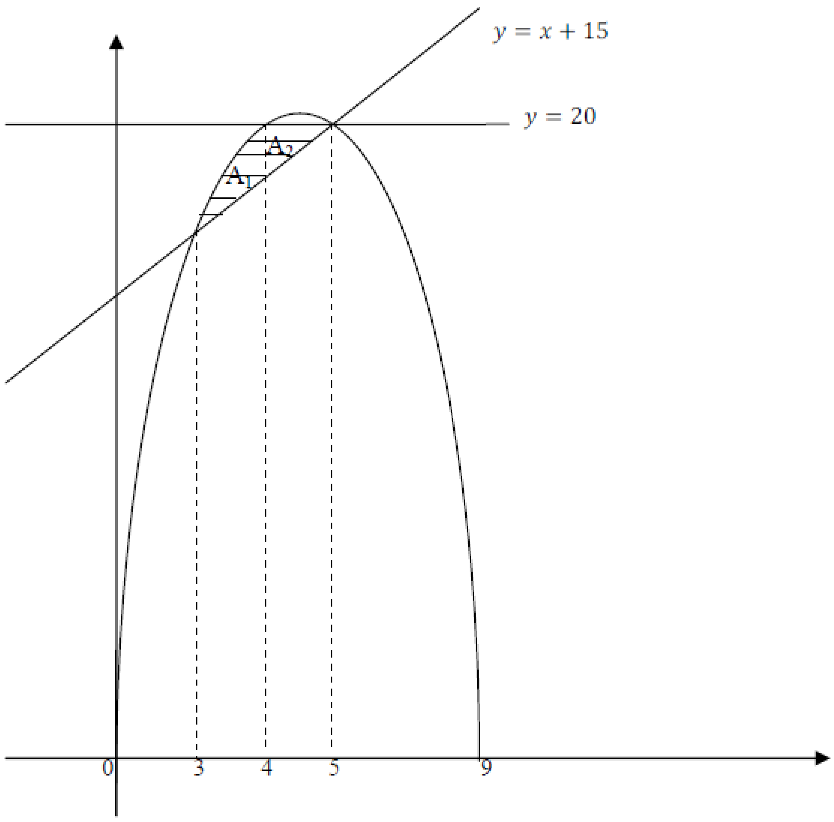
<u>Solución</u>

Parábola: $y = -x^2 + 9x = x(-x+9) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0),\ (9,0) \\ \text{Vértice: } \left({}^{9}/_{2},\ {}^{81}/_{4}\right) \\ \text{Cóncava (o coeficiente de } x^2 \text{ é negativo)} \end{cases}$

Puntos de corte da parábola coas rectas:

$-x^2 + 9x = 20 \;\Rightarrow\; x^2 - 9x + 20 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 4 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$ Puntos de corte: (4,20), (5,20)

$-x^2 + 9x = x + 15 \;\Rightarrow\; x^2 - 8x + 15 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 3 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$ Puntos de corte: (3,18), (5,20)



$$A = A_1 + A_2 = \int_3^4 (-x^2 + 9x - x - 15)dx + \int_4^5 (20 - x - 15)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x\right]_3^4 + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_4^5 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - 60 + 9 - 36 - 45 + 25 - \frac{25}{2} - 20 + 8 = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{7}{6}\,u^2}$$

Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos de $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

Solución

$f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

O denominador non se anula nunca, polo tanto

$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$ e $\boxed{Non\ existen\ asíntotas\ verticais}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = 0$

Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital

Polo tanto

$\boxed{Asíntota\ horizontal: y = 0. Non\ ten\ asíntota\ oblicua}$

Estudo da derivada:

$f'(x) = \frac{2e^{x^2} - (2x+1)2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{-4x^2 - 2x+2}{e^{x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$

Como $e^{x^2} > 0$, o signo de $f'(x)$ determínao o numerador. Temos polo tanto que

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	Decrecente	Crecente	Decrecente

Crecente en: $(-1, 1/2)$

Decrecente en: $(-\infty, -1)$ e $(1/2, \infty)$

En $x = -1$, a función pasa de decrecente a crecente e en $x = 1/2$ pasa de crecente a decrecente. Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} Mínimo: (-1, -1/e) \\ Máximo: (1/2, 2/e^{\frac{1}{4}}) \end{array}}$$

a) Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.
b) Calcula $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$

Solución

a) Unha función $F(x)$ dise que é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$\frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}$

Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A+B}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{cases} \Rightarrow A = -{}^1/_2 ; B = {}^3/_2$

Entón:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \int \left(x + \frac{x+2}{x^2-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C$$

e aplicando a regra de Barrow:

$\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{9}{4} - ln2 + \frac{3}{2}ln2 - (2 - \frac{1}{2}ln3) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{2}ln3$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln6}$$

Debuxa a gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

Solución

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left.\begin{array}{r} x=0\Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=0\Rightarrow x(x+3)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{(0,0)};\boxed{(-3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \end{array}\right\} \boxed{x=-1} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{r} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x}{x(x+1)}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+3}{x+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}-x}{x+1}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{y=x+2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)-x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x+3=0$, que non ten raíces reais.

Polo tanto, non existen máximos nin mínimos relativos.

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	>0	>0
$f(x)$	crecente	crecente

$f(x)$ é crecente no intervalo $(-\infty,-1)$ e no intervalo $(-1,+\infty)$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

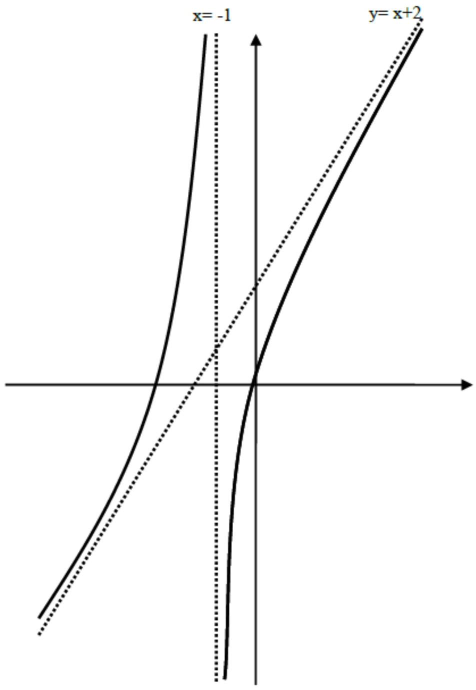
$f''(x)\neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x)$	>0	<0
$f(x)$	convexa	cóncava

$f(x)$ é convexa no intervalo $(-\infty,-1)$ e cóncava no intervalo $(-1,+\infty)$

Con todos estes datos a gráfica da función será:



a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Sabendo que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, con f unha función continua en todos os puntos da recta real, calcula $f(2)$.

b) Calcula $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

Solución

a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entón $F(x)$ é derivable en (a,b) e ademais $F'(x)=f(x)$.

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x) \Rightarrow f(x)=F'(x)=2x+3x^2$$

e polo tanto:

$$f(2)=4+12=16$$

b) O numerador e denominador son funcións polinómicas do mesmo grao. Polo tanto, en primeiro lugar, facemos a división:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{1-x}{x^2+x}$$

e, tendo en conta que $x^2+x=x(x+1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{1-x}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+Bx+A}{x^2+x} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

Polo tanto

$$\int \frac{1-x}{x^2+x}dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2dx}{x+1}$$

e aplicando a regra de Barrow

$$\int_1^2 \frac{1-x}{x^2+x}dx = \left[x+\ln|x|-2\ln|x+1|\right]_1^2 = 2+\ln 2-2\ln 3-1+2\ln 2 = 1+3\ln 2-2\ln 3 = 1+\ln(8/9)$$

a) Define función continua nun punto. ¿Cando se di que unha discontinuidade é evitable?¿Para que valores de k, a función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ é continua en todos os puntos da recta real?

b) Determina os valores de a, b, c, d para que a función $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un máximo relativo no punto (0,4) e un mínimo relativo no punto (2,0).

<u>Solución</u>

a) Dise que $f(x)$ é continua no punto $x=x_0$, se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x);\quad \exists f(x_0);\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Dise que $f(x)$ ten unha descontinuidade evitable no punto $x=x_0$, se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\nexists f(x_0) \quad \text{ou ben } \exists f(x_0) \text{ pero } \quad f(x_0)\neq \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ é un cociente de funcións continuas en □ . Polo tanto $f(x)$ será continua en □ se non se anula o denominador, pero

$$x^2+k=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-k}$$

Así $f(x)$ é continua en □ para $k\in(0,\infty)$.

b) Máximo relativo en $(0,4) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(0)=4 \Rightarrow \boxed{d=4} \\ g'(0)=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)=ax^3+bx^2+4$

Mínimo relativo en $(2,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(2)=0 \Rightarrow 8a+4b+4=0 \\ g'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{a=1} \\ \boxed{b=-3} \end{array}\right.$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x+y=7$ e a gráfica da parábola $f(x)=x^2+5$. Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)

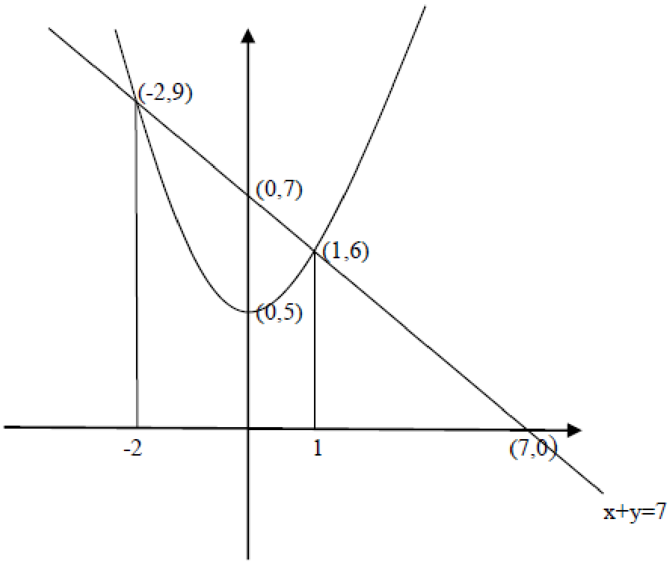
Solución

$x+y=7 \Rightarrow$ Puntos de corte da recta cos eixes: (0,7), (7,0)

$$f(x)=x^2+5 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=2x \Rightarrow \text{Decrecente en } (-\infty,0) \text{ e crecente en } (0,\infty) \\ \text{Corte cos eixes: } (0,5)\text{; Vértice } (0,5)\text{; } f''(x)=2>0 \Rightarrow \text{convexa} \end{cases}$$

Puntos de corte de recta e parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y=7-x \\ y=x^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte das gráficas: } (-2,9);(1,6)$$



$$\acute{A}rea=\int_{-2}^{1}\left[7-x-(x^2+5)\right]dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\boxed{\frac{9}{2}u^2}$$

Calcula: $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)}$

Solución

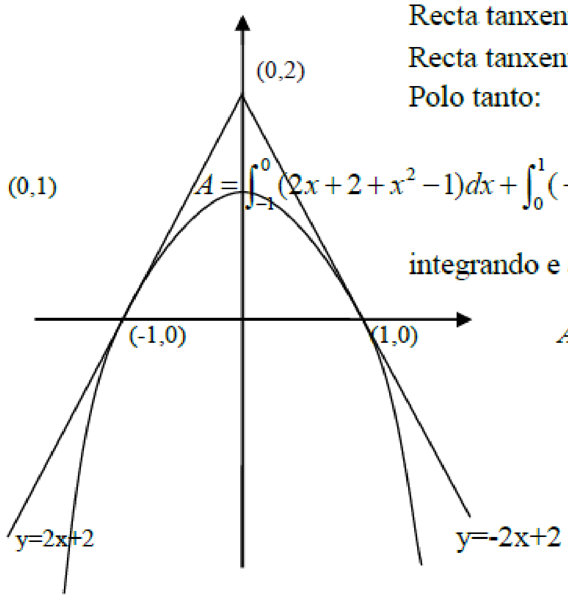
É unha indeterminación do tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2senx}{2x\cos(x^2)}\underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{2\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y=-x^2+1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixo OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

Solución

$$\text{parábola: } y=-x^2+1\begin{cases}\text{vértice}:(0,1)\\ \text{Puntos corte eixe 0X: }(-1,0),(1,0)\\ y'=-2x;\ \ y''=-2<0\quad \text{cóncava}\end{cases}$$



Recta tanxente en (-1,0): $y=2(x+1)\Leftrightarrow y=2x+2$

Recta tanxente en (1,0): $y=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Polo tanto:

$$A=\int_{-1}^{0}(2x+2+x^2-1)dx+\int_{0}^{1}(-2x+2+x^2-1)dx$$

integrando e aplicando a regra de Barrow

$$A=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}=\boxed{\frac{2}{3}u^2}$$

Debuxa a gráfica da función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

Solución

3) $Dom(g)=\mathbb{R}-\{2\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow g(x)=0 \\ g(x)=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=+\infty \end{array}\right\} \boxed{x=2} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{r} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x(x-2)}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x-2}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2x}{x-2}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=x+2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$g'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$g'(x)$	>0	<0	<0	>0
$g(x)$	crecente	decrecente	decrecente	crecente

$g(x)$ é crecente nos intervalos $(-\infty,0)$ e $(4,+\infty)$ e $g(x)$ é decrecente nos intervalos $(0,2)$ e $(2,4)$.

Calculamos a segunda derivada:

$$g''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}=\frac{8}{(x-2)^3}$$

$g''(0)=-1<0 \Rightarrow$ Máximo relativo: $(0,0)$

$g''(4)=1>0 \Rightarrow$ Mínimo relativo: $(4,8)$

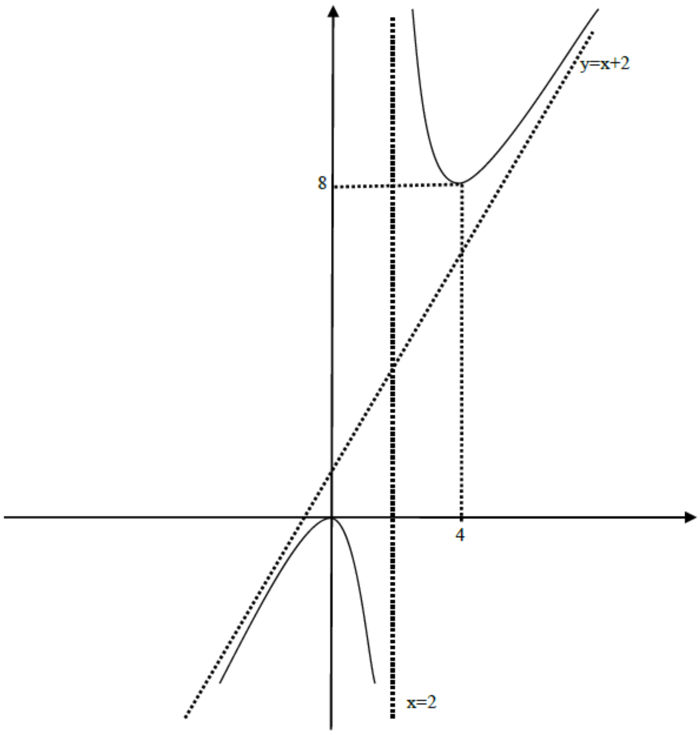
$g''(x)\neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$g''(x)$	<0	>0
$g(x)$	cóncava	convexa

$g(x)$ é convexa no intervalo $(2,+\infty)$ e cóncava no intervalo $(-\infty,2)$

Con todos estes datos, a gráfica de $g(x)$ será:



a) Calcula $\int x\ln(1+x^2)dx$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)

Solución

Utilizamos o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln(1+x^2)\Rightarrow du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv=xdx\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow I=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do denominador, facemos a división dos polinomios. Así:

$$I=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int(x-\frac{x}{1+x^2})dx=\boxed{\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}$$