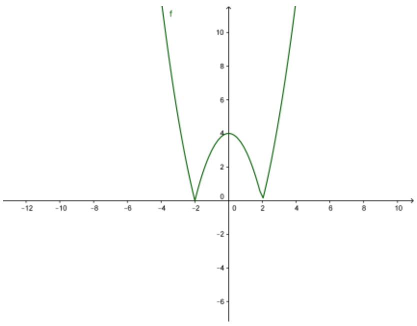
EXERCICIOS: FUNCIÓNS, LIMITES,CONTINUDADE E DERIVACIÓN

1) Representa graficamente a función $f(x) = |x^2-4|$

Solución



2) Onde son continuas as seguintes funcións:

a) $f(x) = arctg(x)/(x^2-1)$

b) $g(x) = x^2 arcsen(x)$

c) $h(x) = \ln(2x-7)$

d) $j(x) = \sqrt{x^2-8}$

Solución

a) En R - $\{-1, 1\}$

b) En [-1,1]

c) En $(7/2, +\infty)$

d) En $(-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, +\infty)$

3) Dada a función $f(x) = x^2-4$

a) Cumpre as condicións do teorema de Bolzano en [-3,3]

b) Ten algún punto de corte co eixe X no intervalo [-3,3]

c) Como é posible o anterior?

Solución

a) Non por que f(-3)f(3) = 25 >0

b) Hai dous puntos de corte, en x= 2 e en x= -2

c) E posible porque o teorema non di absolutamente nada cando non se cumpren as súas hipóteses.

4) Dada a función f(x) = 1/x

a) É continua en (0,1] ?

b) Está acotada en (0,1] ?

c) O comportamento desta función contradí o teorema de Weierstrass?

Solución

a) Sí

b) Non

c) Non o contradí por que este teorema é aplicable a intervalos pechados.

5) O número de individuos, en miles, dunha certa poboación axústase á función

$$f(x)= 2000e^{0,001x}+10$$

sendo x o tempo en días transcorrido a partir dun certo instante inicial.

a) En que instante alcanza a poboación os tres millóns de individuos?

b) Con que velocidade media variou a poboación entre os instantes x=5 e x=10.

Solución

a) Resolver a ecuación : $2000e^{0,001x}+10 = 3000$ ⇨ x = 402,16 días

b) TVM (f(x) [5,10] = $\dfrac{f(10)-f(5)}{10-5} = 400(e^{0,01} - e^{0,005}) = 2{,}015$ (miles indiv)/dia

6) Calcula a derivada de f(x) = x^3 - $3x^2$ + 5x - 1 no punto 1 utilizando a definición.

Solución

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+5x-1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)x^2-2x+3}{x-1} = 2$$

7) O número de peixes que hai nun lago ven dado pola función f(x) = x^2 + x + 10, sendo x o tempo transcorrido en meses a partir dun certo instante inicial. Determina:

a) A velocidade media coa que medra a poboación nos 10 primeiros meses.

b) Velocidade coa que está variando a poboación de peixes no instante x=20.

Solución

a) TVM (f(x) [0,10] = $\frac{f(10)-f(0)}{10-0} = 11 peixes/mes$ = 21,56

b) $f'(20) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(20)}{x-20} = 41\ peixes/mes$

8) Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2+x+3 & se \quad x \le 1 \\ x^3+4 & se \quad x > 1 \end{cases}$ **, calcula f´(1).**

Solución

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+4-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+3-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3$$

Polo que f´(1) = 3

9) Calcula as funcións derivadas de:

a) $f(x) = 3 + \frac{x}{5+x^2}$

b) f(x) = (3x^2+5x+8)e^x

c) f(x) = arsen[ln(x^2+3)]

d) f(x) = $\cos^5$(3x^2+8)

e) f(x) = $\sqrt[5]{1-\frac{x}{\pi}}$

Solución

a) $\frac{5-x^2}{(5+x^2)^2}$ b) e^x(3x^2+11x+13) c) $\frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{1-\ln(x^2+3)}}$

d) -30xcos^4(3x^2+8)sen(3x^2+8) e) $-\dfrac{1}{5\pi\sqrt[5]{(1-\frac{x}{\pi})^4}}$

10) Calcula as ecuacións das rectas tanxente e normal á gráfica da función f(x) = $\sqrt{x^2-8}$ no punto de abscisa x= 3

<u>Solución</u>

$$f´(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-8}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-8}}$$

Recta tanxente: y - f(3) = f¨(3)(x-3) ⇨ y - 1 = 3(x - 3) ⇨ y = 3x -8

Recta normal y - f(3) = (-1/f¨(3))(x-3) ⇨ y - 1 = -1/3(x - 3) ⇨ y = -1/3x + 2

11) Dada f(x) = $\frac{x-1}{x^2+1}$, calcula f´´(x)

<u>Solución</u>

$$f´(x)=\frac{1(x^2+1)-(x-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f´´(x)=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-(-x^2+2x+1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

12) Dada f(x) = x^2 + 1

a) É continua en [-2,4]?

b)É derivable en (-2,4)

c) Probar que non cumpre as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [-2,4].

d) Existe algún punto no intervalo (-2,4) no que se anule a función derivada?

e) Como é posible que sen cumprir as hipóteses do teorema de Rolle no intevalo [-2,4] haxa un punto nese intervalo no que a derivada da función sexa 0?

<u>Solución</u>

a) Sí

b) Sí

c) Non cumpre as hipóteses do teorema de Rolle pois f(-2)≠ f(4)

e) f´(x) se anula en 0∈(-2,4)

d) Non caso de que non se cumpran as hipóteses do teorema, este non di nada, polo que pode haber, ou non, un punto no intervalo onde se anule a derivada.

13) Dada a función f(x) = x^2-4

a) Comprobar que verifica as hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial no intervalo [0,5].

b) Comprobar que se verifica a tese do citado teorema.

Solución

a) f é continua en [0,5] , e derivable en (0,5)

b) O teorema di que existe un punto c∈(0,5) tal que $f´(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5-0} = 5$,

agora ben, f´(c) = 2c ⇨ 2c=5 ⇨ c= 5/2

14) Dada a función: f(x) = $\frac{1}{x-1}$

a) Comprobar que verifica as hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial no intervalo [-3,0].

b) Comprobar que se verifica a tese deste teorema.

Solución

a) f e continua en [-3,0] e derivable en (-3,0).

b) O teorema di que existe un punto c∈(-3,0) tal que $f´(c) = \frac{f(0) - f(-3)}{0-(-3)} = -\frac{1}{4}$,

agora ben, $f´(c) = \frac{-1}{(c-1)^2}$ ⇨ $(c-1)^2 = 4$ ⇨ c= -1 e c= 3 (que non vale)

15) Sabemos que $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$ **é indeterminado da forma** $\frac{\infty}{\infty}$**, e sabemos que** $\lim_{x\to 3}\frac{f´(x)}{g´(x)} = 14$.

Podemos afirmar que $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$ **= 14?**

Solución

Si, pola regra de L´Hopital

16) Sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é indeterminado da forma $\dfrac{0}{0}$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ non existe.

Que podemos afirmar sobre o $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

<u>Solución</u>

Con estes datos non podemos afirmar nada por que falla a 2ª hipótese da regra de L´Hopital, logo o límite de partida pode existir ou non.

17) Calcula os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x^2)}{5x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{5x^3+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3+x^2+2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+senx}{x+\cos x}$

<u>Solución</u>

a) 0 b) 0 (aplicando L´Hopital)

c) +∝ (aplicando L´Hopital reiteradamente)

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+senx}{x+\cos x}=\dfrac{\infty}{\infty}=L'Hop=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-senx}$ pero este límite non existe pois o numerador oscila entre 0 e 2 e o denominador tamén. Así pois non podemos aplicar esta regra para calcular o límite.

Farémolo doutro xeito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+senx}{x+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{\cos x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{senx}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1-\frac{senx}{x}}=1$$

18) Calcula os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{senx}\right)$

<u>Solución</u>

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0=1 \quad pois \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x}=0 \quad aplicando\,L'Hopital$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x^2}=0 \quad aplicando\,L'Hopital$

c)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{senx-x}{xsenx}=L\acute{}Hop=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{senx+x\cos x}=L\acute{}Hop=\lim_{x\to 0^+}\frac{-senx}{\cos x+\cos x-xsenx}=0$$

19) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento da función f(x) = $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Solución

f(x) crece en (-∝,-1) ∪ (-1,0)

f(x) decrece en (0,1) ∪ (1, +∝)

20) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento da función f(x) = $e^x(x-2)$

Solución

f(x) crece en (1, +∝)

f(x) decrece en (-∝, 1)

21) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento da función f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$

Solución

Dom f(x) = R, se facemos f´(x)= $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, vemos que non se anula nunca, pero que en 0 no hai derivada, polo que, estudando os intervalos antes e despois do 0, f decrece en (-∝,0) e crece en (0, +∝)

22) Calcular os extremos relativos da función f(x) = $e^{x^3+x^2+1}$

Solución

f´(x)= 0 ⇔ x= 0 , x= -2/3.

En 0 hai un mínimo relativo e en -2/3 hai un máximo relativo.

23) Calcular os extremos relativos da función f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$

Solución

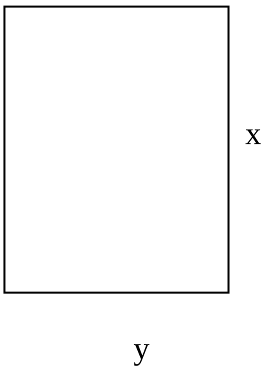
Vista no exercicio21, a derivada non se anula nunca, pero non existe en x=0. Neste punto hai un mínimo relativo.

24) Un rectángulo ten un perímetro de 60 cm. e xira en torno a un dos seus lados.

a) Volume do cilindro acadado en función do lado do rectángulo en torno ao que xira este.

b) Que dimensións debe ter o rectángulo para que o volume do cilindro sexa máximo?

Solución



a) Do enunciado dedúcese 2x + 2y = 60

polo que y = (60-2x)/2= (30-x) x € (0,30)

O volume do cilindro será V(x) = $\pi(30-x)^2 x$

(Área da base por altura)

b) Calculamos V´(x)

V´(x) = $2\pi(30-x)(-1)x+\pi(30-x)^2 = -2\pi(30-x)x+\pi(900-60x+x^2) = 3\pi x^2-120\pi x+900\pi$

Vexamos cando se anula a derivada

$3\pi x^2-120\pi x+900\pi$ =0

$x^2-40x+300=0$ ⇨ x_1= 30 , x_2=10

A derivada segunda

V´´(x) = 6πx- 120π

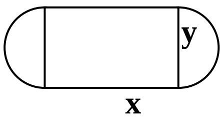
entón

V´´(30)>0

V´´(10) <0 , é o valor para o que se acada o máximo (dimensións 10 de alto e 20 de ancho)

25) Quérese construír unha pista de adestramento formada por un rectángulo e dous semicírculos adosados a dous lados opostos do rectángulo. O perímetro da pista debe ser de 200m. Calcular as dimensións da zona rectangular que fan máxima a área desa zona.

Solución



$2x + \pi y = 200 \quad \Rightarrow \quad y = (200-2x)/\pi$

Área do rectángulo

A(x)= x(200-2x)/π

Facendo A´(x) vemos que se anula en x=50, podendo comprobar que se trata de un máximo

x= 50   y= 100/π

26) Estudar a concavidade e convexidade da función f(x)= $\dfrac{x}{x+1}$

Solución

Domf = R - $\{-1\}$

$f´(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \qquad f´´(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$

Vemos que a derivada segunda non se anula nunca.

f´´>0   -1   f´´<0

polo que f é convexa en (-∞,-1)   e   concava en (-1, +∞)

27) Calcular os puntos de inflexión da función f(x) = $x^2 e^{-x}$

Solución

$f´´(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

f´´ anúlase en $2+\sqrt{2}$ *e* *en* $2-\sqrt{2}$, xa que e^{-x} non se anula nunca

f´´>0 $2-\sqrt{2}$ f´´<0 $2+\sqrt{2}$ f´´>0

Polo que $2+\sqrt{2}$ *e* $2-\sqrt{2}$ son puntos de inflexión os dous

28) Calcular as asíntotas verticais de $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

<u>Solución</u>

Os puntos que anulan ao denominador son 3 e -3

Calculando os límites da función neses dous puntos vemos que en 3 vale 1/6, e que en -3 é ∝, polo que x = -3 é a ecuación da asíntota vertical da función.

29) A función f(x) = e^x , ten algunha asíntota horizontal?

<u>Solución</u>

Si, a recta y=0 xa que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

30) Calcular as asíntotas horizontais da función $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^3+2x+1}$

<u>Solución</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3x^3+2x+1}=\dfrac{1}{3}$, polo que a recta y=1/3 é unha asíntota horizontal

31) Calcular as asíntotas horizontais da función f(x) = xe^{-x}

<u>Solución</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = L\acute{}Hop = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$ ⇨ a recta y= 0 é unha asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty(+\infty) = -\infty$, polo que non hai asíntota horizontal cando x→-∝

32) A función f(x) = |x|, ten algunha asíntota oblicua?

33) Calcular as asíntotas oblicuas da función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-2}$

<u>Solución</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2=m$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=4=n$

polo que a recta y = 2x +4 é asíntota oblicua.

Nota: pódese determinar tamén facendo a división dos polinomios (será o cociente).

34) Representar graficamente a función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$, previo estudio completo.

<u>Solución</u>

-Domf = R - $\{-1,1\}$

-Punto de corte co eixe y   (0,1)

-Puntos de corte co eixe x: non son fáciles de calcular

-Asíntotas verticais x= 1,   x= -1 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas horizontais: non ten (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas oblicuas: y = x+1 (facendo os límites correspondentes)

-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos (facendo a 1ª derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) crece en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

f(x) decrece en $(-\sqrt{3}-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$

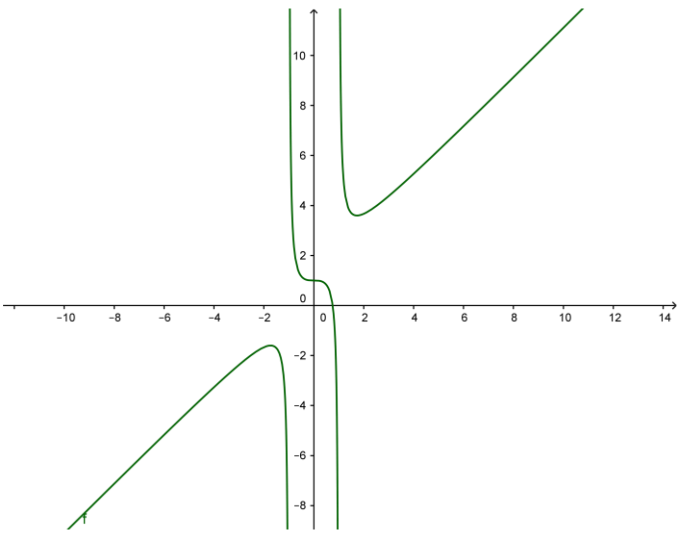
Hai un máximo relativo en x= $-\sqrt{3}$ e un mínimo relativo en x= $\sqrt{3}$

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión (facendo a segunda derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) é convexa en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

f(x) é cóncava en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

Hai un punto de inflexión en x=0



35) Representar graficamente a función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, previo estudio completo.

<u>Solución</u>

-Domf = R - $\{0\}$

-Punto de corte co eixe Y non hai

-Puntos de corte co eixe X non hai

-Asíntotas verticais x= 0 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas horizontais: non ten (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas oblicuas: non ten (facendo os límites correspondentes)

-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos (facendo a 1ª derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) crece en $(1,+\infty)$

f(x) decrece en $(-\infty,0) \cup (0,1)$

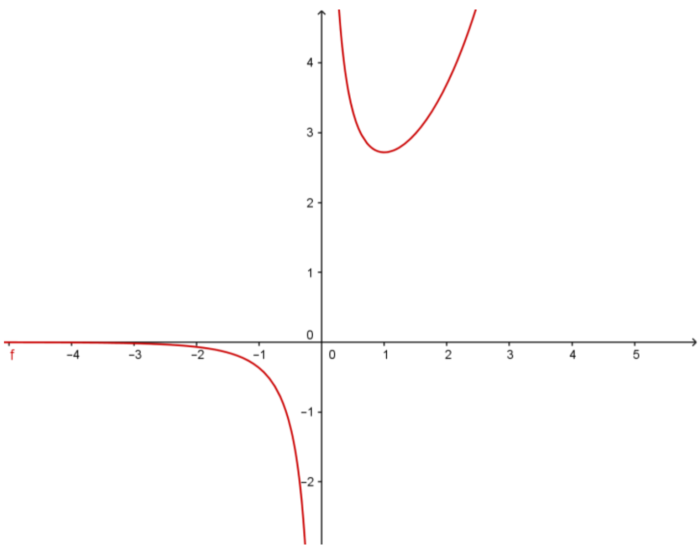
Hai un mínimo relativo en x= 1

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión (facendo a segunda derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) é convexa en $(0,+\infty)$

f(x) é cóncava en $(-\infty,0)$

Non hai puntos de inflexión



36) Representar graficamente a función $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, previo estudio completo.

Solución

-Domf = $R^+ - \{1\}$

-Punto de corte co eixe Y non hai (0 non está no dominio)

-Puntos de corte co eixe X non hai

-Asíntotas verticais x= 1 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas horizontais: y=0 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas oblicuas: non ten (se $x\to-\infty$ non hai función, e se $x\to+\infty$ hai asíntota horizontal)

-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos (facendo a 1ª derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) decrece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$

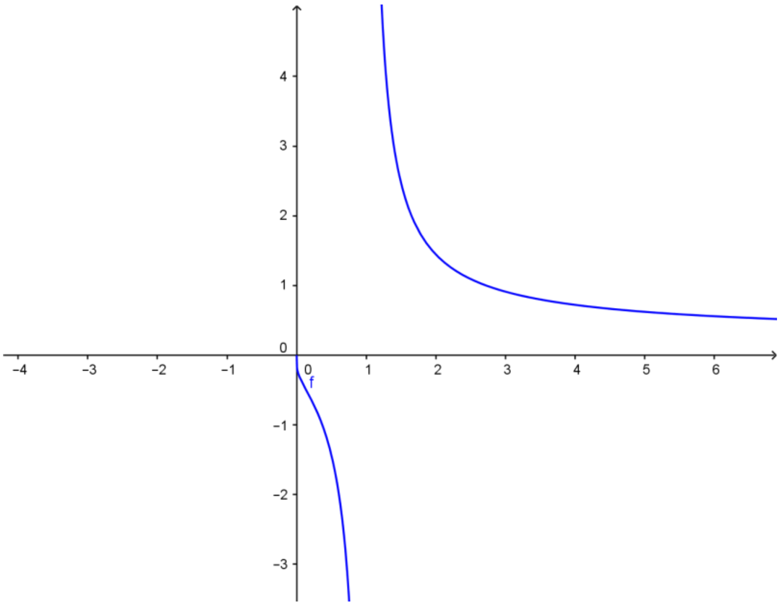
Extremos relativos non hai

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión (facendo a segunda derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) é convexa en $(0,e^{-2})\cup(1,+\infty)$

f(x) é cóncava en $(e^{-2},1)$

Punto de inflexión en x= e^{-2}



37) Dada a función f(x) = e^x + 3xln(1+x^2), podemos afirmar que a súa gráfica corta ao eixe OX nalgún punto do intervalo [-1,0]? Xustifíquese a resposta.

Solución

Vemos que f é continua en [-1,0], e que f(-1)f(0)<0, polo que o teorema de Bolzano garante que a gráfica da función corta ao eixe X nalgún punto do intervalo (-1,0)

38) Calcular os valores de a e b para que esta función sexa continua e derivable en x=0

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & se \quad x\le 0 \\ sen(2x)+1 & se \quad x>0 \end{cases}$$

Solución

Para que sexa continua terá que cumprir que f(0)= $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$, do que deducimos que b=1. Así que traballaremos con este valor para b.

Para que se derivable terá que cumprir f´(0^+) = f´(0^-)

$$f´(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(2x)+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos(2x)}{1}=2$$

$$f´(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}a=a$$

polo que a=2

39) Calcular a ecuación da recta tanxente á gráfica da función f(x) = (1 + x^2)e^{-x} no punto de abscisa x=0.

Solución

y-f(0) = f´(0)(x-0)

f´(x)= 2xe^{-x}-(1+x^2)e^{-x}

f(0) = 1,   f´(0) = -1 , e a ecuación da recta é   y= -x+1

40) Calcular o dominio, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos de $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

Solución

-Domf = R^+ - $\{-1,1\}$

-Asíntotas verticais x= 1, x= -1 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas horizontais: y=1 (facendo os límites correspondentes)

-Asíntotas oblicuas: non ten

-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos (facendo a 1ª derivada e tendo en conta o dominio da función):

f(x) decrece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$ e f(x) crece en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

Extremos relativos: en x=0 hai un máximo relativo

41) Que tipo de discontinuidade presenta a función $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ no punto x=0

Solución

Dado que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ (calculando o límite por L´Hopital), e f(0) non existe, trátase dunha discontinuidade evitable.

42) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento , os extremos relativos e os puntos de inflexión de $g(t) = 2t^3-3t^2$

Solución,

$g´(t)= 6t^2-6t$, g´ anúlase para t=0 e t= 1

g(t) decrece en $(0,1)$

f(x) crece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

Extremos relativos: en x=0 hai un máximo relativo, e en x= 1 hai un mínimo relativo

g´´(t) = 12t -6

Compróbase que en x = 1/2 hai un punto de inflexión.

43) Calcular un punto da gráfica da función $g(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ no que a recta tanxente sexa paralela ao eixe das x. Escribir a ecuación desa recta. Calcular as asíntotas de g(x).

Solución,

A pendente da recta tanxente é 0. $g´(x)=\dfrac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}$, anúlase para x=0, e g´(0)= 1/4

polo que a recta pedida é y= 1/4.

Non hai asíntotas verticais, pois o limite da función nun punto nunca da infinito.

Asíntotas horizontais : y=0 pois $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=0$ (L´Hopital), e polo tanto xa non pode haber asíntotas oblicuas.

44) Dada a función f(x) = 9x + 6x^2 - x^4 , calcular os puntos nos que a recta normal á gráfica ten pendente -1.

Solución,

Basta con buscar os puntos nos que a recta tanxente ten pendente 1

f´(x)= 9 + 12x - 4x^3

f´(x) = 1 $\Leftrightarrow$ x= 2 , x= -1

Polo tanto os puntos da gráfica son (2,26) e (-1, -4)

45) Representar a función f(x) = x + e^{-x}

Solución,

-Domf = R

-Punto de corte co eixe Y (0,1)

-Asíntotas verticais non hai.

-Asíntotas horizontais non hai pois tanto $\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad como \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$ son + ∝

$$\lim_{x\to-\infty} x+e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^x+1}{e^x}\right)=\frac{1}{0}=\infty, \quad pois \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = L´Hop = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0$$

-Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^{-x}}{x} = L´Hop = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty} x+e^{-x}-x=0 \quad \Rightarrow y=x \; asintota \;\; oblicua$$

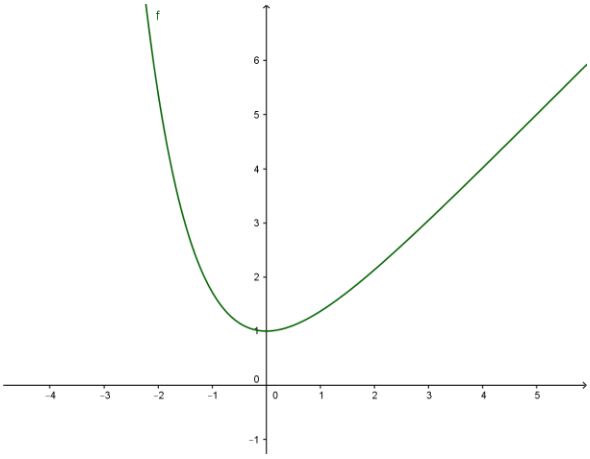
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^{-x}}{x} = L´Hop = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{-x}}{1}=-\infty, \quad non \;\; hai \, asintota \;\; oblicua \;\; cando \, x\to-\infty$$

-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos

f¨(x)= 1-e^{-x} , que se anula para x= 0, comprobamos que , f decrece en (-∝,0), crece en (0,+∝) e ten un mínimo relativo en x= 0

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión:

$f''(x)= e^{-x}$, que non se anula nunca e é sempre positiva, polo que a función é convexa en R.



46) calcular $\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Solución,

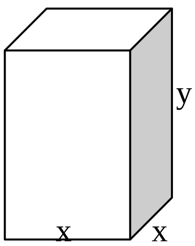
$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\pi/2} e^{\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)}{\cos x}} = e^{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)}{\cos x} = \frac{0}{0} = L'Hop = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\frac{2x}{\pi}+\cos x}\left(\frac{2}{\pi}-senx\right)}{-senx} = \frac{\frac{2}{\pi}-1}{-1} = \frac{\pi-2}{\pi}$$

47) Unha caldeira ten forma de prisma recto de base cadrada e volume de 768m^3. Sábese que a perda de calor a través das paredes laterais vale 100 unidades por m^2, mentres que a través do teito é de 300 unidades por metro cadrado. A perda polo chan e tan pequena que pode considerarse nula. Calcular as dimensións da caldeira para que a perda de calor sexa mínima.

Solución,



$768= x^2y \Rightarrow y= 768/x^2$

Perda total $f(x) = 300x^2 + 4•100•x•768/x^2$

$f(x) = 300x^2 + 307200/x$

$f'(x)= 600x - 307200/x^2$, que se anula para x = 8, podendo comprobar que se trata dun mínimo,

polo que x= 8, y= 12

48) Indica se a función f(x) = arctgx verifica as hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial no intervalo [-π/4,π].

<u>Solución,</u>

f é continua en [-π/4,π], e é derivable en (-π/4,π), pois $f'(x) = 1/(1+x^2)$, polo que verificas as hipóteses do t.v.m. do calculo diferencial en [-π/4,π]

49) Sábese que a función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & se \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & se \quad x\geq 0 \end{cases}$ **é continua en (-1,+∞)**

Calcular a e estudar se a función é derivable en x=0

<u>Solución,</u>

A función é continua en 0, polo que f(0) = a = $\lim_{x\to 0^-} x^2-4x+3 = 3$

Así a= 3

Estudemos as derivadas laterais

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2+3}{x+1}-3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-3}{x+1}=-3$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-4x+3-3}{x}=-4$$

polo que a función non é derivable en x=0

50) Representar graficamente a función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

<u>Solución,</u>

-Dom f = R

-Punto de corte co eixe Y (0,1)

-Punto de corte co eixe X (-1,0)

-Asíntotas verticais non hai.

-Asíntotas horizontais: recta y= 0 pois tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0, \quad pero \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

-Asíntotas oblicuas: So poderá haber asíntota oblicua se x→-∝

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(x+1)^2}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x}e^{-x}=-\infty\cdot+\infty=-\infty, \quad non\ hai\ asintota\ oblicua\ cando\ x\to-\infty$$

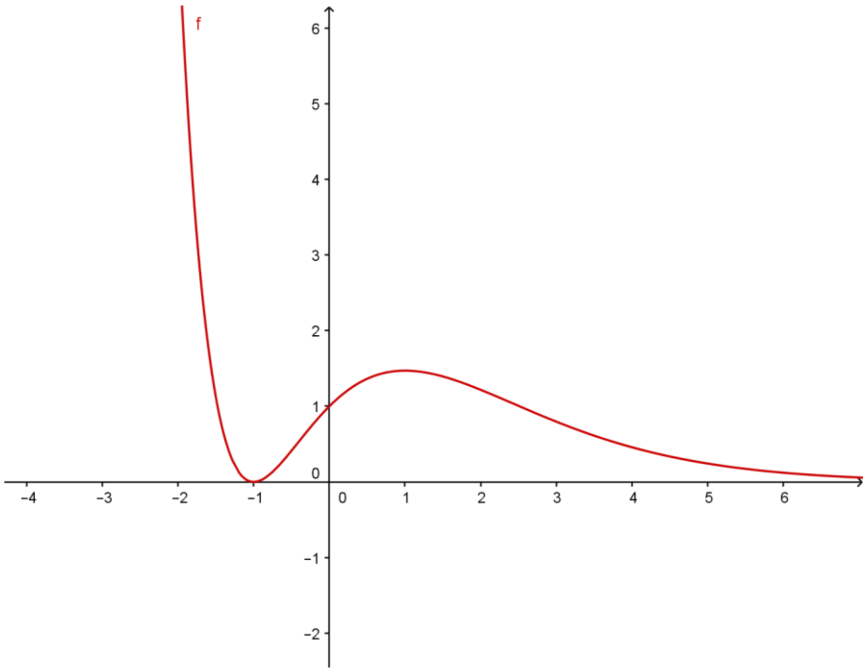
-Intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos

$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{e^x}$, que se anula para x= 1 e x = -1, comprobamos que , f decrece en (-∝,-1)∪(1,+∝), e crece en (-1,1), ten un mínimo relativo en x= -1, e un máximo relativo en x= 1

-Intervalos de curvatura e puntos de inflexión:

$f''(x)=\dfrac{-2xe^x-(1-x^2)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{e^x}$, que se anula en $x=1+\sqrt{2} \quad e \quad x=1-\sqrt{2}$.

Podemos comprobar que son puntos de inflexión, que cóncava entre os dous, e convexa no resto.



51) Calcula os puntos de inflexión de f(x) = x +2senx no intervalo [-2π,2π].

Solución,

-π, 0, e π

52) Indicar razoadamente se a función $f(x) = x^2 e^{|x|}$ verifica as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [-2,2].

Solución,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 e^{x} & x > 0 \end{cases}$$ f é continua en [-2,2], e f(2)= f(-2)

nos queda comprobar se é derivable en (-2,2), onde o único punto problemático é o 0.

Podemos comprobar que $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$, polo que a función verifica as hipóteses do teorema de Rolle nese intervalo.

53) Divídese unha corda de 100 m. de largo en dous cachos. Cun deles fórmase un cadrado e co outro unha circunferencia. Acha as lonxitudes dos cachos para que a suma das areas do cadrado e do círculo sexa mínima.

Solución,

Lonxitude do cadrado x

Lonxitude da circunferencia 100-x

Lado do cadrado $\frac{x}{4}$, entón área do cadrado $\frac{x^2}{16}$

Radio do círculo $\frac{100-x}{2\pi}$, entón área do círculo $\pi\left(\frac{100-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}(100-x)^2$

A Área a minimizar á A(x) = $\frac{x^2}{16} + \frac{1}{4\pi}(100-x)^2$

A´(x) = $\frac{2x}{16}$ - $\frac{2}{4\pi}(100-x)$ = $\left(\frac{2}{16} + \frac{2}{4\pi}\right)x - \frac{50}{\pi}$

A´(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{2}{16} + \frac{2}{4\pi}\right)x - \frac{50}{\pi}$ = 0 $\Leftrightarrow$ $(2\pi + 8)x - 800 = 0 \Leftrightarrow$ x = $\frac{800}{2\pi + 8}$ = $\frac{400}{\pi + 4}$

A´´(x) = $\left(\frac{2}{16} + \frac{2}{4\pi}\right)$ >0 $\forall$x , polo que hai un mínimo en x = $\frac{400}{\pi + 4}$

e nese caso y = 100- $\frac{400}{\pi + 4}$ = $\frac{100\pi}{\pi + 4}$

54) Dada a función $f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}$, calcúlese o valor de a sabendo que hai un extremo relativo no punto de abscisa x=3. Trátase dun máximo?

Solución,

f´(3) ten que valer 0, do que deducimos que a = -4

Como f´´(3)>0, trátase dun mínimo.

55) Dada a función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$, determina o seu dominio e as súas asíntotas.

Solución,

É evidente que x= -2 non está no dominio, nin x= -1

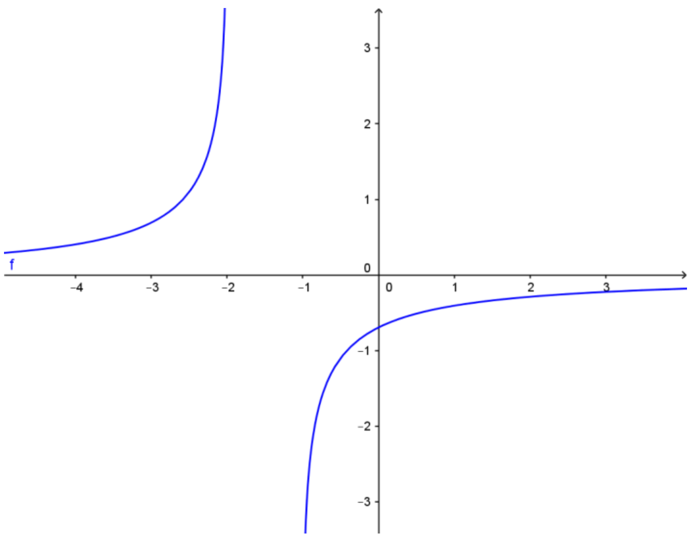
Como so hai logaritmos d números positivos, temos que

$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)>0$, resolvendo a inecuación Dom f = (-∝,-2)∪(-1,+∝)

Asíntotas verticais só pode haber en -1 e -2

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ polo que x= -1 e x= -2 son asíntotas verticais.

Ademais $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, polo que y=0 é unha asíntota horizontal



56) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{(x+\ln(1+x))^2}$

<u>Solución,</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{(x+\ln(1+x))^2}=\frac{0}{0}=L\acute{}Hop=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2(x+\ln(1+x))(1+\dfrac{1}{1+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(x+\ln(1+x))(x+2)}=L\acute{}Hop=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+\dfrac{1}{1+x})(x+2)+2(x+\ln(1+x))}=\frac{1}{8}$$