EXERCICIOS: FUNCIÓNS, LIMITES,CONTINUDADE E DERIVACIÓN

1) Representa graficamente a función $f(x) = |x^2-4|$

2) Onde son continuas as seguintes funcións:

a) $f(x) = \text{arctg}(x)/(x^2-1)$

b) $g(x) = x^2\text{arcsen}(x)$

c) $h(x) = \ln(2x-7)$

d) $j(x) = \sqrt{x^2-8}$

3) Dada a función $f(x) = x^2-4$

a) Cumpre as condicións do teorema de Bolzano en [-3,3]

b) Ten algún punto de corte co eixe X no intervalo [-3,3]

c) Como é posible o anterior?

4) Dada a función $f(x) = 1/x$

a) É continua en (0,1] ?

b) Está acotada en (0,1] ?

c) O comportamento desta función contradí o teorema de Weierstrass?

5) O número de individuos, en miles, dunha certa poboación axústase á función

$$f(x)= 2000e^{0,001x}+10$$

sendo x o tempo en días transcorrido a partir dun certo instante inicial.

a) En que instante alcanza a poboación os tres millóns de individuos?

b) Con que velocidade media variou a poboación entre os instantes x=5 e x=10.

6) Calcula a derivada de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ no punto 1 utilizando a definición.

7) O número de peixes que hai nun lago ven dado pola función $f(x) = x^2 + x + 10$, sendo x o tempo transcorrido en meses a partir dun certo instante inicial. Determina:

a) A velocidade media coa que medra a poboación nos 10 primeiros meses.

b) Velocidade coa que está variando a poboación de peixes no instante x=20.

8) Dada a función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+3 & se \quad x\le 1 \\ x^3+4 & se \quad x>1 \end{cases}$, calcula f´(1).

9) Calcula as funcións derivadas de:

a) $f(x)=3+\dfrac{x}{5+x^2}$

b) f(x) = $(3x^2+5x+8)e^x$

c) f(x) = arsen[ln(x^2+3)]

d) f(x) = $\cos^5(3x^2+8)$

e) f(x) = $\sqrt[5]{1-\dfrac{x}{\pi}}$

10) Calcula as ecuacións das rectas tanxente e normal á gráfica da función f(x) = $\sqrt{x^2-8}$ no punto de abscisa x= 3

11) Dada f(x) = $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ **, calcula f´´(x)**

12) Dada f(x) = x^2 + 1

a) É continua en [-2,4]? b)É derivable en (-2,4)

c) Probar que non cumpre as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [-2,4].

d) Existe algún punto no intervalo (-2,4) no que se anule a función derivada?

e) Como é posible que sen cumprir as hipóteses do teorema de Rolle no intevalo [-2,4] haxa un punto nese intervalo no que a derivada da función sexa 0?

13) Dada a función f(x) = x^2-4

a) Comprobar que verifica as hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial no intervalo [0,5].

b) Comprobar que se verifica a tese do citado teorema.

14) Dada a función: f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$

a) Comprobar que verifica as hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial no intervalo [-3,0].

b) Comprobar que se verifica a tese deste teorema.

15) Sabemos que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$ é indeterminado da forma $\frac{\infty}{\infty}$, e sabemos que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f'(x)}{g'(x)}=14$.

Podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$ = 14?

16) Sabemos que $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ é indeterminado da forma $\frac{0}{0}$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non existe. Que podemos afirmar sobre o $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$?

17) Calcula os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(3x^2)}{5x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{5x^3+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3+x^2+2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+senx}{x+\cos x}$

18) Calcula os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)$

19) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento da función f(x) = $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

20) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento da función f(x) = $e^x(x-2)$

21) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento da función f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$

22) Calcular os extremos relativos da función f(x) = $e^{x^3+x^2+1}$

23) Calcular os extremos relativos da función f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$

24) Un rectángulo ten un perímetro de 60 cm. e xira en torno a un dos seus lados.

a) Volume do cilindro acadado en función do lado do rectángulo en torno ao que xira este.

b) Que dimensións debe ter o rectángulo para que o volume do cilindro sexa máximo?

25) Quérese construír unha pista de adestramento formada por un rectángulo e dous semicírculos adosados a dous lados opostos do rectángulo. O perímetro da pista debe ser de 200m. Calcular as dimensións da zona rectangular que fan máxima a área desa zona.

26) Estudar a concavidade e convexidade da función f(x)= $\frac{x}{x+1}$

27) Calcular os puntos de inflexión da función f(x) = x^2e^{-x}

28) Calcular as asíntotas verticais de $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

29) A función f(x) = e^x , ten algunha asíntota horizontal?

30) Calcular as asíntotas horizontais da función $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^3+2x+1}$

31) Calcular as asíntotas horizontais da función f(x) = xe^{-x}

32) A función f(x) = |x|, ten algunha asíntota oblicua?

33) Calcular as asíntotas oblicuas da función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-2}$

34) Representar graficamente a función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$, previo estudio completo.

35) Representar graficamente a función $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$**, previo estudio completo.**

36) Representar graficamente a función $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, previo estudio completo.

37) Dada a función f(x) = $e^x + 3x\ln(1+x^2)$, podemos afirmar que a súa gráfica corta ao eixe OX nalgún punto do intervalo [-1,0]? Xustifíquese a resposta.

38) Calcular os valores de a e b para que esta función sexa continua e derivable en x=0

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & se \quad x\le 0 \\ sen(2x)+1 & se \quad x>0 \end{cases}$$

39) Calcular a ecuación da recta tanxente á gráfica da función f(x) = $(1 + x^2)e^{-x}$ no punto de abscisa x=0

40) Calcular o dominio, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos de

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$$

41) Que tipo de discontinuidade presenta a función $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ **no punto x=0**

42) Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento , os extremos relativos e os puntos de inflexión de g(t) = $2t^3-3t^2$

43) Calcular un punto da gráfica da función $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ no que a recta tanxente sexa paralela ao eixe das x. Escribir a ecuación desa recta. Calcular as asíntotas de g(x).

44) Dada a función f(x) = $9x + 6x^2 - x^4$, calcular os puntos nos que a recta normal á gráfica ten pendente -1.

45) Representar a función f(x) = x + e^{-x}

46) calcular $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

47) Unha caldeira ten forma de prisma recto de base cadrada e volume de 768m^3. Sábese que a perda de calor a través das paredes laterais vale 100 unidades por m^2, mentres que a través do teito é de 300 unidades por metro cadrado. A perda polo chan e tan pequena que pode considerarse nula. Calcular as dimensións da caldeira para que a perda de calor sexa mínima.

48) Indica se a función f(x) = arctgx verifica as hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial no intervalo [-π/4,π].

49) Sábese que a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & se \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & se \quad x \ge 0 \end{cases}$ **é continua en (-1,+∞)**

Calcular a e estudar se a función é derivable en x=0

50) Representar graficamente a función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

51) Calcula os puntos de inflexión de f(x) = x +2senx no intervalo [-2π,2π].

52) Indicar razoadamente se a función $f(x) = x^2 e^{|x|}$ **verifica as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [-2,2].**

53) Divídese unha corda de 100 m. de largo en dous cachos. Cun deles fórmase un cadrado e co outro unha circunferencia. Acha as lonxitudes dos cachos para que a suma das areas do cadrado e do círculo sexa mínima.

54) Dada a función $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{6}{x^2}$, calcúlese o valor de a sabendo que hai un extremo relativo no punto de abscisa x=3. Trátase dun máximo?

55) Dada a función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$, determina o seu dominio e as súas asíntotas.

56) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{(x+\ln(1+x))^2}$