Aplicacións da derivada

Obtención da recta tanxente a unha curva nun dos seus puntos

Como xa sabemos a ecuación dunha recta que ten de pendente m e pasa polo punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ é $y = y_0 + m(x - x_0)$
A recta tanxente a unha curva $f(x)$ nun punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ ten por pendente nese punto, segundo sabemos, $m = f'(x_0)$, e polo tanto a súa ecuación é:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Estudio da monotonía dunha curva. Extremos relativos

Definición de función crecente(decrecente) nun punto.

$$f(x)\ crecente\ en\ x_0 \Leftrightarrow \exists (a - x_0, a + x_0) \big/ signo(x - x_0) = signo(f(x) - f(x_0))$$
$$f(x)\ decrecente\ en\ x_0 \Leftrightarrow \exists (a - x_0, a + x_0) \big/ signo(x - x_0) = signo(f(x_0) - f(x))$$

Sexa $f(x)$ **<u>unha función derivable en</u>** x_0

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f\ crecente\ en\ x_0$$
$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f\ decrecente\ en\ x_0$$

Definición de función crecente(decrecente) nun intervalo.

Dise que unha función f(x) é crecente nun intervalo I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \in I$$

Dise que unha función f(x) é decrecente nun intervalo I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \in I$$

Relación entre o crecemento (decrecemento) dunha función e o signo da súa derivada:

Supoñamos que unha función f(x) é derivable en todos os puntos do intervalo I, entón:

Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, f(x) é crecente en I
Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, f(x) é decrecente en I
Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, f(x) é constante en I

(No caso de que unha función non fose derivable no punto dado habería que estudar a súa monotonía a través da definición de crecente ou decrecente).

Máximos e mínimos relativos dunha función.-

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ ten\ en\ x_0 \\ un\ máximo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ \ a\ \ tal\ que \\ se\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ ten\ en\ x_0 \\ un\ mínimo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ \ a\ \ tal\ que \\ se\ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{array}\right\}$$

Imos ver una regra para identificar extremos relativos dunha función baseada no signo da súa primeira derivada nas proximidades dese punto, pero antes:

Definimos ***puntos singulares ou puntos críticos*** *dunha función, como aqueles nos que a primeira derivada se anula:* $f'(x) = 0$ *(ou sexa,los puntos de tanxente horizontal).*

Condición necesaria para a existencia dun extremo relativo:

Para que x_0 poida ser un extremo relativo da función f(x) debe de cumprir necesariamente unha destas tres condicións:

a) En x_0 anúlase a derivada.
b) En x_0 falla a derivada.
c) x_0 é "unha esquina do dominio"

Condición suficiente para a existencia dun máximo ou mínimo relativo:

Consideremos unha función f(x). Sexa x_0 un punto do dominio da función f(x):

Se $f'(x_0) = 0$, e $f''(x_0) < 0$ entón x_0 é un máximo relativo de f(x)

Se $f'(x_0) = 0$, e $f''(x_0) > 0$ entón x_0 é un mínimo relativo de f(x)

Normas para calcular os intervalos de crecemento e decrecemento dunha función:

1- Indícase o dominio da función.
2- Calcúlase a función derivada e búscanse os puntos nos que a derivada vale 0.
3- Na recta real indícanse os puntos que están fora do dominio, os puntos nos que a derivada vale 0, e os puntos nos que falla a derivada. Desta maneira o dominio queda dividido en varios intervalos.
4- Estúdase o signo da derivada en cada un dos intervalos

Exemplo
Dada a función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ estuda a súa monotonía (intervalos de crecemento e decrecemento), e determina os extremos relativos da mesma.

Solución.

1- O dominio da función e R.

2- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

3- ----------------------|----------------|------------------- Dividimos o dominio en intervalos
-1 1

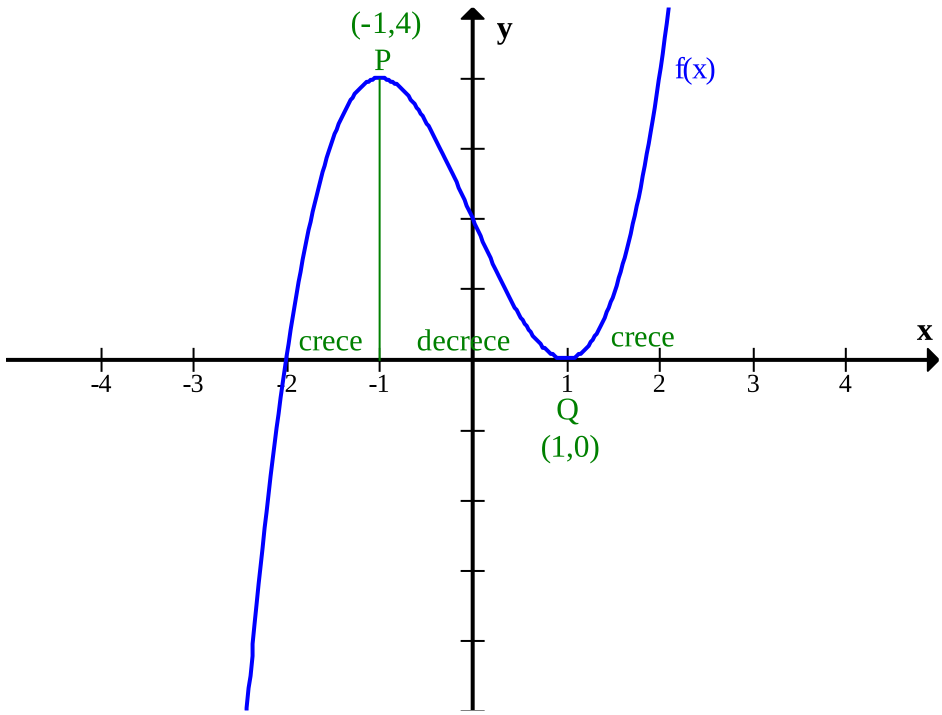
4-Estudamos o signo da derivada nos mesmos

$en \quad (-\infty,-1) \; f'>0 \Rightarrow f \text{ é crecente}$

$en \quad (-1,1) \quad f'<0 \Rightarrow f \text{ é decrecente}$

$en \quad (1,\infty) \quad f'>0 \Rightarrow f \text{ é creciente}$

Como a función en $x=-1$ pasa de crecente a decrecente, $f(x)$ ten en $x=-1$ un máximo relativo que vale:($f(-1)=4$).
Como a función en $x=1$ pasa de decrecente a crecente, $f(x)$ ten en $x=1$ un mínimo relativo que vale:($f(1)=0$).



<u>Exercicio:</u> Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento, e os extremos relativos da función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Concavidade, convexidade e puntos de inflexión

Dise que unha función f(x) é convexa nun intervalo I se todo segmento que une puntos da gráfica queda por enriba desta

Dise que unha función f(x) é cóncava nun intervalo I se todo segmento que une puntos da gráfica queda por debaixo desta

Outra definición:

Dise que unha función f(x) é convexa nun intervalo I se a súa gráfica queda por enriba das tanxentes nese intervalo.

Dise que unha función f(x) é cóncava nun intervalo I se a súa gráfica queda por debaixo das tanxentes nese intervalo.

<u>Relación entre a convexidade dunha función e o signo da derivada segunda</u>

Consideremos unha función f(x). Supoñamos que a función f(x) admite derivada segunda en todo punto do intervalo I. Entón:

Se $f''(x) > 0$, $\forall\ x \in I \Rightarrow$ a gráfica de f é convexa ($\cup$) en I
Se $f''(x) < 0$, $\forall\ x \in I \Rightarrow$ a gráfica de f é cóncava ($\cap$) en I

$$\begin{aligned} & f\ e\ f'\ \ derivables en\ x_0 \\ Se\ \ & f''(x_0) > 0 \Rightarrow f\ é\ \ convexa\, en\ x_0 \\ Se\ \ & f''(x_0) < 0 \Rightarrow f\ é\ \ cóncava\, en\ x_0 \end{aligned}$$

Puntos de inflexión

Dise que un punto x_0 é un punto de inflexión dunha función f(x) derivable nese punto, se se verifica unha destas dúas condicións:

1) f(x) é convexa en $(x_0\text{-}r, x_0)$ e cóncava en (x_0, x_0+r) para algún r>0
2) f(x) é cóncava en $(x_0\text{-}r, x_0)$ e convexa en (x_0, x_0+r) para algún r>0

é dicir, un punto de inflexión é un punto no que a función cambia de convexa a cóncava, ou viceversa.

<u>Condición necesaria para a existencia dun punto de inflexión</u>

Se x_0 é un punto de inflexión dunha función f(x), necesariamente o punto x_0 verifica unha destas dúas condicións

1) $f''(x_0) = 0$
2) $f''(x_0)$ non existe. (Ex. f(x) = $\sqrt[3]{2x-1}$)

Condición suficiente para a existencia dun punto de inflexión

Sexa f(x) unha función e x_0 un punto do seu dominio:

Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, entón x_0 é un punto de inflexión de f(x)

Normas para calcular os intervalos de concavidade e convexidade dunha función:

1- Indícase o dominio da función.
2- Calcúlase a función derivada segunda e búscanse os puntos nos que esta vale 0.
3- Na recta real indícanse os puntos que están fora do dominio, os puntos nos que a derivada segunda vale 0, e os puntos nos que falla a derivada segunda. Desta maneira o dominio queda dividido en varios intervalos.
4- Estúdase o signo da derivada segunda en cada un dos intervalos

Na práctica, para calcular os puntos de inflexión debemos obter previamente os intervalos de concavidade e convexidade.

Exemplo.-
Estuda a curvatura da función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ e calcula os puntos de inflexión.
Solución

1- O dominio da función e R.

2- $f''(x) = 6x$. Calculamos os valores que anulan a derivada segunda, é dicir, $6x = 0 \Rightarrow x = 0$

3- Dividimos o dominio en intervalos

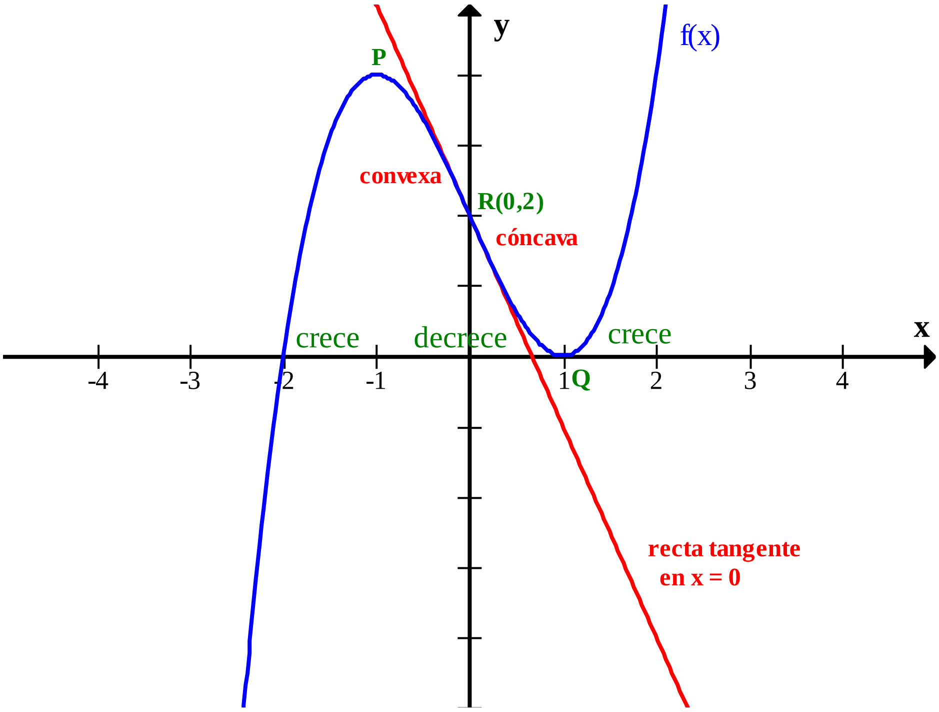
```
--------------|---------------
              0
```

4- Estudamos o signo da derivada segunda en cada un dos intervalos

$en \quad (-\infty, 0) \; f'' < 0 \Rightarrow f \; cóncava$
$en \quad (0, +\infty) \quad f'' > 0 \Rightarrow f \; convexa$

Polo tanto, no punto de abscisa $x = 0$ ten unha **inflexión** posto que cambiou a curvatura de cóncava a convexa nese punto $(0,2)$

(Tamén poderíamos ter determinado que o punto (0,2) é de inflexión calculando a terceira derivada da función e comprobando que non se anula en 0, así: $f'''(x) = 6 \neq 0$ sexa cal sexa o valor de x, polo tanto $f'''(0) = 6 \neq 0$ e entón o punto $(0,2)$ é un punto de inflexión da curva dada.



Exercicio

Dada a función f(x) = $\frac{x}{x+1}$, estuda a concavidade e convexidade da mesma, e determina os puntos de inflexión se os hai.

Resolución de problemas de optimización

Os problemas nos que é necesario optimizar unha función son moi frecuentes en Economía, Física, Bioloxía, Xeometría ....Así, en moitas ocasións trátase de facer máximos uns beneficios, unha poboación ou un volume, e, noutras, trátase de facer mínimos uns custos, unha área, unha forza.
A dificultade destes problemas, normalmente, non estriba en optimizar unha función coñecida, senón en achar a expresión analítica da función que temos que optimizar.

Para resolver convenientemente este tipo de problemas temos que:

1. Aprender a técnica máis axeitada para calcular os extremos dunha función que ven dada pola súa expresión analítica nun intervalo.
2. Aprender, mediante a práctica continua, a escribir de modo analítico as funcións que se describen mediante un enunciado.

Para o primeiro punto sinalaremos as seguintes orientacións:

Se temos que optimizar $f(x)$ *nun intervalo* $[a,b]$, *non nos interesa determinar os extremos relativos nese intervalo senón os* ***extremos absolutos.***

a) Se f é derivable nese intervalo, os extremos absolutos atópanse entre os puntos críticos e os extremos do intervalo, de aí que teñamos que calcular:

$f(a),\ f(b)$ *e todos os valores* $x \in (a,b)$ *que anulan a derivada (* $f'(x)=0$ *)*

Con estes valores poderemos determinar cal é o máximo e cal é o mínimo.

b)Se hai algún punto do intervalo $x_0 \in (a,b)$ *no que a función non sexa derivable ,pero si continua, calcularíamos ademais o valor* $f(x_0)$ *pois podería ser un extremo.*

c) Se hai algún punto do intervalo $x_0 \in (a,b)$ *no que a función non sexa continua estudaríamos ademais o comportamento da función nas proximidades de* x_0

Exercicio

Un rectángulo ten un perímetro de 60 cm. e xira arredor de un dos seus lados.
a) Calcula o volume do cilindro obtido en función do lado do rectángulo en torno ao que xira este.
b) Que dimensións debe ter o rectángulo para que o volume do cilindro sexa máximo?

Regra de L´Hôpital

Consideremos un límite da forma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Supoñamos que

1) O límite é indeterminado da forma $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$
2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ da un número real ou infinito

Entón $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

A regra de L´Hôpital tamén é valida se $x \to \infty$

Teorema de Rolle

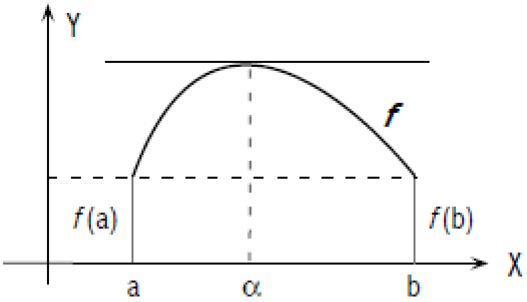
Sexa f(x) unha función definida nun intervalo [a,b]. Supoñamos que:

1) f(x) é continua en [a,b].
2) f(x) é derivable en (a,b)
3) f(a) = f(b)

entón existe un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha)= 0$

Interpretación xeométrica do teorema de Rolle

Xeometricamente este teorema ven a dicir que se unha función cumpre as súas tres hipóteses nun intervalo [a,b], ten que haber un punto da gráfica no que a recta tanxente sexa horizontal.



Teorema de valor medio do calculo diferencial

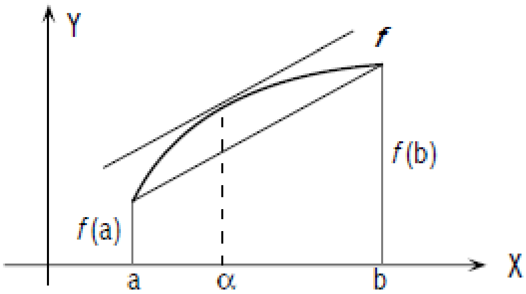
Sexa f(x) unha función definida nun intervalo [a,b]. Supoñamos que:

1) f(x) é continua en [a,b].
2) f(x) é derivable en (a,b)

entón existe un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretación xeométrica do teorema do valor medio

Xeometricamente este teorema ven a dicir que se unha función cumpre as súas tres hipóteses nun intervalo [a,b], ten que haber un punto da gráfica no que a recta tanxente é paralela á que pasa polos puntos (a, f(a)) e (b , f(b)).



Representación gráfica de funcións

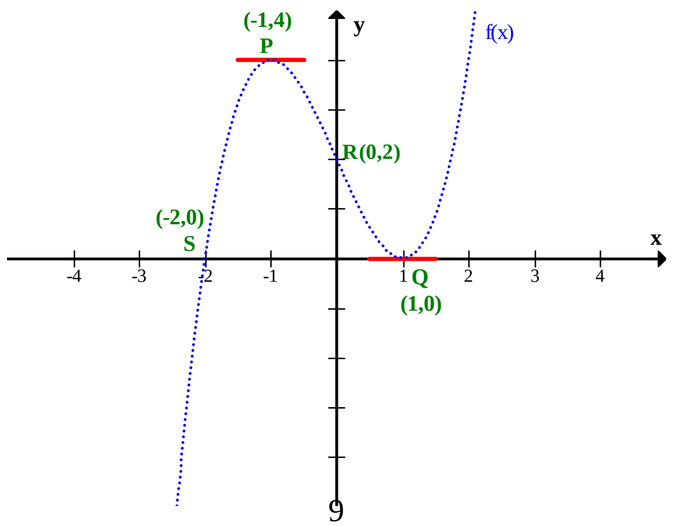
<u>*Representación gráfica de funcións polinómicas.-*</u>
Para representar unha función polinómica de grado maior ou igual a dous $y = f(x)$ hai que ter en conta que:
Son <u>derivables</u> e polo tanto <u>continuas en todo</u> $\Re$. <u>Non teñen asíntotas de ningún tipo</u>.
Se só teñen termos de grao par son simétricas respecto ao eixe Y.
Se só teñen termos de grado impar son simétricas respecto á oríxe.
<u>Para obter a súa gráfica podemos proceder nesta orde:</u>

1. *Observamos se ten algún tipo de simetría (respecto ao eixe Y ou respecto a orixe)*
2. *Áchanse as súas dúas ramas infinitas.*
3. *Resolvemos a ecuación* $f'(x)=0$ *para calcular as abscisas dos puntos singulares (ou críticos). A continuación obtemos as súas ordenadas.*
4. *Únense os puntos obtidos entre si, coidando de non debuxar outros puntos singulares que os xa obtidos. Así determinamos cales son os máximos e os mínimos relativos, así como os puntos de inflexión.*
5. *Se podemos , calculamos tamén os puntos de corte cos eixes para acadar maior precisión na representación.*
6.

<u>*Exemplo.-*</u>Dada a función polinómica: $f(x)=x^3-3x+2$ obtén a súa gráfica.

1. Non ten ningún tipo de simetría (ten termos pares e impares)
2.Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad y \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, polo tanto: $P(-1,4) \quad Q(1,0)$
4. $P(-1,4) \quad Q(1,0)$ son os puntos singulares (de tanxente horizontal)
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$ e como $f'''(x)=6$: $R(0,2)$ inflexión
5. Para calcular os puntos de corte co eixe X resolvemos $x^3-3x+2=0$

Por Ruffini determinamos unha raíz dobre:1 e outra simple -2, de aí que os puntos de corte co eixe X son: , e o punto de corte co eixe Y é $R(0,2)$
Unindo todos os puntos obtidos anteriormente e tendo en conta todo o dito podemos debuxar a gráfica de $f(x)$



B) *Representación gráfica de funcións racionais.-*

Nas funcións racionais $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (cociente de dous polinomios) hai que prestar atención especial aos valores de x que anulan o denominador, non son do seu dominio e en cada un deles hai unha asíntota vertical.
A función é derivable e, polo tanto, segundo sabemos, é continua en todos os puntos de $\Re$ que non anulan ao denominador.
Dependendo dos graos de $P(x)$ e de $Q(x)$ pode ter asíntota horizontal, oblicua ou ningunha delas.
Se ten asíntota horizontal ou oblicua é a mesma para $x \to -\infty$ e para $x \to +\infty$

Para obter a súa gráfica pódese proceder nesta orde:

1. Obsérvase se ten algún tipo de simetría.
2. Calcúlanse as asíntotas verticais ($Q(x) = 0$) e a súa posición respecto á curva
3. Se $\underline{gradoP(x) \leq gradoQ(x) \Rightarrow}$ **hai asíntota horizontal** (A.H.); calculamos o límite: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ e polo tanto a recta $y = a$ es A.H. Tamén podería ocorrer que $\underline{gradoP(x) = gradoQ(x) + 1 \Rightarrow}$ **hai asíntota oblicua**(A.O.); sabemos que a ecuación da A.O. é da forma $y = mx + n$ **e** obtense **como o cociente** da la división $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Tanto se hai (A.H.) como (A.O.) estudase a posición respecto á curva de cada unha delas tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to +\infty$.
   Por último teremos que se se cumpre que $\underline{gradoP(x) > gradoQ(x) + 1 \Rightarrow}$ **hai ramas parabólicas.**

4. Estúdanse os puntos singulares, que os obtemos como solución da ecuación:($f'(x) = 0$) e que, segundo sabemos, poden ser máximos, mínimos ou puntos de inflexión.
5. Por último podemos obter tamén, para completar o estudio, os puntos de corte da función cos eixes, así como os puntos de inflexión que son aqueles que se obteñen como solución da ecuación:($f''(x) = 0$).

Exemplo.- Representa graficamente a función racional: $f(x)=\dfrac{x^2+3x+11}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+11)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x-11}{(x+1)^2} =$$

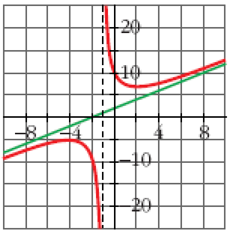
$$= \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$$

Máximo en $(-4, -5)$.

Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



Exemplo.- Representa graficamente a función racional: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

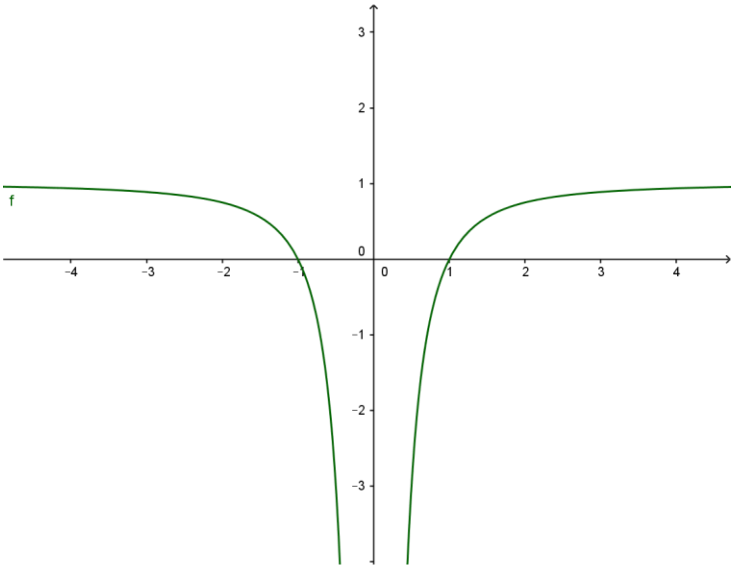
Dominio R-{0}

Asíntota vertical x=0

Asíntota horizontal x= -1

Non ten extremos relativos

E cóncava no seu dominio



Exemplo.- Representa graficamente a función exponencial: $f(x) = e^{-x^2}$

O seu dominio é todo $\Re$,esta función toma sempre valores positivos, e o seu recorrido é $(0,+\infty)$.

É unha función simétrica respecto ao eixe Y pois: $f(x) = f(-x)$

Ten unha asíntota horizontal, de ecuación: $y = 0$,xa que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Para achar os puntos singulares : $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x.e^{-x^2} = 0$, que ten por solución $x = 0$, o único punto singular é $P(0, e^0) = (0,1)$ este punto singular é un máximo relativo, para demostralo usamos o criterio do signo da derivada segunda

$f''(x) = -2.e^{-x^2} - 2x(-2x.e^{-x^2}) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$f''(0) = -2 < 0$ e polo tanto o punto $P(0, e^0) = (0,1)$ **é un máximo relativo**.

Para calcular os puntos de inflexión resolvemos a ecuación: $f''(x) = 0$, é dicir,

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x \approx \pm 0.7,\ f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6$$

Para ver si son inflexión estudiamos la curvatura de la curva y obtenemos que:

$en \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\ f(x)\ \acute{e}\ convexa\ pois\ f''(-1) = (4-2)e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$

$en \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\ f(x)\ \acute{e}\ concava\ pois\ f''(0) = (0-2)e^{0} = -2 < 0$

$en \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)\ f(x)\ es\ convexa\ pois\ f''(1) = (4-2)e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$

Os puntos: $Q(-0.7;0.6)$ $\quad R(0.7;0.6)$ son puntos de inflexión.