FUNCIÓNS: LÍMITES E CONTINUIDADE

FUNCIÓNS ELEMENTAIS

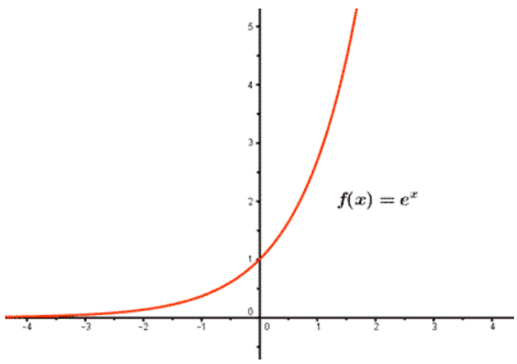
1) Funcións polinómicas: son da forma $a_n x^n$ + ... + $a_2 x^2$ + $a_1 x$ + ao. Dentro das funcións polinómicas as que máis se utilizan son:

a) Funcións polinómicas de grao cero, chamadas tamén funcións constantes. Son da forma f(x) = k, e a súa representación gráfica é unha recta horizontal.

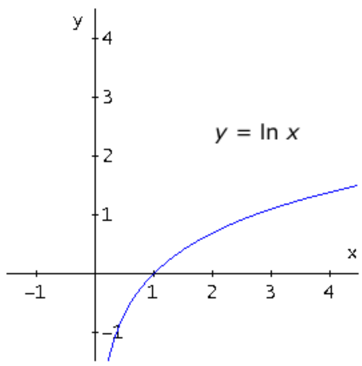
b) Funcións polinómicas de grao un, chamadas tamén funcións afíns. Son da forma f(x) = ax + b, e a súa representación gráfica é unha recta inclinada.

c) Funcións polinómicas de grao dous, chamadas tamén funcións cadráticas. Son da forma f(x) = ax^2 + bx + c, e a súa representación gráfica é unha parabola

2) Funcións exponenciais: son da forma f(x) = a^x , sendo a un número real positivo distinto de 1. A función exponencial máis importante é f(x) = e^x. A súa gráfica é:

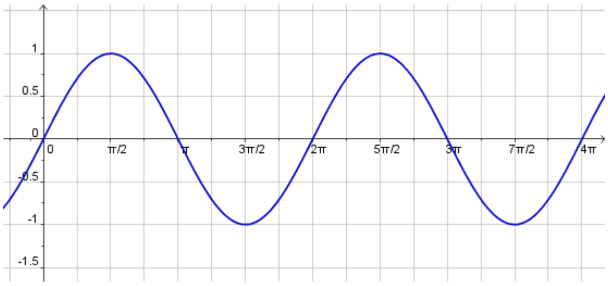


3) Funcións logarítmicas: son da forma f(x) = $\log_a x$, sendo a un número real positivo distinto de 1. A función logarítmica máis importante é f(x) = $\log_e x$ = lnx. A súa gráfica é:

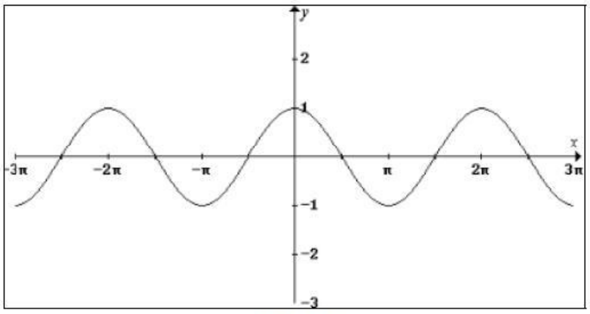


4) Funcións trigonométricas

a) Función seno f(x)= senx

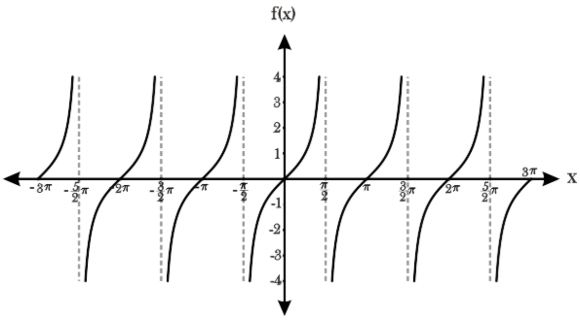


b) Función coseno f(x) = cosx

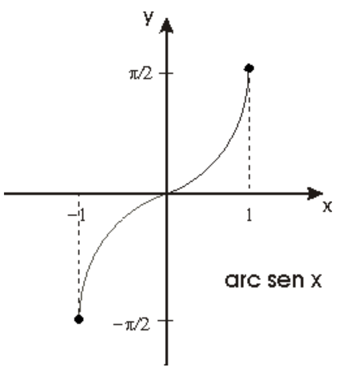


y = cos *x*

c) Función tanxente f(x) = tgx

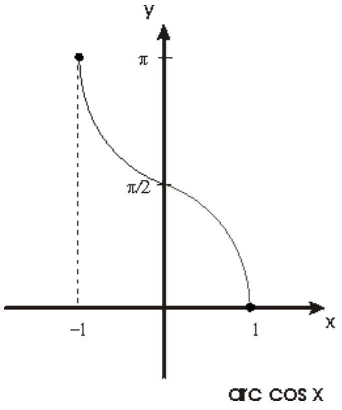


d) Función arco seno f(x) = arc senx



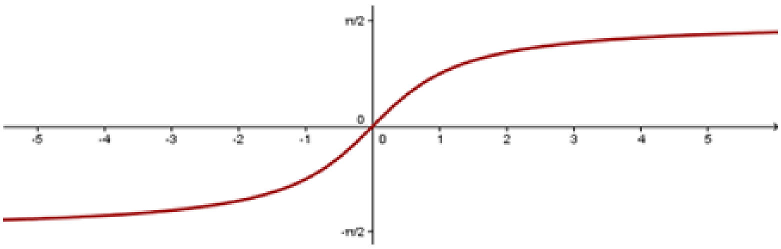
Esta función indícanos o ángulo máis próximo a 0 que ten seno igual a x

e) Función arco coseno f(x) = arc cosx



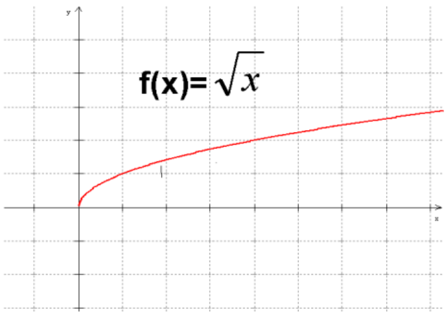
Esta función indícanos o ángulo máis próximo a 0 que ten coseno igual a x

f) Función arco tanxente f(x) = arc tgx

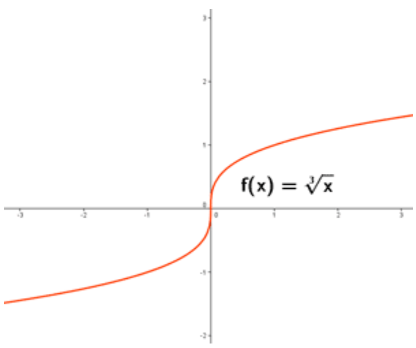


Esta función indícanos o ángulo máis próximo a 0 que ten tanxente igual a x

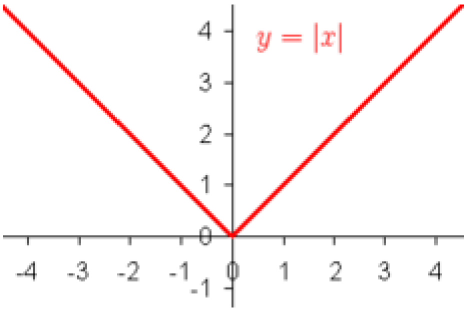
g) Función raíz cadrada f(x) = $\sqrt{x}$



h) Función raíz cúbica f(x) = $\sqrt[3]{x}$



i) Función valor absoluto f(x) = |x|

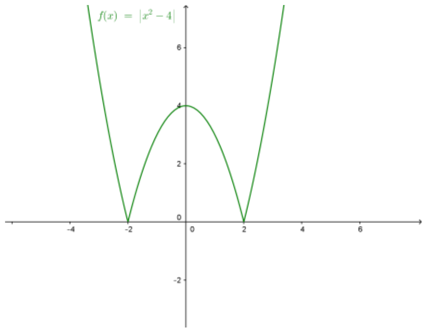


j) Función da forma f(x) = |g(x)|

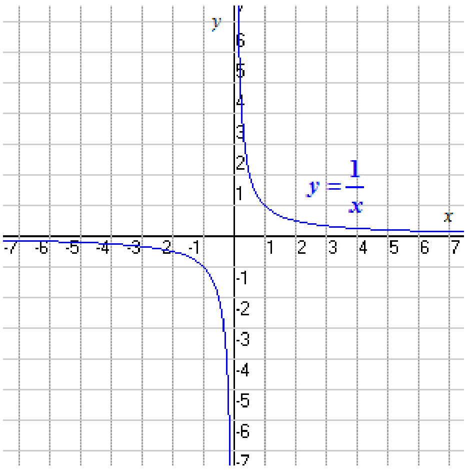
Para representar graficamente unha función desta forma procédese así:

-Trázase a gráfica de g(x)

- Substitúese a parte da gráfica de g(x) que queda por debaixo do eixe X pola súa simétrica con respecto a ese mesmo eixe.



k) Función f(x) = 1/x



DOMINIO OU CAMPO DE EXISTENCIA DUNHA FUNCIÓN

É o conxunto formado por todos os puntos da recta real que teñen imaxe (onde a función toma un valor)

Exemplos:

D(f(x)= lnx) é $(0, +\infty) = R^+$

D(f(x) = $\sqrt{x}$) é $(0, +\infty) = R^+$

D(f(x) = $\sqrt[3]{x}$) é R = $(-\infty , +\infty)$

D(f(x) = 1/x) é R-{0} = $(-\infty , 0) \cup (0 , +\infty)$

O dominio dunha función polinómica é R

Nota: O dominio dunha función pode vir indicado na propia definición da mesma.

PERCORRIDO OU RANGO DUNHA FUNCIÓN

É o conxunto formado por todos os puntos da recta real que son imaxe de algún do dominio da función.

LÍMITES DE FUNCIÓNS

LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO

Intuitivamente a idea que temos de límite dunha función nun punto é o número cara o que se aproximan os valores que toma a función cando a variable independente se aproxima a ese punto.

Analiticamente podemos definir o límite dunha función nun punto da seguinte maneira:

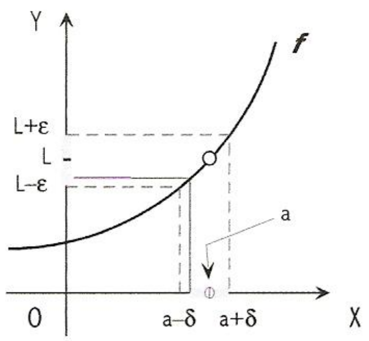
Unha función f ten por **límite** L cando x tende a a se para todo entorno $E(L\ ,\ \varepsilon)$ existe un entorno $E(a\ ,\ \delta)$, de modo que para todo x pertencente ao entorno reducido $E^*(a\ ,\ \delta)$ cúmprese que $f(x)$ pertence al entorno $E(L\ ,\ \varepsilon)$

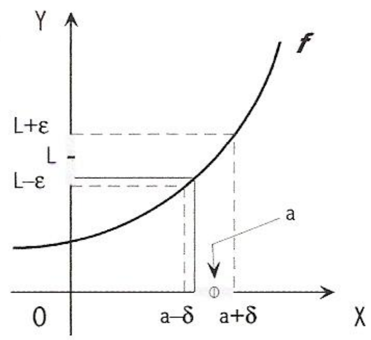
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad \forall x \in E(a\ ,\ \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L\ ,\ \varepsilon)$$

Pola definición de entorno podemos expresar a definición de límite da seguinte maneira:

Unha función f ten por límite L cando x tende a a si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entón $|f(x) - L| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$





Se unha función $f(x)$ cumpre esta definición, dicimos que é **converxente** en a.

<u>Nota</u>: Para que unha función teña límite nun punto de abscisa a, ou sexa converxente nese punto, non é necesario que a función estea definida nese punto.

Cálculo analítico de algúns límites

Nas funcións elementais definidas por unha soa fórmula (funcións polinómicas, racionais, irracionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas) tense que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ sempre que } a \in Dom\ f$$

LÍMITES LATERAIS

Existen funcións nas que non é posible calcular directamente o límite nalgún punto. Isto é debido a que estas funcións están definidas de diferente maneira á esquerda e á dereita dese punto. Para estudar estes límites, necesitamos os límites laterais.

Unha función f ten por **límite** L cando x tende a a **pola esquerda** se para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que se $a-\delta < x < a$, entón $|f(x) - L| < \varepsilon$. Escríbese $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

Unha función f ten por **límite** L cando x tende a a **pola dereita** se para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que se $a < x < a+\delta$, entón $|f(x) - L| < \varepsilon$. Escríbese $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

CONDICIÓN NECESARIA E SUFICIENTE DE CONVERXENCIA

A condición necesaria e suficiente para que unha función f teña límite nun punto de abscisa a é que teña límite lateral pola esquerda, teña límite lateral pola dereita a ambos sexan iguais.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Cálculo analítico de algúns límites

Cando necesitamos calcular o límite dunha función definida a anacos nun dos puntos fronteira debemos recorrer á definición dos límites laterais e comprobar que existen e coinciden.

PROPIEDADES DAS FUNCIÓNS CONVERXENTES

Unicidade do límite.

Se unha función é converxente ou ten límite nun punto, este é único.

Operacións coas funcións converxentes.

Se f e g son dúas funcións converxentes en a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

verifícanse as seguintes propiedades:

- $\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = L \pm M$
- $\lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$; $se\, M \neq 0$
- $\lim_{x \to a}(\alpha\ f)(x) = \alpha\ L \quad \forall \alpha \in \Re$
- $\lim_{x \to a}[f(x)]^{g(x)} = L^M$; $L > 0$
- $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = L \cdot M$

LÍMITES INFINITOS CANDO X TENDE A UN NÚMERO REAL

En moitas funcións, cando x tende a algúns puntos pola esquerda ou pola dereita, o valor de $f(x)$ non se aproxima a ningún número real se non que se fai cada vez máis grande ou cada vez máis pequeno. Nestes casos dicimos que o límite correspondente é $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente.

Unha función f ten por límite $+\infty$ cando x tende a a pola esquerda se para todo número real K, existe $\delta > 0$, tal que se $a - \delta < x < a$ se verifica que $f(x) > K$. Escríbese $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

Analogamente para $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

Una función f ten por límite $+\infty$ cando x tende a a se para todo número real K, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ se verifica que $f(x) > K$. Escríbese $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

De forma similar pódense definir $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} f(x)$

Cando existe algún dos seis límites mencionados dicimos que a función f ten una **asíntota vertical** en $x = a$.

LÍMITES NO INFINITO

LÍMITES FINITOS NO INFINITO

Unha función f ten por límite un número real L cando x tende a $+\infty$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe un número real K, de modo que para calquera valor de x maior que K se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Escríbese $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Unha función f ten por límite un número real L cando x tende a $-\infty$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe un número real M, de modo que para calquera valor de x menor que M se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Escríbese $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Cando unha función f ten algún dos límites anteriores, dicimos que a función ten unha **asíntota horizontal** de ecuación $y = L$.

LÍMITES INFINITOS NO INFINITO

Unha función f tende a $+\infty$ cando x tende a $+\infty$ si para todo número real K existe un número real M, de modo que para calquera x maior que M se verifica que $f(x)$ é maior que K. Simbolicamente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in \Re, \exists M \in \Re \quad / \quad \forall x > M \Rightarrow f(x) > K$$

Analogamente se definen $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

CÁLCULO DE LÍMITES

CÁLCULO DE LÍMITES NAS FUNCIÓNS ELEMENTAIS.

Funcións polinómicas

As funcións polinómicas son converxentes cando x tende a a, sendo a un número real, e o seu límite coincide co valor numérico do polinomio en a:

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

As funcións polinómicas, cando x tende a $\pm\infty$, compórtanse do mesmo xeito que o seu termo de maior grado, sendo o seu límite $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

Funcións racionais

As funcións racionais son converxentes cando x tende a a, para todo valor de a pertencente ao dominio de la función:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \forall a \in Dom\ f$$

Para os valores de a que non pertencen ao dominio da función e que se corresponden coas raíces do denominador aparecen as indeterminacións de tipo $\frac{K}{0}$ e $\frac{0}{0}$ que se resolven estudando os límites laterais e simplificando os factores comúns do numerador e denominador, respectivamente.

Ao calcular os límites no infinito deste tipo de funcións aparece a indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se resolve dividindo numerador e denominador pola máxima potencia o utilizando la seguinte expresión:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

O resultado depende dos graos dos polinomios numerador e denominador, de xeito que:

- Se $n > m$, o límite é infinito.
- Se $n = m$, o límite é $\frac{a_n}{b_m}$.
- Se $n < m$, o límite é cero.

Outras funcións elementais

Para calcular límites nas funcións irracionais, exponenciais e logarítmicas hai que ter moi presente o dominio de definición destas funcións

OPERACIÓNS CON LÍMITES DE FUNCIÓNS

Coñecendo como se calculan os límites das funcións elementais e aplicando as operacións con límites de funcións podemos calcular todos os demais. A seguinte táboa mostra todos os casos posibles de cálculo de límites funcionais, cando a variable x tende a un número real, $+\infty$ ou $-\infty$. Os recadros sombreados corresponden aos casos nos que non é posible achar directamente o límite. Por esta razón chámanse **indeterminacións** e hai que resolvelas de maneira particular.

Para interpretar a táboa debes recordar as propiedades vistas no apartado 3:

$$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

$$\lim\left[f(x)-g(x)\right]=\lim f(x)-\lim g(x)$$

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

	$\lim [f(x)+g(x)]$	$\lim [f(x)-g(x)]$	$\lim [f(x)\cdot g(x)]$	$\lim \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$
$\lim f(x) = L$ $\lim g(x) = M$	$L+M$	$L-M$	$L\cdot M$	$L/0$ si $L\neq 0$ L/M si $M\neq 0$ $0/0$ si $L=M=0$
$\lim f(x) = +\infty$ $\lim g(x) = M$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $M>0$ $-\infty$ si $M<0$	$+\infty$ si $M>0$ $-\infty$ si $M<0$
$\lim f(x) = -\infty$ $\lim g(x) = M$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $M>0$ $+\infty$ si $M<0$	$-\infty$ si $M>0$ $+\infty$ si $M<0$
$\lim f(x) = L$ $\lim g(x) = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $L>0$ $-\infty$ si $L<0$	0
$\lim f(x) = L$ $\lim g(x) = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $L>0$ $+\infty$ si $L<0$	0
$\lim f(x) = \pm\infty$ $\lim g(x) = 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$[\pm\infty]\cdot 0$	$\dfrac{\pm\infty}{0}$
$\lim f(x) = 0$ $\lim g(x) = \pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$0\cdot[\pm\infty]$	0
$\lim f(x) = +\infty$ $\lim g(x) = +\infty$	$+\infty$	$[+\infty]-[+\infty]$	$+\infty$	$\dfrac{+\infty}{+\infty}$
$\lim f(x) = -\infty$ $\lim g(x) = -\infty$	$-\infty$	$[-\infty]-[-\infty]$	$+\infty$	$\dfrac{-\infty}{-\infty}$
$\lim f(x) = +\infty$ $\lim g(x) = -\infty$	$[+\infty]+[-\infty]$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{+\infty}{-\infty}$
$\lim f(x) = -\infty$ $\lim g(x) = +\infty$	$[-\infty]+[+\infty]$	$-\infty$	$-\infty$	$\dfrac{-\infty}{+\infty}$

Funcións potencial- exponenciais

Os límites deste tipo de funcións resólvense aplicando a propiedade:

$$\lim\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

Os posibles resultados recóllense na seguinte táboa:

	$lím\ [f(x)]^{[g(x)]}$
$lím\ f(x) = 0$, $lím\ g(x) = M$	0 si $M > 0$
	$+\infty$ si $M < 0$
	0^0 si $M = 0$
$lím\ f(x) = +\infty$, $lím\ g(x) = M$	$+\infty$ si $M > 0$
	0 si $M < 0$
	$[+\infty]^0$ si $M = 0$
$lím\ f(x) = L$, $lím\ g(x) = +\infty$	$+\infty$ si $L > 1$
	0 si $0 < L < 1$
	$1^{[+\infty]}$ si $M = 1$
$lím\ f(x) = L$, $lím\ g(x) = -\infty$	0 si $L > 1$
	$+\infty$ si $0 < L < 1$
	$1^{[-\infty]}$ si $L = 1$

As expresións 0^0, ∞^0 e $1^{\pm\infty}$ son indeterminacións. Neste tema só aprenderemos a resolver a última delas pois as demais se resolven utilizando a regra de L' Hôpital.

Límite da composición de funcións

Sexa a función composta $g \circ f$, onde g é unha función potencial (de expoñente enteiro ou fraccionario), logarítmica ou trigonométrica (seno, coseno e tanxente) e $\lim f(x)=L$. Entón:

$$\lim(g \circ f)(x)=\lim g\left(f(x)\right)=g\left(\lim f(x)\right)=g(L)$$

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIÓNS

Todas as indeterminacións vistas no apartado anterior pódense agrupar nos seguintes tipos:

Indeterminacións do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Aparecen ao calcular límites de cocientes de funcións polinómicas. A súa resolución explicouse no apartado das funcións racionais.

Indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$

As indeterminacións de cocientes de funcións polinómicas resólvense factorizando os polinomios numerador e denominador mediante a regra de Ruffini.

As indeterminacións de cocientes de funcións irracionais resólvense multiplicando numerador e denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

Indeterminacións do tipo $\frac{K}{0}$

Estas indeterminacións resólvense estudando os límites laterais dos cocientes de funcións que os xeran.

Indeterminacións do tipo $0 \cdot \infty$

Estas indeterminacións resólvense transformándoas nas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, ou nas do tipo $\frac{0}{0}$.

Indeterminacións do tipo $\infty - \infty$

As indeterminacións con funcións racionais resólvense operando convenientemente.

As indeterminacións con funcións irracionais resólvense multiplicando o numerador e o denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

Indeterminacións do tipo 1^{∞}

Este tipo de indeterminacións resólvense aplicando a seguinte propiedade, que é válida para x_0 real, $+\infty$ o $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

CÁLCULO DE LÍMITES UTILIZANDO INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES

Chamamos infinitésimos ás funcións $f(x)$ que tenden a cero cando x tende a un número real, $+\infty$ o $-\infty$

$$f(x) \text{ é un infinitésimo } \Leftrightarrow \lim f(x)=0$$

Dous infinitésimos son equivalentes se o límite do seu cociente é 1.

$$f(x)\approx g(x) \quad en\ x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Cando $f(x)$ tende a cero, os infinitésimos equivalentes más importantes son:

$$sen(f(x)) \approx f(x) \qquad tg(f(x)) \approx f(x) \qquad 1-\cos(f(x)) \approx \frac{[f(x)]^2}{2}$$

$$\ln(1+f(x)) \approx f(x) \qquad a^{f(x)}-1 \approx f(x)\ln a$$

No cálculo de límites podemos substituír un infinitésimo polo seu equivalente sempre que apareza multiplicando ou dividindo.

ASÍNTOTAS E RAMAS INFINITAS DUNHA FUNCIÓN

ASÍNTOTAS VERTICAIS

Se algún dos límites laterais dunha función nun punto é infinito, dicimos que a función ten **ramas infinitas verticais**. Estas ramas aproxímanse a unha recta vertical que se chama **asíntota vertical**.

A recta $x=a$ é unha **asíntota vertical da función** f cando existe al menos un dos seis límites seguintes:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS

Se algún dos límites no infinito dunha función é un número real, dicimos que a función ten **ramas infinitas horizontais**. Estas ramas aproxímanse a unha recta horizontal que se chama **asíntota horizontal**.

A recta $y=L$ é unha **asíntota horizontal da función** f cando existe polo menos un dos seguintes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Se unha función se aproxima infinitamente a unha recta oblicua cando a variable independente tende a infinito, dicimos que a función ten **ramas infinitas oblicuas hiperbólicas**. Estas ramas aproxímanse a unha recta que se chama **asíntota oblicua**.

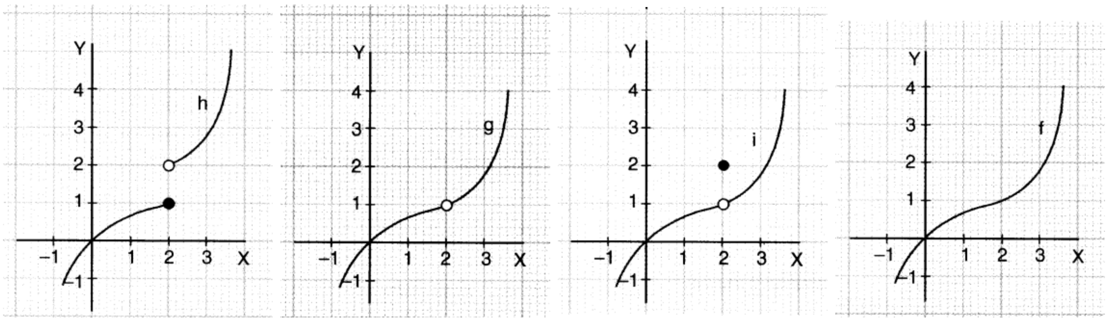
A recta $y = mx + n$ é unha asíntota oblicua da función f cando a pendente m e a ordenada na orixe n poden obterse mediante os seguintes límites:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

CONTINUIDADE .TEOREMAS SOBRE FUNCIÓNS CONTINUAS

Continuidade nun punto. Continuidade lateral.

Intuitivamente, unha función é continua se a súa gráfica pode debuxarse sen levantar o lapis do papel. Os puntos nos que haxa que levantar o lapis chámanse puntos de discontinuidade.



Nas figuras anteriores vemos algúns casos (non todos) que poden presentarse ao pasar por un punto x_0. (neste caso, para $x_0=2$)

Na primeira figura a función non é continua porque desde os dous lados non imos cara o mesmo punto, é dicir, non existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Na segunda figura si van cara o mesmo sitio, pero falta (non existe) o punto de unión entre os dous anacos ou ramas, que sería $f(x_0)$.

Na terceira existe ese punto de unión $f(x_0)$ pero non está colocado no sitio adecuado: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

E por último, na cuarta figura todo está ben e a función é continua.

Á vista disto podemos dar a definición formal de función continua nun punto.

Así, diremos que ***unha función f(x) é continua nun punto x_0*** se cumpre as tres condicións seguintes:

$$1.- \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$2.- \exists f(x_0)$$

$$3.- \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nota: Existen outras formas equivalentes de dar a definición.

Por exemplo: ***unha función f(x) é continua nun punto a si:***

1. Existe o límite da función *f(x)* en $x = a$.
2. A función está definida en $x = a$; es dicir, existe *f(a)*
3. Os dous valores anteriores coinciden.

Ou tamén, se temos en conta a definición métrica de límite podemos escribir:

$$f \quad \text{es continua en } x = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \; |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exemplos:

- A función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ ¿é continua no punto $x = 3$?

Vexamos se se cumpren as tres condicións anteriores:

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{3+2}{3-2} = 5$
2. $f(3) = \dfrac{3+2}{3-2} = 5$
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

Polo tanto, *f(x)* é continua no punto $x = 3$.

- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, estudar a continuidade en $x = 1$.

Vexamos se se cumpren as condicións necesarias:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1+1}{1} = 2$
2. $f(1) = \dfrac{1^2-1}{1^2-1} \Rightarrow$ non existe, pois o denominador anúlase.
3. O $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e $f(1)$ non son iguais porque $f(1)$ non existe e, en consecuencia, non se poden comparar.

Polo tanto, ao non estar definida a función no punto $x = 1$ non podemos falar da continuidade nese punto.

- **Dada a función** $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & si\ \ x < -1 \\ -2 & si\ \ x = -1 \\ 3+x & si\ \ x > -1 \end{cases}$**, estudar a continuidade en** $x = -1$

1. Estudamos a existencia do $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

   Como no punto $x = -1$ a función experimenta un cambio de definición, para estudar a existencia dese límite, teremos que calcular os límites laterais da función no punto. Polo tanto:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (3x+5) = 2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (3+x) = 2$$

   En consecuencia, existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$ pois os límites laterais son iguais.

2. $f(-1) = -2$
3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

Entón a función é discontinua no punto $x = -1$

- **Dada a función** $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si \;\; x<2 \\ 5 & si \;\; x=2 \\ 3-x & si \;\; x>2 \end{cases}$ **, estudar la continuidade da mesma en** $x = 2$**.**

Seguiremos o mesmo proceso que nos exemplos anteriores:

1. Estudamos a existencia do $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

   Como no punto $x = 2$ a función experimenta un cambio de definición, para estudar a existencia do límite, teremos que calcular os límites laterais da función no punto. Polo tanto:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-}(3x-2) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+}(3-x) = 1$$

   En consecuencia, non existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ pois os límites laterais son distintos.

2. $f(2) = 5$

Entón a función é discontinua no punto $x = 2$.

Continuidade lateral

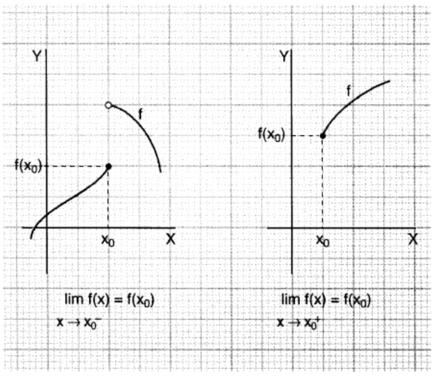
Cando unha función non é continua nun punto podemos preguntarnos se o é lateralmente; é dicir, se desde algún lado chegamos a $f(x_0)$. En concreto:

Unha función f(x) é ***continua pola esquerda*** nun punto x_0 se e só se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

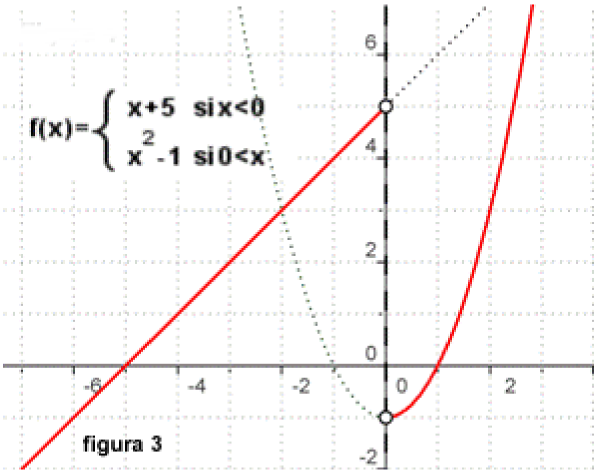
Unha función f(x) es ***continua pola dereita*** nun punto x_0 se e só se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$



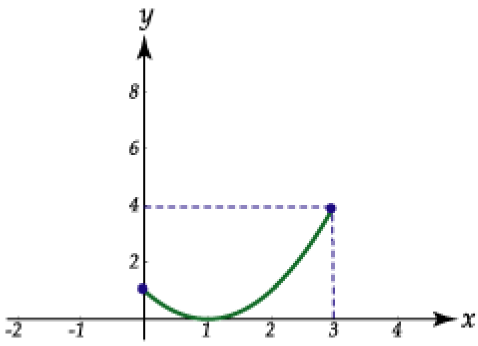
Continuidade nun intervalo.

O concepto de continuidade non ten excesivo interese e aplicación práctica mentres non se estenda a un intervalo para poder ter propiedades nun "anaco" máis amplo que nun entorno, a veces moi pequeno, arredor dun punto.
Unha función é continua nun intervalo se o é en todos os puntos do intervalo.



Así, na función adxunta, podemos apreciar que hai continuidade no intervalo [-4, -1], pero non no intervalo [-1,1]

En caso de que o intervalo sexa cerrado, [a, b], é necesario que a función tamén sexa continua lateralmente nos extremos.



Estas apreciacións serán de vital importancia para aplicalas posteriormente aos teoremas sobre funcións continuas.

Operacións con funcións continuas. Propiedades.

Tendo en conta as propiedades das funcións e dos límites, podemos deducir as seguintes propiedades:

- Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións continuas en $[a,b]$, entón a función $(f+g)(x)$ é continua en $[a,b]$.
- Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións continuas en $[a,b]$, entón a función $(f \cdot g)(x)$ é continua en $[a,b]$.
- Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións continuas en $[a,b]$, e $g(x)$ non se anula en $[a,b]$, entón a función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ é continua en $[a,b]$.
- Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$, entón $(\alpha \cdot f)(x)$ é continua en $[a,b]$, para todo $\alpha \in$ R.
- Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e $g(x)$ é continua en $f([a,b])$, entón a función $(g \circ f)(x)$ é continua en $[a,b]$.

A maioría das funcións máis usuais son continuas

1. A función constante $f(x) = k$ é continua en R.

2. A función identidade $f(x) = x$ é continua en $\mathbf{R}$.

3. A función potencial $f(x) = x^n,\ n \in N$ é continua en $\mathbf{R}$.

Se temos en conta que $f(x) = x^n = x \cdot x \cdot \cdots^{(n)} \cdots \cdot x$, a función potencial é un produto de n funcións continuas e, polo tanto, será outra función continua.

4. A función polinómica $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$, é unha función continua en $\mathbf{R}$.

5. A función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é continua en todo o seu dominio, é dicir, en todo $\mathbf{R}$ menos naqueles valores que anulen ao denominador.

O dominio da función racional está formado por todos os números reais que non anulan ao denominador da fracción:

$$Dom(f(x)) = R - \{x \in R / Q(x) = 0\}$$

Entón, $\forall a \in \mathrm{Dom}(f)$ verifícase que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = f(a)$$

e ea función é continua en $a \in Dom(f)$ e como a é un punto calquera do dominio, será continua neste.

Propiedades das funcións continuas.

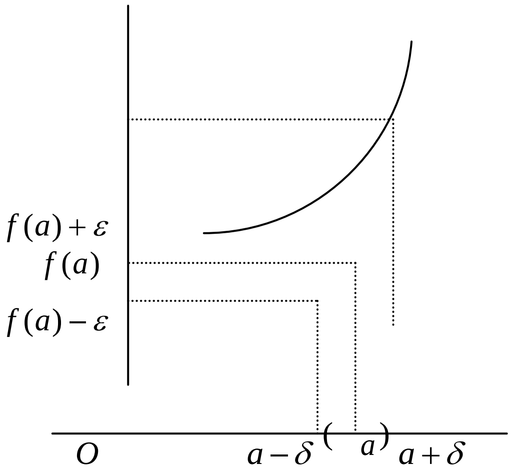
Se unha función é continua nun punto, entón ten límite nese punto.

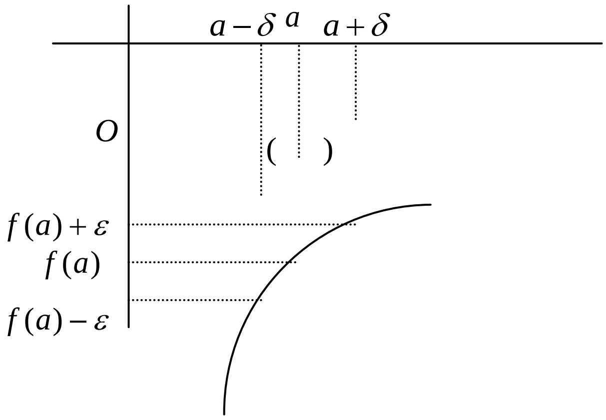
Teorema de acotación.

Se unha función é continua nun punto $x = a$, entón está acotada nese punto, é dicir, existe un entorno simétrico de $x = a$ no que a función está acotada.

Teorema do signo.

Se $f(x)$ é continua en un punto $x = a$ e $f(a) \neq 0$, entón existe un entorno de $x = a$ no que $f(x)$ ten o mesmo signo que $f(a)$.





Discontinuidades. Tipos.

Cando unha función non é continua nun punto x_0 dicimos que ten ou que presenta unha discontinuidade nese punto.

Tendo en conta que unha función é continua nun punto $x = a$ se, e só se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$, en caso de que esta condición non se cumpra por algún motivo, teremos un dos seguintes **tipos de discontinuidades**.

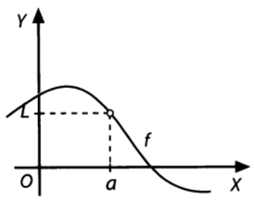
$$Discontinuidades \begin{cases} Evitables \\ Inevitables \begin{cases} Salto\ finito \\ Salto\ \inf inito \end{cases} \end{cases}$$

<u>**Nota:**</u> Nas discontinuidades evitables vai existir o límite, pero nas inevitables non

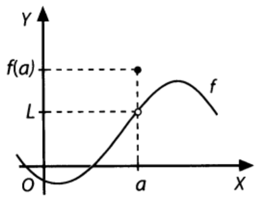
Discontinuidade evitable.

Unha función presenta una discontinuidade evitable nun punto x_0 cando:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ pero ou ben non coincide con $f(x_0)$ ou ben non existe $f(x_0)$.



∄ f(a)
Discontinuidad evitable



f(a) ≠ L
Discontinuidad evitable

Este tipo de discontinuidade chámese **evitable** porque se resolvería ou evitaría definindo unha nova función a partir da que temos, da seguinte maneira:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a \\ L & \text{si } x=a \end{cases}$$

é dicir, definimos a nova función igual que a función que temos en todos os puntos onde non hai problema, e no punto onde presenta a discontinuidade lle asignamos o valor do límite.

<u>Exemplo:</u>

- Explica como farías para que a seguinte función sexa continua: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ no punto $x = 3$.

Se observamos a función, resulta que non está definida no punto $x = 3$ pero, se calculamos o límite da función nese punto, obtemos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$$

que sería o <u>verdadeiro valor</u> da función nese punto. A nova función

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & si\ \ x\neq 3 \\ 1 & si\ \ x=3 \end{cases}$$

sería continua no punto $x = 3$.

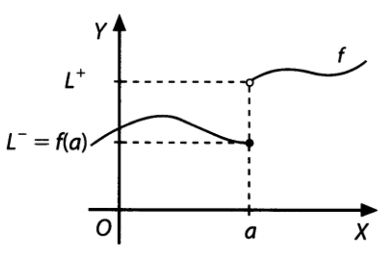
Discontinuidade de salto finito.

Cando non existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ***pero si existen os límites laterais, que son finitos aínda que distintos.***

Neste caso, pode existir ou non f(a)

Ademais, chamamos **salto** á diferenza entre os límites laterais da función no punto.

Salto = $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L^+ \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L^-=f(a)\end{array}\right\} L^+\neq L^- \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

Discontinuidad de salto.

Exemplo

Estudar a continuidade da función $f(x)=\begin{cases}3x+1 & si\ \ x\le 1\\ 3-2x & si\ \ x>1\end{cases}$ no punto x = 1.

Para estudar a continuidade no punto x = 1, analizamos se se verifican os tres puntos dos que falamos con anterioridade:

1º.- A función está definida no punto x = 1: $f(1)=4$

2º.- Estudamos a existencia do límite en x = 1, para o que temos que calcular os límites laterais dado que nese punto existe un cambio de definición da función

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-2x)=1$$

Al ser os límites laterais distintos, a función non ten límite nese punto.

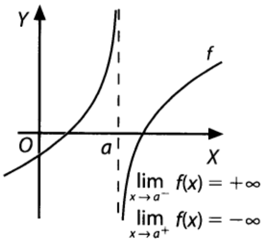
En consecuencia, en x = 1, a función presenta unha discontinuidade inevitable de salto finito:

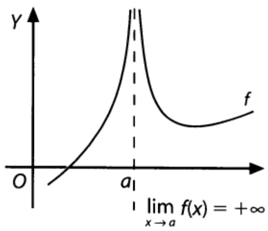
$$\textbf{Salto} = \lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)=4-1=3$$

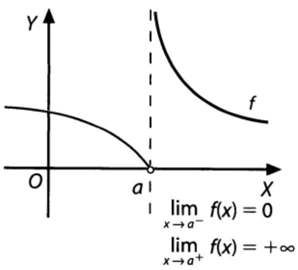
Se observamos os valores dos límites laterais, vemos que o límite á esquerda coincide co valor que toma a función no punto, polo que a función ten unha continuidade lateral á esquerda no punto x = 1.

Discontinuidade de salto infinito.

Cando non existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e ***algún dos límites laterais (ou os dous) é infinito***







Exemplo

Estudar a continuidade da función $f(x)=\begin{cases}3x+1 & si\ \ x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1} & si\ \ x>1\end{cases}$ no punto x = 1.

Para estudar a continuidade no punto x = 1, analizamos se se verifican os tres puntos dos que falamos con anterioridade:

1º.- A función está definida no punto x = 1: $f(1) = 4$

2º.- Estudamos a existencia do límite en x = 1, para o que temos que calcular os límites laterais nel xa que nese punto existe un cambio de definición da función

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(3x+1) = 4 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$$

En consecuencia, en x = 1, a función presenta unha discontinuidade inevitable de salto infinito:

Nota: Se observamos os valores dos límites laterais, vemos que o límite pola esquerda coincide co valor que toma a función no punto, polo que podemos dicir que a función é continua pola esquerda no punto x = 1.

Teoremas sobre funcións continuas.

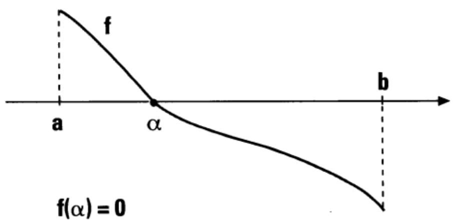
Teorema de Bolzano:

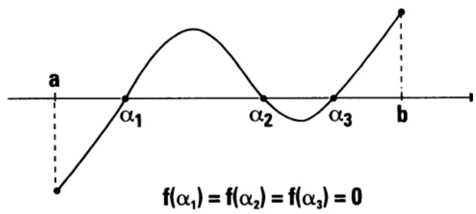
Se unha función f(x) é continua nun intervalo cerrado $[a,b]$ e toma valores de signo oposto nos extremos, entón existe polo menos un punto interior, c, do intervalo no que f(c) = 0.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;/\; f(c) = 0$$

Interpretación xeométrica:

Xeometricamente este teorema significa que unha función continua non pode pasar de un lado a outro do eixe X sen cortalo (o que, evidentemente, corresponde á idea intuitiva de continuidade).





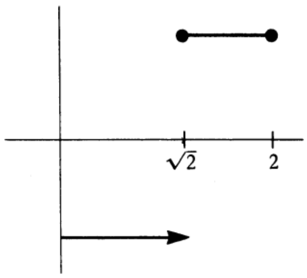
Observacións:

1.- O teorema afirma que existe un punto c en (a, b) tal que f(c) = 0, pero non afirma que ese punto sexa único. Pode haber varios, como na segunda figura.

2.- O teorema establece unha condición suficiente pero non necesaria, para que unha función se anule nun punto. Unha función pode ser continua en [a, b], non cambiar de signo e nembargante anularse nalgún punto c de (a, b). Por exemplo f(x) = x^2 en [-1, 1].

3.- A hipótese de continuidade é fundamental. Se a función non é continua a conclusión pode non ser certa. Por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \le x \le 2. \end{cases}$$

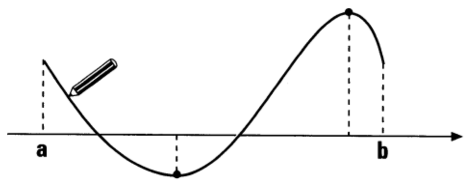


<u>Consecuencias: A principal utilidade deste teorema está en que serve para determinar ceros de funcións e solucións de ecuacións.</u>

<u>**Teorema de Weierstrass:**</u>

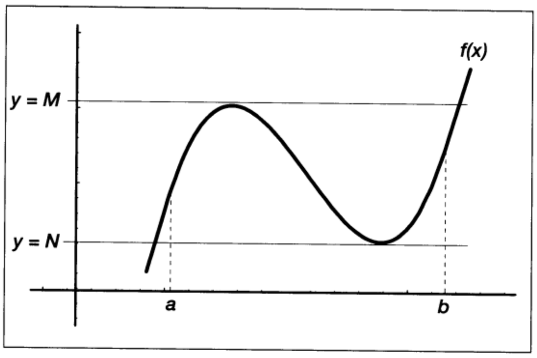
Se unha función f(x) é continua nun intervalo cerrado [a, b] existen nese intervalo dous puntos nos que a función alcanza, respectivamente, os seus valores máximo e mínimo.

É evidente que se a gráfica comeza en (a,f(a)) e remata en (b,f(b)), sen levantar o lapis do papel por ser f continua, non pode dispararse ao infinito, entón terá un punto de máxima altura e outro de mínima altura.



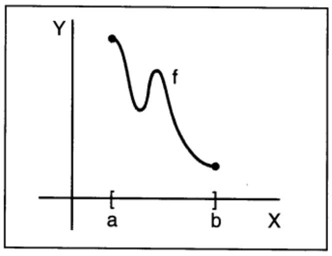
<u>Interpretación xeométrica:</u>

Xeometricamente este teorema significa que dada unha función continua nun intervalo cerrado [a, b], a súa gráfica queda comprendida entre as rectas y = M e y = N, sendo M e N os valores máximo e mínimo que alcanza a función no intervalo.



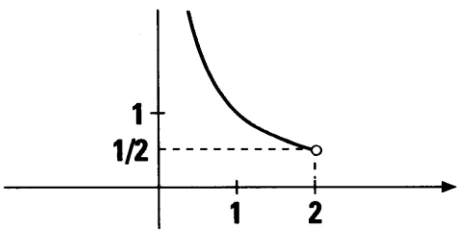
<u>Observacións:</u>

1.- Pode ocorrer que os valores máximo e mínimo se alcancen nos extremos do intervalo.



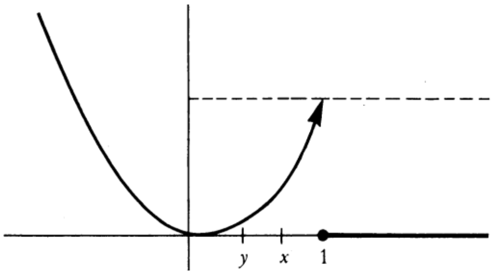
2.- As hipóteses de continuidade e de ser cerrado o intervalo son fundamentais. Se falta algunha delas a conclusión pode non ser certa, como pode verse nos exemplos seguintes:

a) a función f(x) = 1/x no intervalo (0,2) non ten máximo nin mínimo.



b) a seguinte función, no intervalo cerrado [0, 1] non ten máximo a pesar de ser cerrado o intervalo por non ser continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$



Aplicacións dos teoremas sobre funcións continuas

Os teoremas sobre funcións continuas sérvennos para saber se unha ecuación ten ou non solución nun intervalo e, incluso, para aproximar esa solución.

- **Demostrar que a ecuación** $x^3 - 5x + 3 = 0$ **ten unha solución en el intervalo** $\left[\,1,\,2\,\right]$.

A función $f(x) = x^3 - 5x + 3$ é unha función continua en todo R por ser polinómica e, polo tanto, tamén é continua no intervalo $\left[\,1,\,2\,\right]$, .

Ademais, verifícase que: $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = +1 > 0$

En consecuencia, cúmprense as hipóteses do teorema de Bolzano (temos unha función continua nun intervalo cerrado que toma valores de signo oposto nos extremos do mesmo) e, polo tanto, tamén se cumprirá a tese:

$\exists\ c \in \left[\,1,\,2\,\right]\ /\ f(c) = 0$ e a nosa ecuación ten unha solución no intervalo $\left[\,1,\,2\,\right]$.

- **A función** $f(x) = tgx$ **toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo** $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ **e, nembargante, non se anula nel. ¿Contradí isto o teorema de Bolzano?**

A función $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ é continua en todo R menos nos puntos nos que se anula a función coseno e, dentro do intervalo dado, existe un punto no que se anula $x = \dfrac{\pi}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

En consecuencia, a función tanxente non é continua no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Verifícase que: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = tg\dfrac{\pi}{4} = 1$ e $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = tg\dfrac{3\pi}{4} = -1$

Non se cumpren as hipóteses de Bolzano e, polo tanto, tampouco se cumprirá a tese. En consecuencia, non se contradí o teorema xa que se non se cumpren as hipóteses, non se ten por que cumprir a tese.