Recta Tangente a una curva en uno de sus Puntos

Si f(x) es derivable en x_0, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en x_0 es:

$$y - y_0 = m\cdot(x-x_0) \rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Tipos:

1) Si nos dan el punto de tangencia $x = x_0$

Tenemos que hallar el valor de $y_0=f(x_0)$ → Para ello sustituimos el valor de x en nuestra función.

Calculamos $f'(x_0)$ → Para ello derivamos nuestra función y sustituimos $x=x_0$

Por último calculamos la fórmula : $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Ejemplo 1: Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto y=f(x)=$\frac{1-3x^2}{2}$ en x=1

Ecuación Punto-Pendiente → $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$

- $y_0=f(x_0)$ → $y_0=f(1)=\frac{1-3\cdot1^2}{2} = -1$ → Las coordenadas serán (1,-1)
- $f'(x)=\frac{-6x}{2} = -3x$ → m= f´(x)=-3·1=-3 →m= -3

  m=f´(x)
- $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$ → y +1 = -3(x-1) → **y=-3x+2**

Ejemplo 2: Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto y=f(x)=$\sqrt{x+12}$ en x=-3

Ecuación Punto-Pendiente → $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$

- $y_0=f(x_0)$ → $y_0=f(-3)=\sqrt{-3+12} = 3$ → Las coordenadas serán (-3,3)
- $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+12}}$ → m= $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-3+12}} = \frac{1}{6}$ →m= $\frac{1}{6}$

  m=f´(x)
- $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$ → y -3 = $\frac{1}{6}\cdot(x+3)$ → **y=$\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$**

Ejemplo 3: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva f(x)= $\frac{x^2+1}{e^x}$ en x_0=0.

- **La ecuación de la recta Punto-pendiente : $y-y_0= m(x-x_0)$**
- Empezamos calculando el valor de y_0 para x_0= 0 → f(0)= $\frac{0^2+1}{e^0}$ = 1 . Hemos calculado que para x_0 =0 la función y_0 = 1.
- Lo siguiente que hacemos es calcular la derivada de la función en el punto x=0, de esta manera estaremos calculando la pendiente de la función en ese punto.
  f ´(x) = $\frac{2xe^x - e^x(x^2+1)}{(e^x)^2}$; Calculo la pendiente para x=0 → f ´(0)= $\frac{2\cdot 0\cdot e^0 - e^0(0^2+1)}{(e^0)^2}$ = -1 = m
- Sustituyo en la ecuación de la recta y me queda que
  $y - y_0 = m(x-x_0)$
  y – 1 = -1 (x-0) → **y = 1-x**

2) Si nos dan la pendiente de la recta tangente m:

m = f´(x) → Derivamos nuestra función y la igualamos al valor de la pendiente que nos dan y así obtenemos el valor de x_0.

Tenemos que hallar el valor de $y_0=f(x_0)$ → Para ello sustituimos el valor de x en nuestra función.

Por último calculamos la fórmula : $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Ejemplo 4: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva y= x^2+4x+1, que es paralela a la recta 4x-2y+5=0

4x-2y+5=0 → y = $\frac{4x+5}{2}$ =mx+n → Siendo m la pendiente → m=2 → Como nos dice que la recta tangente tiene que ser paralela a esta recta, la pendiente será m= f´(x) =2.

- Derivamos nuestra función → f´(x)= 2x+4 y lo igualamos al valor de la pendiente.

  $f'(x_0)$ =2 → 2x+4=2 → x_0= -1

- Calculamos el valor de y_0 (Para calcular las coordenadas nos vamos a la función)

  y_0 = f(-1)= $(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$

- $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$ → y +2= 2(x+1) → **y = 2x**

Ejemplo 5: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva y = $2x^2$-3x que tenga pendiente -7.

El enunciado nos dice que la pendiente → m= f´(x) =2

- Derivamos nuestra función → f´(x)= 4x-3 y lo igualamos al valor de la pendiente.

  f´(x_0) =-7 → 4x-3=-7 → x_0= -1

- Calculamos el valor de y_0 (Para calcular las coordenadas nos vamos a la función)

  y_0 = f(x_0)= f(-1)= 2·$(-1)^2$-3(-1) =2+3 =5

- y – y_0 = m·(x-x_0) → y -5= -7(x+1) → **y = -7x-2**

Ejemplo 6: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva y=$\sqrt{x}$ que sea paralela a la recta y= $\frac{1}{4}x + 1$

y = $\frac{1}{4}x + 1$ = mx+n → Siendo m la pendiente → m=$\frac{1}{4}$ → Como nos dice que la recta tangente tiene que ser paralela a esta recta, la pendiente será m= f´(x) =$\frac{1}{4}$.

- Derivamos nuestra función → f´(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ y lo igualamos al valor de la pendiente.

  f´(x_0) =$\frac{1}{4}$ → $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ =$\frac{1}{4}$ → $\sqrt{x_0}$ = 2 → x_0 = 4

- Calculamos el valor de y_0 (Para calcular las coordenadas nos vamos a la función)

  y_0 = f(4)= $\sqrt{4}$ = 2

- y – y_0 = m·(x-x_0) → y -2= $\frac{1}{4}$(x-4) → **y = $\frac{1}{4}x$ +1**