

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si existe el límite cuando x tiende a “a” y coincide con el valor de la imagen de “a”, $f(a)$

Es continua si $\rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Una función es continua en un punto $x = a$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$; $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
2. $\exists f(a)$
3. Los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en ese punto. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

16) Calcula a y b para que la función será continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-3}{(x+2)^2} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{2}{x-b} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Estudio de la continuidad para $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - x + 2a &= 2a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{(x+2)^2} &= \frac{-3}{4} \\ f(0) &= 2a \end{aligned} \right\}$$

Para que la función sea continua en $x=0$ se tiene que cumplir que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow 2a = \frac{-3}{4} \rightarrow a = \frac{-3}{8}$

Estudio de la continuidad para $x = 4$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-3}{(x+2)^2} &= \frac{1}{36} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{x-b} &= \frac{2}{4-b} \\ f(4) &= \frac{2}{4-b} \end{aligned} \right\}$$

Para que la función sea continua en $x = 4$ se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \rightarrow \frac{1}{36} = \frac{2}{4-b} \rightarrow b = -68$$

17) Calcula el valor de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Si $x \neq -1$, tenemos dos funciones polinómicas que son funciones continuas.

Estudio de la continuidad para $x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x^3 - x^2 + a = -2 - 1 + a = -3 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + ax + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a \\ f(-1) = 2 - a \end{array} \right\}$$

Para que la función sea continua en $x = -1$ se tiene que cumplir que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

$$-3 + a = 2 - a \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

18) Calcula los valores de a y b para que la función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + bx + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ ax & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos funciones polinómicas que son funciones continuas.

Estudio de la continuidad para $x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x^3 - x^2 + a = -2 - 1 + a = -3 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + bx + 1 = 1 - b + 1 = 2 - b \\ f(-1) = 2 - b \end{array} \right\} \rightarrow \text{Para que la función sea continua en } x = -1 \text{ se tiene que cumplir que:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \rightarrow -3 + a = 2 - b \rightarrow a + b = 5$$

Estudio de la continuidad para $x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + bx + 1 = 1 + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} ax = a \\ f(1) = a \end{array} \right\} \rightarrow \text{Para que la función sea continua en } x = 1 \text{ se tiene que cumplir que:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow 2 + b = a \rightarrow a - b = 2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para que la función $f(x)$ sea continua: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$

21) Determina a y b para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos son continuas si cada una de esas funciones lo son en cada uno de sus intervalos de definición, y si lo son en los puntos de división de cada uno de los intervalos.

Intervalos de Definición

- Miramos cada función por separado y vemos que $\frac{a}{x} + b$ no está definida en $x=0$ pero si miramos en el intervalo en el que está definida esta función es en $x \geq 1$ por lo que $x=0$ no entraría dentro de este intervalo. Esta función sería continua en el intervalo en el que está definida.
- Las demás funciones son una función cuadrática y lineal y estarían definidas en todo su intervalo.

Puntos de división de cada uno de los intervalos

Por último miro si la función es continua en los puntos de división de cada uno de los intervalos, en nuestro caso en $x=0$ y $x=1$.

Estudio de la continuidad para $x=0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - a = -a \\ f(0) = -a \end{cases}$$

Para que sea continua en $x=0$, se tiene que cumplir que: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow b = -a$

Estudio de la continuidad para $x=1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a}{x} + b = a + b \\ f(1) = a + b \end{cases}$$

Para que sea continua en $x=1$, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow 1 - a = a + b \rightarrow 2a + b = 1$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} b = -a \\ 2a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$