UD6. ECUACIONES

Las ecuaciones sirven para expresar relaciones y así poder resolver problemas.

"Una ventana de 3,75 m^2 mide un metro más de largo que de ancho"

$$\begin{cases} Ancho \rightarrow x \\ Alto \rightarrow x+1 \end{cases} \qquad \underline{\text{Relación}}: \acute{A}rea = base\ x\ altura \rightarrow \quad 3{,}75 = x\cdot(x+1)$$

- SIGNO IGUAL: solo podemos escribir uno en cada "frase" (en cada relación).

$$2x+3 = 2x+x = 3x$$

mal escrito

- RESOLVER UNA ECUACIÓN: encontrar el valor o valores que la verifiquen (que la igualdad sea verdad)
  - por tanteo: $2x+3=3x$

    ¿Qué número tiene que ser la "x" para que sea verdad que es igual?

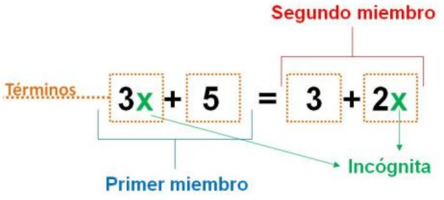
  - despejando:

Definición. Una **<u>ecuación</u>** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o <u>incógnitas</u>.

Cuando esta igualdad es cierta para cualquier valor de la incógnita recibe el nombre de <u>identidad</u>.

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x-4}_{\text{Segundo miembro}}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2 = x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

1. ELEMENTOS DE UNA ECUACIÓN



- Miembros: expresiones que aparecen a cada lado del igual.
- Términos: sumandos que forman los miembros.
- Incógnitas: letras de la ecuación.

  ¡ojo! No es lo mismo que VARIABLES.

- Solución: valor (o valores) concretos que toman las letras para que la ecuación sea cierta.* (libreta)

$$2x + x = 6 \begin{cases} x \rightarrow incógnita \\ x = 2 \rightarrow solución \end{cases}$$

¡ojo! Con el número de soluciones de las ecuaciones.

- Hay ecuaciones que <u>no tienen solución</u>.

- Hay ecuaciones que tienen <u>infinitas soluciones</u>.

- Grado: es el mayor de los grados de los términos una vez reducida (operada) la ecuación.

Definición. Dos ecuaciones son <u>equivalentes</u> si tienen la misma solución.

2. TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS * (libreta)

Consiste en hacer operaciones **<u>EN LOS DOS MIEMBROS</u>** para obtener ecuaciones equivalentes.

En las ecuaciones podemos “mover” los números y las letras de un miembro a otro y esto se hace utilizando las operaciones inversas:

Si en la ecuación $3x - 5 = 1 - x$ quiero “mover el 5” que está *restando* (quiero que desaparezca), tengo que *sumar 5* en cada miembro:

$3x - 5 + 5 = 1 - x + 5 \quad \rightarrow \quad 3x = 6 - x,$ que son ecuaciones equivalentes.

- <u>OPERACIÓN INVERSA A LA SUMA → RESTA</u>

  $x+3=4 \;\rightarrow\; x+3-3=4-3 \;\rightarrow\; x=1$ *$+3-3=0 \rightarrow$ consigo que "desaparezca"

- <u>OPERACIÓN INVERSA A LA RESTA → SUMA</u>

  $x-2=3 \;\rightarrow\; x-2+2=3+2 \;\rightarrow\; x=5$ *$-2+2=0 \rightarrow$ consigo que "desaparezca"

- <u>OPERACIÓN INVERSA A LA MULTIPLICACIÓN → DIVISIÓN</u>

  $2\cdot x=6 \;\rightarrow \frac{2\cdot x}{2}=\frac{6}{2} \;\rightarrow\; x=3$ *$2/2=1 \rightarrow$ consigo que "desaparezca"

- <u>OPERACIÓN INVERSA A LA DIVISIÓN → MULTIPLICACIÓN</u>

  $\frac{x}{3}=5 \;\rightarrow\; 3\cdot\frac{x}{3}=4\cdot 3$ *$3/3=1 \rightarrow$ consigo que "desaparezca"

- <u>OPERACIÓN INVERSA A LA POTENCIA → RAÍZ</u>

  $x^2=4 \;\rightarrow\; \sqrt{x^2}=\sqrt{4} \;\rightarrow\; x=\pm 2$ *la raíz y el cuadrado se anulan → consigo que "desaparezca"

- <u>OPERACIÓN INVERSA A LA RAÍZ → POTENCIA</u>

  $\sqrt{x+1}=2 \rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2=2^2 \rightarrow x+1=4$ *la raíz y el cuadrado se anulan → consigo que "desaparezca"

3. REDUCCIÓN DE TÉRMINOS * (libreta)

Consiste en agrupar las x con las x, y los números con los números.

$$2x+3+5x=-9-4x+2x \;\xrightarrow[\text{Reducción de términos}]{}\; 7x+3=-9-2x$$

ECUACIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO * (libreta)

$$\boxed{ax+b=0, \qquad siendo\ a\neq 0}$$

Tiene una <u>**única**</u> solución: $x=-\frac{b}{a}$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita, dejar sola la x.

¡ojo! Hay que tener muy en cuenta <u>la jerarquía de operaciones</u>.

$$3x+1=3\begin{cases} MAL: & \frac{3x}{3}+1=\frac{3}{3} \\ BIEN: & 3x+1-1=3-1 \end{cases}$$

*Se aplica la jerarquía de operaciones inversa.

PASOS

1. Quitar denominadores.
2. Quitar paréntesis.
3. Reducir los miembros.
4. Transponer los términos.
5. Despejar la x operando para que su coeficiente sea 1.

- Cómo quitar paréntesis:

$$2x+3(2x-1)=x+67 \xrightarrow[\text{Paréntesis}]{\text{Rompemos}} 2x+6x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 8x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}}$$

$$\xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}} 8x-x=67+3 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 7x=70 \xrightarrow[\text{la incógnita}]{\text{Despejamos}} x=\frac{70}{7}=10 \xrightarrow{\text{Solución}} x=10$$

- Cómo quitar denominadores:

A.

$$\frac{x}{3}+1=5x$$

$$3\cdot\left(\frac{x}{3}+1\right)=5x\cdot 3$$

Multiplicamos TODO el miembro

$$\frac{3\cdot x}{3}+3=15x$$

$$x+3=15x$$

B. Varias fracciones:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=1+\frac{x}{10}$$

$1^{\underline{o}}.\ mín.c.m(4,5,10)=20$

$$20\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{5}\right)=\left(1+\frac{x}{10}\right)\cdot 20$$

Multiplicamos TODO el miembro

$$\frac{20\cdot x}{4}+\frac{20\cdot x}{5}=20+\frac{20\cdot x}{10}$$

Simplificamos los coeficientes

$$5x+4x=20+2x$$

Otra forma:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=1+\frac{x}{10}$$

$1^{\underline{o}}.\ mín.c.m(4,5,10)=20$

$$\frac{5\cdot x}{20}+\frac{4\cdot x}{20}=\frac{20}{20}+\frac{2\cdot x}{20}$$

Denominador común. Recuerda multiplicar arriba y abajo por el mismo número.

$$20\cdot\left(\frac{5\cdot x}{20}+\frac{4\cdot x}{20}\right)=\left(\frac{20}{20}+\frac{2\cdot x}{20}\right)\cdot 20$$

Multiplicamos los dos miembros.

$$5x+4x=20+2x$$

ECUACIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, siendo\ a \neq 0}$$

Las letras *a, b, c* son coeficientes conocidos:

Ecuación	Forma general: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	Coeficientes
$3x^2 + 2 - 5x = 0$		
$4x^2 = 3$		
$3(x^2 - 1) + x - 5 = 0$		

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Según la forma que tengan (si algún coeficiente es 0), las ecuaciones de segundo grado se resuelven de un modo u otro:

- Si $b, c = 0$,

  $$\boxed{ax^2 = 0}$$

  Para que una multiplicación de 0, alguno de los factores tiene que ser 0, por lo tanto:

  Solución: $x = 0$

- Si $b = 0$ y $c \neq 0$, $\rightarrow$ $ax^2 + c = 0$ **DESPEJANDO**

$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ **Solución:** $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$	*Ejemplo:*

- Si $b \neq 0$ y $c = 0$, $\rightarrow$ $ax^2 + bx = 0$ **SACANDO FACTOR COMÚN**

$ax^2 + bx = 0$ **sacamos factor común:** $x \cdot (ax + b) = 0$ **tenemos 2 opciones:** $x = 0$ o $ax + b = 0$ $ax = -b$	*Ejemplo:*

$x = -\frac{b}{a}$ **<u>Soluciones</u>:** $x = 0$ o $x = -\frac{b}{a}$	

- **<u>Ecuación completa.</u>** Si todos los coeficientes son distintos de cero ($b \neq 0$ y $c \neq 0$), empleamos la **<u>FÓRMULA</u>** para las ecuaciones de 2º grado:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

PROBLEMAS CON ECUACIONES

1. Identifica los elementos: pon nombre a la "x".

2. Relaciona los elementos conocidos con los desconocidos (traduce el enunciado):

3. Resuelve la ecuación:

4. Interpreta la solución: