

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 101

¿Dominas lo básico?

Ecuaciones

1 Resuelve las siguientes ecuaciones. Las que sean de 2.º grado incompletas, resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

$$a) \frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{(x+1)(x-2)}{6}$$

$$b) (x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$$

$$c) \frac{x(x-2)}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3}$$

$$d) x\left(\frac{2x+1}{2}\right) - \frac{x-2}{2} + \frac{x^2-1}{3} = 0$$

$$a) (x-1)(x+2) - 4(x-3) = 12 + 2(x+1)(x-2)$$

$$x^2 + x - 2 - 4x + 12 = 12 + 2x^2 - 2x - 4$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

$$b) x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20$$

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2; x = -2$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

$$c) 3x(x-2) - 2(x+1) = 6(x-3) - 4(x-4)$$

$$3x^2 - 6x - 2x - 2 = 6x - 18 - 4x + 16$$

$$3x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(3x - 10) = 0 \rightarrow x = 0; x = \frac{10}{3}$$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{10}{3}$

$$d) 3x(2x+1) - 3(x-2) + 2(x^2-1) = 0 \rightarrow 6x^2 + 6x - 3x + 6 + 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow 8x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8 \cdot 14}}{16} \text{ no tiene solución.}$$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

b) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

c) $(x+1)^2 = \frac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$

d) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25x}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)(7x+1) - 4$

a) $4(x^2 - 6x + 9) - (4x^2 - 4x + 1) = 35$

$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 4x - 1 = 35 \rightarrow -20x = 0$

Solución: $x = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 - 8(1+x) = x^2 - 2x + 1 - 4(2+x)$

$x^2 + 2x + 1 - 8 - 8x = x^2 - 2x + 1 - 8 - 4x$

$-6x - 7 = -6x - 7 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $2(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 6x - 2(2x^2 + 1)$

$2x^2 + 4x + 2 = 5x^2 + 6x - 4x^2 - 2$

$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

d) $4x^2 + 4x + 1 + 25x = 5x + 1 - 14x^2 - 8$

$18x^2 + 24x + 8 = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm 0}{18} = -\frac{2}{3}$

Solución: $x = -\frac{2}{3}$

3 Resuelve.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} y=3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y=1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = 1, x_4 = -1$

b) $x^4 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16}$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -2$

c) $x^2(x^2 - 25) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -5$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 18y + 81 = 0 \rightarrow y = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -3$

e) $4x^4 + 4x^2 + 1 - 5 = x^4 - 4$

$3x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$3x^2 + 4 = 0$ no tiene solución.

La solución de la ecuación es $x = 0$.

4 Resuelve.

$$a) \frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$$

$$b) \frac{x-4}{x} - \frac{x-1}{4x} = -3x$$

$$c) \frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} = \frac{2}{3}$$

$$d) x - \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x-1}{2}$$

$$a) 2(x+2) + 2x \cdot 3x = x(5x+6)$$

$$2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Comprobamos sobre la ecuación inicial la validez de la solución.

Solución: $x = 2$

$$b) 4(x-4) - (x-1) = -3x \cdot 4x$$

$$4x - 16 - x + 1 = -12x^2 \rightarrow 12x^2 + 3x - 15 = 0 \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-1 \pm 9}{8} = \begin{cases} 1 \\ -10/8 = -5/4 \end{cases}$$

Se comprueba sobre la ecuación inicial que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{4}$

$$c) 3x(x-3) + 3(x+3) = 2x^2$$

$$3x^2 - 9x + 3x + 9 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Se comprueba que la solución es válida.

Solución: $x = 3$

$$d) 2x(x+1) - 2(x-1) = (3x-1)(x+1)$$

$$2x^2 + 2x - 2x + 2 = 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Se comprueba que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

5 Resuelve.

a) $x + \sqrt{25 - x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x + 1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

a) $\sqrt{25 - x^2} = x + 1 \rightarrow 25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \rightarrow \sqrt{25 - 9} = 3 + 1 \rightarrow x = 3$ es solución.

$x = -4 \rightarrow \sqrt{25 - 16} \neq -4 + 1 \rightarrow x = -4$ no vale.

Solución: $x = 3$

b) $\sqrt{6x + 10} = 35 - 3x \rightarrow 6x + 10 = 1225 + 9x^2 - 210x$

$$9x^2 - 216x + 1215 = 0 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0 \rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 15 \rightarrow \sqrt{6 \cdot 15 + 10} \neq 35 - 45 \rightarrow x = 15$ no vale.

$x = 9 \rightarrow \sqrt{54 + 10} = 37 - 27 \rightarrow x = 9$ es solución.

Solución: $x = 9$

c) $\sqrt{5x + 1} = x + 1 \rightarrow 5x + 1 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow x = 0$ es solución.

$x = 3 \rightarrow \sqrt{15 + 1} = 3 + 1 \rightarrow x = 3$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 3$

d) $(\sqrt{4x^2 + 7x - 2})^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 4x^2 + 7x - 2 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{4 + 7 - 2} = 1 + 2 \rightarrow x = 1$ es solución.

$x = -2 \rightarrow \sqrt{16 - 14 - 2} = -2 + 2 \rightarrow x = -2$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -2$

6 Resuelve estas ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x-1} = 64$ b) $4^{x^2-2} = \frac{1}{16}$ c) $3^{2x} = 54$ d) $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 200$

a) $2^{x-1} = 2^6 \rightarrow x-1 = 6 \rightarrow x = 7$

b) $4^{x^2-2} = 4^{-2} \rightarrow x^2 - 2 = -2 \rightarrow x = 0$

c) $\log 3^{2x} = \log 54 \rightarrow 2x = \frac{\log 54}{\log 3} = \frac{\log 54}{2 \log 3} \approx 1,82$

d) $3 \cdot 5^x + 5^x \cdot 5 = 200 \cdot 5^x \cdot 8 = 200 \rightarrow 5^x = \frac{200}{8} = 25 = 5^2 \rightarrow x = 2$

7 Resuelve aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_5 (2x - 3) = 1$ b) $\log_4 \left(\frac{x+1}{2} \right) = -2$

c) $\log_2 (\sqrt{x} - 1) = 3$ d) $\log (2^x - 15) = 0$

a) $\log_5 (2x - 3) = 1 \rightarrow 5^1 = 2x - 3 \rightarrow 5 + 3 = 2x \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

b) $\log_4 \left(\frac{x+1}{2} \right) = -2 \rightarrow 4^{-2} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{8x+8}{16} \rightarrow$

$\rightarrow 1 = 8x + 8 \rightarrow -7 = 8x \rightarrow x = -\frac{7}{8}$

Solución: $x = -\frac{7}{8}$

c) $\log_2 (\sqrt{x} - 1) = 3 \rightarrow 2^3 = \sqrt{x} - 1 \rightarrow 8 + 1 = \sqrt{x} \rightarrow 9^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x = 81$

Solución: $x = 81$

d) $\log (2^x - 15) = 0 \rightarrow 10^0 = 2^x - 15 \rightarrow 1 + 15 = 2^x \rightarrow 16 = 2^x \rightarrow 2^4 = 2^x \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

8 Resuelve estas ecuaciones:

a) $(2x + 1)(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$

b) $3x(2x^2 + 4) = 0$

c) $(x + 5)(2x^2 + 4x) = 0$

d) $x^2(x^2 + x - 2) = 0$

Igualamos a cero cada uno de los factores.

a) La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. $x = -\frac{1}{2}$, $x = 3$, $x = -3$; $x^2 + 1 = 0$

b) La ecuación $2x^2 + 4 = 0$ no tiene solución. Solución: $x = 0$.

c) Soluciones: $x = 0$, $x = -5$, $x = -2$, ya que $2x^2 + 4x = x(2x + 4)$.

d) Soluciones: $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$

9 Descompón en factores y resuelve.

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

a) $x(x^2 - 4) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

b) $x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0$; $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$

c)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = -2$

d)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -1$ (doble); $x_2 = 3$

Sistemas de ecuaciones

10 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} \frac{x+2}{5} - \frac{3y-1}{10} = \frac{-3}{10} \\ \frac{2x+3}{8} + \frac{y+7}{4} = \frac{19}{8} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+1}{8} + \frac{y}{4} = \frac{5}{8} \\ \frac{3x-1}{12} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 2(x+2) - 3y + 1 = -3 \\ 2x + 3 + 2y + 14 = 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} -2x + 3y = 8 \\ \underline{2x + 2y = 2} \\ 5y = 10 \end{array}$$

$y = 2 \rightarrow 2x - 6 = -8 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$

Solución: $x = -1$, $y = 2$

b)
$$\begin{cases} \frac{x+1}{8} + \frac{y}{4} = \frac{5}{8} \\ \frac{3x-1}{12} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{8} + \frac{2y}{8} = \frac{5}{8} \\ \frac{3x-1}{12} + \frac{6y}{12} = \frac{2}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 + 2y = 5 \\ 3x - 1 + 6y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Multiplicamos por -3 la primera ecuación y la sumamos con la segunda:

$$\begin{array}{r} -3x - 6y = -12 \\ 3x + 6y = 3 \\ \hline 0 = -9 \end{array}$$

El sistema no tiene solución.

11 Resuelve.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2y^2 - 8 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x = y - 3 \\ (y - 3)^2 + y^2 = 5 \rightarrow y^2 - 6y + 9 + y^2 - 5 = 0 \rightarrow 2y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - 3 = -2 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -2, y_1 = 1; x_2 = -1, y_2 = 2$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y + 2y = 2 \rightarrow y - y^2 + 2y = 2 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - 1 = 0 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0, y_1 = 1; x_2 = -1, y_2 = 2$

$$\text{c) } \begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \rightarrow 3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 + 12x = 0 \end{cases}$$

$$-6x^2 + 15x - 9 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Si $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3 - 4 = -1$

Si $x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 3 - 6 = -3$

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = -1; x_2 = 3, y_2 = -3$

$$\text{d) } \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x\left(x + \frac{3}{2}x\right) = 2\left(-\frac{3}{2}x\right)^2 - 8 \rightarrow \frac{5}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 8 \rightarrow -2x^2 = -8 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -\frac{3}{2}(-2) = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = -3; x_2 = -2, y_2 = 3$

Inecuaciones

12 Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 7 < 3$ b) $3 - x \leq 9$ c) $3 \leq 2x + 2$ d) $3 - 2x \geq x - 9$

a) $2x < 3 - 7 = -4 \rightarrow x < -\frac{4}{2} = -2$. Soluciones: $x < -2$. Intervalo: $(-\infty, -2)$

b) Soluciones: $x \geq -6$. Intervalo: $[-6, +\infty)$

c) Soluciones: $x \geq \frac{1}{2}$. Intervalo: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$. Soluciones: $x \leq 4$. Intervalo: $(-\infty, 4]$

13 Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 4 \leq 0$ b) $x^2 - 9 > 0$ c) $x^2 - 4x < 0$ d) $x^2 + 3x > 0$

a) $(x - 2)(x + 2) \leq 0$. Definimos los tramos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$

Soluciones: $[-2, 2]$

b) $(x - 3)(x + 3) > 0$. Definimos los tramos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, +\infty)$

Soluciones: $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$

c) $x(x - 4) < 0$. Definimos los tramos: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$

Soluciones: $(0, 4)$

d) $x(x + 3) > 0$. Definimos los tramos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(0, +\infty)$

Soluciones: $(-\infty, -3)$, $(0, +\infty)$

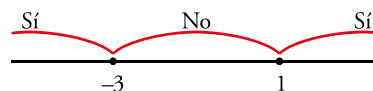
14 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$ b) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ c) $x^2 - 4x - 5 < 0$ d) $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$

Comprueba si $x = 0$, $x = 3$ o $x = -1$ es solución de alguna de las inecuaciones dadas.

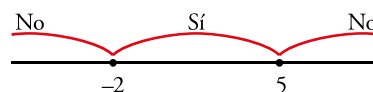
a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



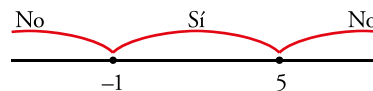
b) $x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$

Solución: $[-2, 5]$



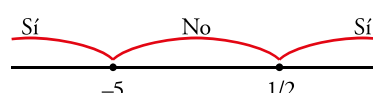
c) $x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

Solución: $(-1, 5)$



d) $2x^2 + 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -5 \end{cases}$

Solución: $(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$



Comprobamos si $x = 0$, $x = 3$ o $x = -1$ es solución de alguna de las inecuaciones, viendo si pertenecen a los intervalos solución.

$x = 0 \rightarrow$ Es solución de b) y c).

$x = 3 \rightarrow$ Es solución de todas ellas.

$x = -1 \rightarrow$ Es solución de b).

Entrénate y practica

15 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$

b) $\frac{3x+1}{4x+3} - \frac{1}{x} = 3$

c) $\frac{3x+4}{x+3} - \frac{1}{2} = \frac{x+19}{4x+6}$

d) $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{2-5x}{x^2+3x}$

e) $\frac{3x}{x^2-9} = 1 + \frac{x}{2(x-3)}$

f) $\frac{3x^2-2}{2x^2-x} = \frac{x+2}{x}$

a) $(x+1)x - 3x(x-1) = (2-x)(x-1)$

$$x^2 + x - 3x^2 + 3x = -x^2 + 3x - 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Se comprueba la validez de las dos soluciones.

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

b) $x(3x+1) - (4x+3) = 3x(4x+3)$

$$3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x \rightarrow 9x^2 + 12x + 3 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

c) $2(3x+4) - (x+3) = x+19$

$$6x + 8 - x - 3 = x + 19 \rightarrow 4x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Solución: $x = \frac{7}{2}$

d) $x - 2(x+3) = 2 - 5x$

$$x - 2x - 6 = 2 - 5x \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

Solución: $x = 2$

e) $\frac{3x}{(x+3)(x-3)} = 1 + \frac{x}{2(x-3)}$

$$\frac{3x \cdot 2}{2(x+3)(x-3)} = \frac{2(x+3)(x-3)}{2(x+3)(x-3)} + \frac{x(x+3)}{2(x+3)(x-3)}$$

$$6x = 2(x^2 - 9) + (x^2 + 3x)$$

$$6x = 2x^2 - 18 + x^2 + 3x$$

$$3x^2 + 3x - 6x - 18 = 0$$

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+216}}{6} = \frac{3 \pm 15}{6} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \text{ No es válida.}$$

Solución: $x = 2$

$$f) \frac{3x^2 - 2}{x(2x - 1)} = \frac{x + 2}{x}$$

$$3x^2 - 2 = (2x - 1)(x + 2)$$

$$3x^2 - 2 = 2x^2 + 4x - x - 2$$

$$3x^2 - 2x^2 - 3x - 2 + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{No es válida.} \\ x - 3 = 0 & \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Solución: $x = 3$

16 Despeja la incógnita y resuelve.

a) $x^3 - 64 = 0$

b) $\frac{625}{x} - x^3 = 0$

c) $\frac{3x}{4} + \frac{16}{9x^2} = 0$

d) $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$

a) $x^3 - 64 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

Solución: $x = 4$

b) $\frac{625}{x} - x^3 = 0 \rightarrow 625 - x^4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -5$

c) $\frac{3x}{4} + \frac{16}{9x^2} = 0 \rightarrow 27x^3 + 64 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}$

Solución: $x = -\frac{4}{3}$

d) $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0 \rightarrow 81x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = \frac{16}{81} \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm \frac{2}{3}$

Soluciones: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$

17 Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras:

a) $x - 17 = \sqrt{169 - x^2}$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{1 - x} = 0$

d) $2\sqrt{5 - 4x} + 4x = 5$

a) $x^2 - 34x + 289 = 169 - x^2$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 12 \rightarrow 12 - 17 = \sqrt{169 - 289} \rightarrow$ No vale.

$x = 5 \rightarrow 5 - 17 = \sqrt{169 - 144} \rightarrow$ No vale.

No tiene solución.

b) $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 - x} \rightarrow x^2 + 3 = 3 - x \rightarrow x^2 + x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow$ Es solución.

$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow$ Es solución.

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$

c) $\sqrt{5x - 7} = \sqrt{1 - x} \rightarrow 5x - 7 = 1 - x \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Comprobación:

$\sqrt{5 \cdot \frac{4}{3} - 7} \neq \sqrt{1 - \frac{4}{3}} \rightarrow$ No vale.

La ecuación no tiene solución.

d) $4(5 - 4x) = (5 - 4x)^2 \rightarrow 20 - 16x = 25 + 16x^2 - 40x$

$$16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{256}}{32} = \frac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} 5/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = \frac{5}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - \frac{5}{4} \cdot 4} + 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$ es solución.

$x = \frac{1}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - \frac{1}{4} \cdot 4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{1}{4}$ es solución.

Soluciones: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$

18 Resuelve.

a) $x + \sqrt{7 - 3x} = -1$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

d) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$

a) $\sqrt{7 - 3x} = -1 - x \rightarrow 7 - 3x = 1 + x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = -6 \rightarrow -6 + \sqrt{7 + 18} = -1$

$x = 1 \rightarrow 1 + \sqrt{7 - 3} = 3 \neq -1 \rightarrow$ No vale.

Solución: $x = -6$

b) $\sqrt{3x - 2} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow 3x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \rightarrow (4\sqrt{x})^2 = (6 - 2x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 16x = 36 + 4x^2 - 24x \rightarrow 4x^2 - 40x + 36 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 9 \rightarrow \sqrt{25} + \sqrt{9} \neq 2 \rightarrow$ No vale.

$x = 1 \rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{5x - 6} = 4 - 2\sqrt{x} \rightarrow 5x - 6 = 16 + 4x - 16\sqrt{x} \rightarrow (8\sqrt{2x})^2 = (22 - 3x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 128x = 484 + 9x^2 - 132x \rightarrow 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 242/9 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = \frac{242}{9} \rightarrow \sqrt{\frac{1156}{9}} + \sqrt{\frac{484}{9}} = \frac{34}{3} + \frac{22}{3} = \frac{56}{3} \neq 4 \rightarrow$ No vale.

$x = 2 \rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$

Solución: $x = 2$

d) $\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{x + 1} \rightarrow 5x + 1 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1} \rightarrow 4x - 4 = 4\sqrt{x + 1} \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{x + 1} = x - 1 \rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0 \neq 2 \rightarrow$ No vale.

$x = 3 \rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$

Solución: $x = 3$

19 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+1} = \sqrt{8}$

b) $\sqrt{3^x} = 17$

c) $10^{1-x^2} = 0,001$

d) $81\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2}$

a) $2^{x+1} = \sqrt{8} \rightarrow 2^{x+1} = 2^{3/2} \rightarrow x+1 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{3^x} = 17 \rightarrow 3^{x/2} = 17 \rightarrow \log 3^{x/2} = \log 17 \rightarrow \frac{x}{2} \cdot \log 3 = \log 17 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{\log 17}{\log 3} \cdot 2 \rightarrow x \approx 5,16$

Solución: $x \approx 5,16$

c) $10^{1-x^2} = 0,001 \rightarrow 10^{1-x^2} = 10^{-3} \rightarrow 1-x^2 = -3 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -2$

d) $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2} \rightarrow 81 \cdot (3^{-1})^x = 3^x \cdot 3^2 \rightarrow 81 \cdot (3^x)^{-1} = 9 \cdot 3^x \rightarrow \frac{81}{9} = (3^x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 9 = 3^{2x} \rightarrow 3^2 = 3^{2x} \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$

20 Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log_3 x^2 - \log_3 4 = 4$

b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2$

c) $\log_2 (x-3) + \log_2 x = 2$

d) $\log (x-9) - \log x = 1$

a) $\log_3 x^2 - \log_3 4 = 4 \rightarrow \log_3 \left(\frac{x^2}{4}\right) = 4 \rightarrow 3^4 = \frac{x^2}{4} \rightarrow 81 \cdot 4 = x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{81 \cdot 4} \rightarrow x = \pm 18$

Soluciones: $x = -18, x = 18$

b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2 \rightarrow \log_2 \left(\frac{x}{3}\right) = 2 \rightarrow 2^2 = \frac{x}{3} \rightarrow 4 \cdot 3 = x \rightarrow x = 12$

Solución: $x = 12$

c) $\log_2 (x-3) + \log_2 x = 2 \rightarrow \log_2 [(x-3) \cdot x] = 2 \rightarrow (x-3) \cdot x = 2^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$. No vale.

Solución: $x = 4$

d) $\log (x-9) - \log x = 1 \rightarrow \log \left(\frac{x-9}{x}\right) = 1 \rightarrow 10^1 = \frac{x-9}{x} \rightarrow 10x = x-9 \rightarrow$

$\rightarrow 10x - x = -9 \rightarrow 9x = -9 \rightarrow x = \frac{-9}{9} = -1$. No vale.

No tiene solución.

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

b) $4^x - 8 = 2^{x+1}$

c) $2^{3-x} = 5 - 2^{x-1}$

d) $3 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x - 30 = 0$

e) $9x = 27 + 26 \cdot 3x$

f) $5x - 5x - 2 = 120\sqrt{5}$

a) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320 \rightarrow 4^x \cdot 4 + 2^x \cdot 2^3 = 320$

Sea $t = 2^x$:

$$4t^2 + 8t - 320 = 0 \rightarrow t^2 + 2t - 80 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2} \begin{cases} \frac{-2 + 18}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{-2 - 18}{2} = -\frac{20}{2} = -10 \end{cases}$$

Si $t = 8 \rightarrow x = 3$

Si $t = -10 \rightarrow$ No hay solución

Solución: $x = 3$

b) $4^x - 8 = 2^{x+1} \rightarrow (2^x)^2 - 8 = 2 \cdot 2^x$

Sea $t = 2^x$:

$$t^2 - 8 = 2t \rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Si $t = 4 \rightarrow x = 2$

Si $t = -2 \rightarrow$ No hay solución

Solución: $x = 2$

c) $2^{3-x} = 5 - 2^{x-1} \rightarrow \frac{2^3}{2^x} = 5 - \frac{2^x}{2} \rightarrow \frac{8}{2^x} = \frac{10 - 2^x}{2}$

Sea $t = 2^x$:

$$\frac{8}{t} = \frac{10 - t}{2} \rightarrow 2 \cdot 8 = t(10 - t) \rightarrow 16 = 10t - t^2 \rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

Si $t = 8 \rightarrow x = 3$

Si $t = 2 \rightarrow x = 1$

Soluciones: $x = 1, x = 3$

d) $3 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x - 30 = 0$

Sea $t = 2^x$:

$$3t^2 + 9t - 30 = 0 \rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Si $t = 2 \rightarrow x = 1$

Si $t = -5 \rightarrow$ No hay solución.

Solución: $x = 1$

e) $3^{2x} = 27 + 26 \cdot 3^x$

Si $t = 3^x$: $t^2 = 27 + 26t \rightarrow t^2 - 26t - 27 = 0$

$$t = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 + 4 \cdot 27}}{2} = 13 + 14 = 27$$

(descartamos la raíz con signo negativo porque saldría un valor de t negativo)

$$27 = 3^x \rightarrow x = 3$$

f) $5^x - \frac{5^x}{25} = 120\sqrt{5} \rightarrow 25 \cdot 5^x - 5^x = 3000\sqrt{5} \rightarrow 24 \cdot 5^x = 3000\sqrt{5}$

$$5^x = \frac{3000\sqrt{5}}{24} = 125\sqrt{5} \rightarrow 5^x = 5^{3+1/2} = 5^{7/2} \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

22 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $\log(x-2) + \log(x-3) = 1 - \log 5$ b) $\frac{1}{2} \log(3x+5) + \frac{1}{2} \log x = 1$

c) $2\log x - 3\log 2 = \log(x+6)$ d) $\log_3(x-9) - \log_3 x = 1$

a) $\log(x-2) + \log(x-3) = 1 - \log 5 \rightarrow \log(x-2) + \log(x-3) + \log 5 = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \log[(x-2) \cdot (x-3) \cdot 5] = 1 \rightarrow 10^1 = 5 \cdot (x-2)(x-3) \rightarrow 10 = 5x^2 - 25x + 30 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5x^2 - 25x + 20 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1, \text{ no vale} \end{cases}$$

Comprobación: $\log(4-2) + \log(4-3) = 1 - \log 5 \rightarrow x = 4$ es válida

Solución: $x = 4$

b) $\frac{1}{2} \cdot \log(3x+5) + \frac{1}{2} \cdot \log x = 1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot [\log(3x+5) + \log x] = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \log[(3x+5) \cdot x] = 2 \rightarrow 10^2 = (3x+5) \cdot x \rightarrow 100 = 3x^2 + 5x \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 + 5x - 100 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+1200}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{6} = \begin{cases} 5 \\ -20/3, \text{ no vale} \end{cases}$$

Comprobación: $\frac{1}{2} \cdot \log(15+5) + \frac{1}{2} \cdot \log 5 = 1 \rightarrow x = 5$ es válida

Solución: $x = 5$

c) $2\log x - 3\log 2 = \log(x+6) \rightarrow \log(x^2) - \log(2^3) = \log(x+6) \rightarrow$

$$\rightarrow \log\left(\frac{x^2}{8}\right) = \log(x+6) \rightarrow \frac{x^2}{8} = x+6 \rightarrow x^2 = 8x+48 \rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4, \text{ no vale} \end{cases}$$

Comprobación: $2\log 12 - 3\log 2 = \log(12+6) \rightarrow x = 12$ es válida.

Solución: $x = 12$

d) $\log_3(x-9) - \log_3 x = 1 \rightarrow \log_3\left(\frac{x-9}{x}\right) = 1 \rightarrow 3 = \frac{x-9}{x} \rightarrow 3x = x-9 \rightarrow 2x = -9$

$x = -\frac{9}{2}$ no es una solución válida; por tanto, la ecuación no tiene solución.

23 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x^2 - 3x)(2^{x+1} - 1) = 0$

b) $(x + 5) \log_2 (x - 3) = 0$

c) $(x^4 - 5x^2 + 4)(5^x - 10) = 0$

d) $(x^2 + 5)(\sqrt{x} - 3) = 0$

a) $(x^2 - 3x)(2^{x+1} - 1) = 0$

• $x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

• $2^{x+1} - 1 = 0 \rightarrow 2^{x+1} = 1 \rightarrow 2^{x+1} = 2^0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$

b) $(x + 5) \log_2 (x - 3) = 0$

• $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$, no vale

• $\log_2 (x - 3) = 0 \rightarrow 2^0 = x - 3 \rightarrow 1 + 3 = x \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

c) $(x^4 - 5x^2 + 4)(5^x - 10) = 0$

• $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Hacemos $x^2 = t \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Si $t = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $t = 1 \rightarrow x = \pm 1$

• $5^x - 10 = 0 \rightarrow 5^x = 10 \rightarrow \log 5^x = \log 10 \rightarrow x \cdot \log 5 = \log 10 \rightarrow x = \frac{1}{\log 5} = 1,43$

Soluciones: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$; $x_5 = 1,43$

d) $(x^2 + 5)(\sqrt{x} - 3) = 0$

• $x^2 + 5 = 0 \rightarrow x^2 = -5$ no tiene solución

• $\sqrt{x} - 3 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$

Solución: $x = 9$

24 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2}{\quad} = 72 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$$

$$\text{Si } x = 6 \rightarrow 36 + y^2 = 52 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$\text{Si } x = -6 \rightarrow 36 + y^2 = 52 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 6, y_1 = 4; x_2 = 6, y_2 = -4; x_3 = -6, y_3 = 4; x_4 = -6, y_4 = -4$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{4x^2}{\quad} = 36 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Si } x = 3 \rightarrow 27 + 2y^2 = 35 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{Si } x = -3 \rightarrow 27 + 2y^2 = 35 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 3, y_1 = 2; x_2 = 3, y_2 = -2; x_3 = -3, y_3 = 2; x_4 = -3, y_4 = -2$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2}{\quad} + 2x = 60 \rightarrow x^2 + x = 30 \rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} -6 \\ 5 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } x = -6 \rightarrow 36 + y^2 - 6 + y = 32 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } x = 5 \rightarrow 25 + y^2 + 5 + y = 32 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \rightarrow y = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = -6, y_1 = -2; x_2 = -6, y_2 = 1; x_3 = 5, y_3 = -2; x_4 = 5, y_4 = 1$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2}{\quad} + 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow 1 + 2y^2 - 1 + 1 = 0 \rightarrow 2y^2 = -1 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

25 Resuelve y comprueba las soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2 - x \\ 3y + 3x = -2xy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 3(2 - x) + 3x = -2x(2 - x) \end{cases}$$

$$6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow y_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -1, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = -1$

$$\text{b) } \begin{cases} 20y + 20x = xy \\ x = 3 - 2y \end{cases} \rightarrow 20y + 20(3 - 2y) = (3 - 2y)y$$

$$20y + 60 - 40y = 3y - 2y^2 \rightarrow 2y^2 - 23y + 60 = 0 \rightarrow y = \frac{23 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 15/2 \end{cases}$$

Si $y = 4 \rightarrow x = 3 - 8 = -5$

Si $y = \frac{15}{2} \rightarrow x = 3 - 2 \cdot \frac{15}{2} = -12$

Soluciones: $x_1 = -5, y_1 = 4; x_2 = -12, y_2 = \frac{15}{2}$

$$\text{c) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \rightarrow \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \rightarrow \sqrt{(y-1)^2} + y = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 9 - 6 + 1 = 4$$

Solución: $x = 4, y = 3$

$$\text{d) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{2x-1}{3}$$

$$2\sqrt{x+1} = \frac{2x-1}{3} + 1 \rightarrow 2\sqrt{x+1} = \frac{2x-1+3}{3} \rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = \left(\frac{2x+2}{3}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1) = \frac{4x^2+8x+4}{9} \rightarrow 36x+36 = 4x^2+8x+4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 - 28x - 32 = 0 \rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Si $x = -1 \rightarrow y = -1$

Si $x = 8 \rightarrow y = \frac{16-1}{3} = 5$

Soluciones: $x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 8, y_2 = 5$

26 Resuelve.

$$\text{a) } \begin{cases} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} xy = 12 \\ x^2 - 5y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = \frac{15}{x} \\ x^2 + \left(\frac{15}{x}\right)^2 = 34 \rightarrow x^4 + 225 = 34x^2 \end{cases}$$

Hacemos el cambio $x^2 = z \rightarrow z^2 - 34z + 225 = 0 \rightarrow z = \frac{34 \pm 16}{2} = \begin{cases} 25 \\ 9 \end{cases}$

Si $z = 25 \begin{cases} x = 5 \rightarrow y = 3 \\ x = -5 \rightarrow y = -3 \end{cases}$

Si $z = 9 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 5 \\ x = -3 \rightarrow y = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3; x_3 = 3, y_3 = 5; x_4 = -3, y_4 = -5$

$$\text{b) } \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ x^2 - 5\left(\frac{12}{x}\right)^2 = 16 \rightarrow x^2 - \frac{720}{x^2} = 16 \rightarrow x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \end{cases}$$

Cambio $x^2 = z \rightarrow z^2 - 16z - 720 = 0 \rightarrow z = \frac{16 \pm 56}{2} = \begin{cases} 36 \\ -20 \text{ (no vale)} \end{cases}$

Si $z = 36 \begin{cases} x = 6 \rightarrow y = 2 \\ x = -6 \rightarrow y = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 6, y_1 = 2; x_2 = -6, y_2 = -2$

$$\text{c) } \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ \left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = 25 \rightarrow \left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)^2 = 25 \rightarrow x^4 + 8x^2 + 16 = 25x^2 \rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

Hacemos el cambio $x^2 = z$:

$$z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} 16 \\ 1 \end{cases}$$

Si $z = 16 \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = 1 \\ x = -4 \rightarrow y = -1 \end{cases}$

Si $z = 1 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 4 \\ x = -1 \rightarrow y = -4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4, y_1 = 1; x_2 = -4, y_2 = -1; x_3 = 1, y_3 = 4; x_4 = -1, y_4 = -4$

$$d) \begin{cases} x^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{82}{9} \rightarrow x^4 + 1 - \frac{82}{9}x^2 = 0 \rightarrow 9x^4 - 82x^2 + 9 = 0 \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Cambio } x^2 = z \rightarrow 9z^2 - 82z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} = \begin{cases} 9 \\ 1/9 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 9 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = -1/3 \\ x = -3 \rightarrow y = 1/3 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = \frac{1}{9} \begin{cases} x = 1/3 \rightarrow y = -3 \\ x = -1/3 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 3, y_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = -3, y_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{1}{3}, y_3 = -3; x_4 = -\frac{1}{3}, y_4 = 3$$

27 Resuelve.

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x - 2^y = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2^{x+1} - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases} \quad d) \begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y \\ 2^x - 2^y = 4 \end{cases}$$

$$2^{1+y} - 2^y = 4 \rightarrow 2 \cdot 2^y - 2^y = 4 \rightarrow 2^y = 4 \rightarrow 2^y = 2^2 \rightarrow y = 2$$

$$\text{Si } y = 2 \rightarrow x = 1 + 2 = 3$$

$$\text{Solución: } x = 3, y = 2$$

$$b) \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x - y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x = 9 + y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow (9 + y)y = 10 \rightarrow 9y + y^2 = 10 \rightarrow y^2 + 9y - 10 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} \begin{cases} y = 1 \\ y = -10, \text{ no vale} \end{cases}$$

$$\text{Si } y = 1 \rightarrow x = 9 + 1 = 10$$

$$\text{Solución: } x = 10, y = 1$$

$$c) \begin{cases} 2^{x+1} - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^x - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases}$$

$$\frac{3 \cdot 2^x}{3 \cdot 2^x} = 12 \rightarrow 2^x = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow 2^{2+1} - y = 0 \rightarrow y = 2^3 = 8$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = 8$$

$$d) \begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10^1 = \frac{x}{y} \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 10y \rightarrow 10y + y = 22 \rightarrow 11y = 22 \rightarrow y = 2$$

$$x = 10 \cdot 2 = 20$$

$$\text{Solución: } x = 20, y = 2$$

28 Resuelve.

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

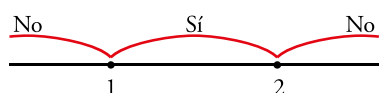
b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x$

d) $x^2 < \frac{x+7}{6}$

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

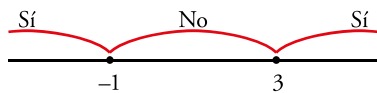
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$



Solución: $[1, 2]$

b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

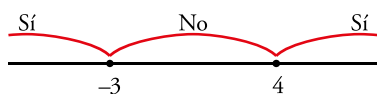
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$



Solución: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x \rightarrow x^2 - x - 12 > 0$

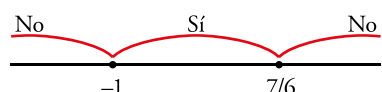
$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

d) $x^2 < \frac{x+7}{6} \rightarrow 6x^2 < x+7 \rightarrow 6x^2 - x - 7 < 0$

$$6x^2 - x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{12} = \frac{1 \pm 13}{12} = \begin{matrix} 7/6 \\ -1 \end{matrix}$$



Solución: $\left(-1, \frac{7}{6}\right)$

29 Algunas inecuaciones no tienen solución y otras tienen por solución cualquier número.

Busca entre las siguientes las que son de estos tipos:

a) $x^2 + 4 \geq 3$

b) $x^2 + x + 2 \leq 0$

c) $x^2 + 7 \leq 5x$

d) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$

a) $x^2 + 4 \geq 3 \rightarrow x^2 \geq -1$

Solución: $(-\infty, +\infty)$

b) $x^2 + x + 2 \leq 0$

No tiene solución.

c) $x^2 + 7 \leq 5x \rightarrow x^2 - 5x + 7 \leq 0$

No tiene solución.

d) $x^2 + 4x + 4 \geq 0 \rightarrow (x+2)^2 \geq 0$

Solución: $(-\infty, +\infty)$

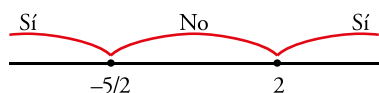
30 Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x > 0$

b) $\frac{x^2 - 9}{5} - \frac{x^2 - 4}{15} < \frac{1 - 2x}{3}$

a) $2x^2 + 6x - 6x - 10 + x > 0 \rightarrow 2x^2 + x - 10 > 0$

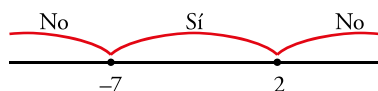
$$2x^2 + x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} = \begin{cases} 2 \\ -5/2 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (2, +\infty)$

b) $3x^2 - 27 - x^2 + 4 < 5 - 10x \rightarrow 2x^2 + 10x - 28 < 0 \rightarrow x^2 + 5x - 14 < 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{cases} -7 \\ 2 \end{cases}$$



Solución: $(-7, 2)$

31 Comprueba que estos dos sistemas de inecuaciones no tienen solución:

a) $\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \\ -3x + 5 < 2x \end{cases}$

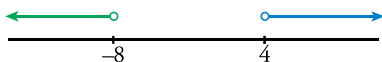
b) $\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \\ \frac{x + 3}{7} < x - 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \rightarrow 9x < 9 \rightarrow x < 1 \\ -3x + 5 < 2x \rightarrow 5 < 5x \rightarrow x > 1 \end{cases}$



No tiene solución.

b) $\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \rightarrow x < -8 \\ x + 3 < 7x - 21 \rightarrow 24 < 6x \rightarrow x > 4 \end{cases}$



No tiene solución.

32 Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - 3 \leq x + 1 \\ 2x + 6 \geq x + 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2x+5}{3} < x-1 \\ \frac{x}{3} - 1 < \frac{2x-1}{5} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x+13}{6} < \frac{39-2x}{18} \\ \frac{3x-5}{4} < -1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2 - x > 0 \rightarrow -x > -2 \rightarrow x < 2 \\ 2 + x > 0 \rightarrow x > -2 \end{cases}$$



Solución: $(-2, 2)$

$$b) \begin{cases} 5x - 3 \leq x + 1 \rightarrow 4x \leq 4 \rightarrow x \leq 1 \\ 2x + 6 \geq x + 2 \rightarrow x \geq -4 \end{cases}$$



Solución: $[-4, 1]$

$$c) \begin{cases} \frac{2x+5}{3} < x-1 \rightarrow 2x+5 < 3x-3 \rightarrow -x < -8 \rightarrow x > 8 \\ \frac{x}{3} - 1 < \frac{2x-1}{5} \rightarrow 5x-15 < 6x-3 \rightarrow -x < 12 \rightarrow x > -12 \end{cases}$$



Solución: $(8, +\infty)$

$$d) \begin{cases} 3x + 39 < 39 - 2x \rightarrow 5x < 0 \rightarrow x < 0 \\ 3x - 5 < -4 \rightarrow 3x < 1 \rightarrow x < 1/3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, 0)$

33 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$a) \begin{cases} \frac{x+2}{4} < \frac{x}{2} - 3 \\ \frac{8-x}{3} < \frac{1+x}{2} - 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6} \\ \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4} \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + 2 < 2x - 12 \rightarrow 14 < x \rightarrow x > 14 \\ 16 - 2x < 3 + 3x - 6 \rightarrow 19 < 5x \rightarrow x > 19/5 \end{cases}$$



Solución: $(14, +\infty)$

$$b) \begin{cases} 3x - 3 + 4x + 4 > 3x - 7 \rightarrow 4x > -8 \rightarrow x > -2 \\ 2x - 1 + 8x < 2x - 9 \rightarrow 8x < -8 \rightarrow x < -1 \end{cases}$$



Solución: $(-2, -1)$