MAT.APL. ÁS CCSS 2023/2024	2º BAC	SOLUCIÓN EXAME 1 / 1º AV 17/10/2024	UNIDADE 1: MATRICES E DETERMINANTES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) *(1 pto)* **Despeja X de la ecuación matricial** $X + B^t = 2C - X\cdot A$

a) $X + B^t = 2C - XA \Rightarrow X + XA = 2C - B^t$

$X\,(I + A) = 2C - B^t \Rightarrow \boxed{X = \left(2C - B^t\right)(I + A)^{-1}}$

b) *(2 ptos)* **Resuelve la ecuación matricial anterior.**

$2C - B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad I + A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(I + A)^{-1}\,?$

$\longrightarrow$ Por el método de Gauss_Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2+F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1+2F_2 \\ -F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\longrightarrow$ Usando determinantes $\qquad Ad_j\,(I + A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(I + A)^{-1} = \frac{1}{|I + A|} \cdot \left(Adj\,(I + A)\right)^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) *(1 pto)* Sabiendo que A·B·C es una matriz de dimensión 3 x 2 y que A·C es cuadrada, calcula las dimensiones de **A, B y C**. **A** 3x2, **B** 2x3 y **C** 3x2

b) *(1,5 ptos)* Calcula $(A \cdot A^t)^{25}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^t)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$(A.A^t)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}($$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \boxed{(A \cdot A^t)^{25} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{25} \end{pmatrix}}$$

c) *(1, 25 ptos)* **Sea la matriz D =** $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **. Calcula el valor de a, sabiendo que D· D^t es una matriz diagonal.**

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix}$$

Si es igual a una matriz diagonal, se cumple:

$$\begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow 2a-12=0 \Rightarrow a=6.$$

La matriz inicial debe ser: $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(1,25 ptos)* **Calcula el rango de la matriz C = B· A – A^t·B^t**

$$\text{a)}\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de C es 2, ya que la fila 2 es opuesta de la fila 3 , y fila 1 y fila 2 son linealmente independientes.

b) *(2 ptos)* **¿Qué dimensión tiene la matriz X que verifica que A·B·X =** $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **?.Calcúlala , si es posible**

b) Para que pueda hacerse la multiplicación ABX, la matriz X debe ser de dimensión 2×1.

Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6a+3b \\ -3a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6a+3b=4 \\ -3a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow a=-2/3,\ b=0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$