Doc. 5.1. Proporcionalidad y porcentajes

5.1. Razón y proporción

5.1.1. Razón

Una **razón** es el cociente de dos cantidades comparables entre sí. Es decir, una razón es la división entre dos números, o su fracción irreducible.

Los términos de una razón se llaman **antecedente** y **consecuente**.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{antecedente}{consecuente}}$$

El antecedente es el dividendo o numerador, y el consecuente es el divisor o denominador.

Ejemplo: Tenemos dos sacos de café; el de mejor calidad pesa 2,5 kg y el de peor calidad pesa 12,5 kg. Si expresamos mediante una razón la relación que existe entre el café de peor calidad y el otro obtenemos:

$$\boxed{\frac{12{,}5}{2{,}5} = 5}$$

Lo que quiere decir que tenemos 5 veces más café del de peor calidad.

5.1.2. Proporción

Una proporción es una igualdad de dos razones.

Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y se lee "**a** es a **b** como **c** es a **d**"

Los términos de una proporción reciben los siguientes nombres:

$$\boxed{\begin{cases} a, c & antecedentes \\ b, d & consecuentes \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} a, d & extremos \\ b, c & medios \end{cases}}$$

En toda proporción, **el producto de medios es igual al producto de extremos**:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

5.1.2.1. Cálculo del término de una proporción

Para calcular el término desconocido de una proporción, conociendo los otros tres, se aplica la propiedad anterior. A este término desconocido se le llama **cuarto proporcional**.

Por ejemplo: calcular el término desconocido:

$$\frac{8}{2} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 8 \cdot x = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 12}{8} \Leftrightarrow x = 3$$

Una <u>**proporción**</u> es <u>**continua**</u> si <u>**tiene los dos medios iguales.**</u>

Para calcular el **medio proporcional** de una proporción continua se calcula la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Por ejemplo: calcular el término desconocido:

$$\frac{2}{x}=\frac{x}{18} \Leftrightarrow x^2 = 2\cdot 18 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{36} \Leftrightarrow x = \pm 6$$

En una proporción continua, se denomina **tercero proporcional** a cada uno de los términos desiguales.

5.2. Proporcionalidad directa e inversa

5.2.1 Magnitudes directamente proporcionales

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

La **constante de proporcionalidad directa** es el valor que se obtiene al dividir cualquier valor de la segunda magnitud entre el correspondiente de la primera.

5.2.2. Regla de tres simple directa

La **regla de tres** simple **directa** es un procedimiento para encontrar una proporción en la que se conocen tres cantidades de dos magnitudes. Es decir, es un procedimiento para encontrar el cuarto proporcional.

El procedimiento para resolver una regla de tres es el siguiente:

a) Se ordenan los datos y la incógnita
b) Se construye la proporción con los términos en el orden en el que aparecen
c) Se calcula el término desconocido en la proporción

Ejemplo: Un pintor mezcla pintura blanca y roja en la proporción de 3 a 5 para obtener el color que él quiere. Si tiene 30 litros de pintura roja, ¿cuántos litros de pintura blanca tiene que añadir?

Se colocan los datos y se determina si la proporcionalidad es directa pintura blanca $\longrightarrow$ pintura roja 3 5 x 30	Se forma la proporción y se calcula el cuarto proporcional: $\frac{3}{x}=\frac{5}{30} \Rightarrow x = \frac{3\cdot 30}{5} \Rightarrow x = 18$ Tiene que añadir 18 litros de pintura blanca.

5.2.3. Magnitudes inversamente proporcionales

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** si un aumento o una disminución en una de las magnitudes determinan una disminución o un aumento proporcional en la otra.

El producto de las cantidades de una magnitud por las correspondientes de la otra es siempre el mismo número, es una constante, conocida como **constante de proporcionalidad inversa**

5.2.4. Regla de tres simple inversa

La **regla de tres** simple **inversa** es el procedimiento para calcular una cantidad que forma proporción con otras tres cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo: Un coche, a una velocidad constante de 60 km/h, tarda 8 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto tardaría en recorrer la misma distancia si la velocidad fuese de 120 km/h?

Se colocan los datos y se determina si la proporcionalidad es inversa	Se forma la proporción en la que la razón de las cantidades de la magnitud conocida aparece invertida
velocidad (km/h) ⟶ horas 60 — 8 120 — x	$\frac{120}{60}=\frac{8}{x}\Rightarrow x=\frac{60\cdot 8}{120}\Rightarrow x=4$ Tardaría /h.

5.3. Proporcionalidad compuesta

Una **proporcionalidad es compuesta si intervienen más de dos magnitudes proporcionales.**

Para resolver problemas de regla de tres compuesta se identifican las magnitudes que intervienen, se colocan los datos y la incógnita, y se determina la relación de proporcionalidad entre cada magnitud y la de la incógnita.

Ejemplo: Si 8 jornaleros limpian en 9 días trabajando a razón de 6 horas por día una finca de 900 m^2 ¿Cuántos días necesitarán 10 jornaleros trabajando 8 horas diarias para limpiar una finca de 500 m^2 ?

I	I	D	
8 jornaleros	6 horas	900 m^2 ⟶	9 días
10 jornaleros	8 horas	500 m^2	x días

$$\frac{10}{8}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{900}{500}=\frac{9}{x}\Rightarrow\frac{10\cdot 8\cdot 900}{8\cdot 6\cdot 500}=\frac{9}{x}\Rightarrow$$
$$\frac{72000}{24000}=\frac{9}{x}\Rightarrow x=\frac{24000\cdot 9}{72000}=3\ \text{días}$$

5.4. Problemas de repartos proporcionales

Los repartos proporcionales se pueden hacer de dos maneras:

5.4.1. Repartos directamente proporcionales

Para repartir una cantidad, C, en partes proporcionales a m, n y k:

1) Se divide la cantidad a repartir, C, entre la suma S=m+k+n. Así calculamos la parte, p, que corresponde a una unidad.
2) Se multiplica cada número m. n y k por el cociente obtenido, p.

Ejemplo 1: Un abuelo reparte 450 € entre tres nietos de 16, 12 y 8 años de edad, directamente proporcional a sus edades ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

$$\frac{\text{€ totales}}{\text{suma edades}} = \frac{\text{€ 1° nieto}}{\text{16 años}} = \frac{\text{€ 2° nieto}}{\text{12 años}} = \frac{\text{€ 3° nieto}}{\text{8 años}} \Rightarrow \frac{450}{16+12+8} = \frac{x}{16} = \frac{y}{12} = \frac{z}{8}$$

$\frac{450}{16+12+8} = \frac{x}{16} \Rightarrow$ $x = \frac{450 \cdot 16}{36} = 200$ €	$\frac{450}{16+12+8} = \frac{x}{12} \Rightarrow$ $x = \frac{450 \cdot 12}{36} = 150$ €	$\frac{450}{16+12+8} = \frac{x}{8} \Rightarrow$ $x = \frac{450 \cdot 8}{36} = 100$ €

5.4.2 Repartos inversamente proporcionales

Para repartir una cantidad, C, en partes inversamente proporcionales a m, n, y k, se reparte en partes directamente proporcionales a los inversos, 1/m, 1/n y 1/k.

Ejemplo 1: Los dos camareros de un bar se reparten un bote con 136 € de propina de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado, que ha sido respectivamente 3 y 5 días ¿Cuánto corresponde a cada uno?

$$\frac{\text{€ totales}}{\frac{1}{\text{días 1° camarero}} + \frac{1}{\text{días 2° camarero}}} = \frac{x}{\frac{1}{\text{días 1° camarero}}} + \frac{y}{\frac{1}{\text{días 2° camarero}}}$$

$\frac{136}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{136}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{136 \cdot 15}{8} = \frac{3 \cdot x}{1} \Rightarrow$ $x = \frac{136 \cdot 15}{8 \cdot 3} \Rightarrow x = 85€$	$\frac{136}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{136}{\frac{8}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{136 \cdot 15}{8} = \frac{5 \cdot y}{1} \Rightarrow$ $y = \frac{136 \cdot 15}{8 \cdot 5} \Rightarrow y = 51€$

5.5. Porcentajes

Matemáticamente un porcentaje se puede pensar como una proporción, como una razón cuyo consecuente es 100 o como un número decimal.

Para calcular un determinado tanto por ciento, r%, de una cantidad, C, se multiplica el tanto por ciento por la cantidad y el resultado se divide entre 100.	$r\%\ de\ C = \frac{r \cdot C}{100}$

Ejemplo 1: En un grupo de 250 jóvenes, hay un 30% que superan los 1,80 m de altura. ¿Cuántos son?

TOTAL		PARTE (30 %)
100	⟶	30
250	⟶	x

$$\frac{100}{250} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75 \rightarrow$$ En un grupo de 250 jóvenes, hay 75 que superan la altura de 1,80 m.

Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad.	$a\% \text{ de } C = \frac{a}{100} \text{ de } C = \frac{C \cdot a}{100}$

$$\frac{30}{100} \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

$$30\,\% \rightarrow \frac{30}{100} \rightarrow 30 : 100 \rightarrow 0{,}30 \qquad 30\,\% \text{ de } 250 = 250 \cdot 0{,}30 = 75$$

5. 5.1 Porcentajes sencillos

Hay que tener en cuenta que:

- El 50% es la mitad. Por tanto, para calcularlo se divide entre 2.
- El 25% es la cuarta parte. Por tanto, para calcularlo, se divide entre 4
- El 20% es la quinta parte. Por tanto, se divide entre 5.

5. 5.2. Problemas porcentajes

Cálculo del total, conocidos el tanto por ciento y la parte

Una empresa de limpieza tiene 63 empleados en el turno de noche, lo que supone el 35 % de la plantilla. ¿Cuántos empleados componen el total de la plantilla?

TOTAL		PARTE
100	$\longrightarrow$	35
x	$\longrightarrow$	63

$$\frac{100}{x} = \frac{35}{63} \rightarrow x = \frac{63 \cdot 100}{35} = 180$$

Solución: La empresa tiene en total 180 trabajadores.

Teniendo en cuenta que la expresión decimal asociada al 35 % es $\frac{35}{100} = 0{,}35$, también podríamos haber resuelto el problema así:

El 35 % de una cantidad desconocida, x, es 63. Calculemos x:

$$35\,\% \text{ de } x = 63 \rightarrow 0{,}35 \cdot x = 63 \rightarrow x = 63 : 0{,}35 = 180$$

Calculo del tanto por ciento, conocidos el total y la parte

De los 180 empleados que tiene una empresa de limpieza, 63 trabajan en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja de noche?

TOTAL		PARTE
180	$\longrightarrow$	63
100	$\longrightarrow$	x

$$\frac{180}{100} = \frac{63}{x} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 63}{180} = 35$$

De cada 100 empleados, 35 trabajan de noche; es decir, el 35 %.

Solución: El 35 % de la plantilla está en el turno de noche.

5. 5.3. Aumentos porcentuales

El **aumento porcentual** de una cantidad inicial es lo que aumenta esa cantidad según un porcentaje r%. Para calcular los aumentos porcentuales aplicamos la siguiente fórmula:

Cantidad final = Cantidad inicial · (1 + r/100)	índice de variación = 1 + r/100

Ejemplo 1: Se vende un artículo con una ganancia del 15% sobre el precio de coste. Sabiendo que se ha comprado por 80 €, calcule el precio de venta.

DATOS
Cantidad inicial = 80 €
r% = 15%
Cantidad final = *C*

$$C = 80 \cdot (1 + \frac{15}{100}) \Rightarrow C = 80 \cdot (1 + 0{,}15) \Rightarrow C = 80 \cdot 1{,}15 \Rightarrow C = 92€$$

5. 5.4. Disminuciones porcentuales

Es decir, la **disminución porcentual** de una cantidad inicial es lo que disminuye esa cantidad según un porcentaje r%. Para calcular las disminuciones porcentuales aplicamos la siguiente fórmula:

Cantidad final = Cantidad inicial · (1 – r/100)	índice de variación = 1 – r/100

Ejemplo 1: La etiqueta de un abrigo marca 60€. Si nos hacen una rebaja del 30% ¿Cuánto nos cuesta el abrigo?
DATOS
Cantidad inicial = 60 €
r% = 30%
Cantidad final = C

$$C = 60 \cdot (1 - \frac{30}{100}) \Rightarrow C = 60 \cdot (1 - 0{,}3) \Rightarrow C = 60 \cdot 0{,}7 \Rightarrow C = 42€$$

5.6. Interés bancario

Se llama **interés** al beneficio que produce el dinero prestado. Ese dinero es directamente proporcional a la cantidad prestada y el tiempo que dura el préstamo.

Tenemos una cantidad de dinero (15000 €) depositada en un banco a unos intereses, rédito, del 5% anual. Esto significa que, pasado un año, el banco nos da de intereses:

$15000€ \cdot \frac{5}{100} = 750€$; en 4 años nos daría $750€ \cdot 4 = 3000€$; y en un mes $\frac{750€}{12} = 62{,}50€$

También podemos hacer el problema como una proporcionalidad compuesta.

Un capital, C, colocado al r% anual durante t años produce un beneficio I.

P. DIRECTA
P. DIRECTA

CAPITAL		TIEMPO		INTERÉS
100	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	r
C	$\longrightarrow$	t	$\longrightarrow$	I

$$\rightarrow \frac{100}{C} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{I} \rightarrow I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$