Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 10

Sucesos Aleatorios. Probabilidad.

TEMA 10: Sucesos Aleatorios. Probabilidad.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iníciales en las que se produce la experiencia sean las mismas. Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz.. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

En el lenguaje habitual, frases como "probablemente...", "es poco probable que...", "hay muchas posibilidades de que..." hacen referencia a esta incertidumbre. La teoría de la probabilidad pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo; Por otra parte, cuando aplicamos las técnicas estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas. Debido al importante papel desempeñado por la probabilidad dentro de la estadística, es necesario familiarizarse con sus elementos básicos, lo que constituye el objetivo del presente tema.

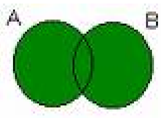
Se introduce el sentido de la probabilidad en términos de experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos, etc. , llegando a la formalización axiomática de la probabilidad y sus principales propiedades, junto con la expresión de la probabilidad condicionada , la independencia de sucesos, probabilidad total y Teorema de Bayes.

2. TEORÍA

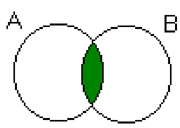
$\boxed{\text{Experimentos}}\begin{cases}\underline{\text{Determinista}}\text{: aquel del que se puede predecir el resultado}\\ \underline{\text{Aleatorio}}\text{: aquel del que no se puede predecir el resultado que se va a obtener.}\end{cases}$

- El **<u>espacio muestral</u>** es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio. Se representa con la letra E.
- Llamamos **<u>Suceso</u>** a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Existen diferentes **tipos de Sucesos**:
  - <u>Suceso elemental</u>: es aquel que está formado por un único resultado del experimento.
  - <u>Suceso compuesto</u>: es aquel que está formado por más de un resultado del experimento aleatorio.
  - <u>Suceso seguro</u>: es aquel que se verifica siempre. Es justamente el espacio muestral
  - <u>Suceso Imposible</u>: es aquel que no se verifica nunca. Se representa con $\varnothing$
  - <u>Suceso contrario o complementario</u>: dos sucesos son contrarios o complementarios si la verificación de uno implica la no verificación del otro. El contrario de A se representa con $\overline{A}$.
  - <u>Sucesos incompatibles</u>: son aquellos que no se pueden verificar a la vez. $A \cap B = \varnothing$

- Luego se explican algunas de las **operaciones con sucesos**:
  - <u>Unión de Sucesos</u>: dados dos sucesos A y B, el suceso unión, $A \cup B$, es aquel que se verifica si lo hacen al menos uno de los dos sucesos A o B.



  - <u>Intersección de sucesos</u>: dados dos sucesos A y B, el suceso intersección, $A \cap B$, es aquel que se verifica si lo hacen A y B al mismo tiempo.



- <u>Propiedades de las operaciones con sucesos:</u>

Propiedades	Unión	Intersección
Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Simplificativa	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Absorción	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
Elemento Neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
Complementación	$A\cup\overline{A}=E$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
LEYES DE MORGAN	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

- **<u>Definición de probabilidad:</u>** cuando repetimos un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa = $\frac{n_A}{n}$ (donde $\begin{cases} n_A = \text{nº de veces que ocurre el suceso A} \\ n = \text{nº de veces que se hace el experimento} \end{cases}$) de un suceso A tiende a aproximarse a un valor fijo, ese valor se define como probabilidad del suceso A (P(A))

- **<u>Definición axiomática de probabilidad</u>**: otra forma de definir la probabilidad está basada en unos principios tan claros y evidentes que son admitidos sin necesidad de demostración, son los axiomas de probabilidad.

$\boxed{Axioma\ 1}$ $0\le P(A)\le 1$ $\quad A$ es cualquier suceso.

$\boxed{Axioma\ 2}$ $P(\varnothing)=0$ y $P(E)=1$

$\boxed{Axioma\ 3}$ Si A y B son dos sucesos son incompatibles, es decir, $A\cap B=\varnothing$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Consecuencias

$\boxed{1}$ $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$

$\boxed{2}$ (2 sucesos) $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

$\boxed{3}$ (3 sucesos) $\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$

3 Regla de Laplace:

Para poder aplicar esta regla, los diferentes sucesos elementales del experimento aleatorio tienen que ser equiprobables, es decir, que todos tengan la misma probabilidad.

La probabilidad de un suceso A es igual al cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables al suceso A}}{\text{Nº de casos posibles}}}$$

- Probabilidad condicionada

La probabilidad de que ocurra un suceso B una vez ha ocurrido el suceso A, se representa por P(B / A) y se calcula así:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \qquad \text{siendo} \quad P(A) > 0$$

De la expresión anterior se deduce que: $\boxed{P(A\cap B) = P(B/A)\cdot P(A)}$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD CONDICIONADA

1. $P(\varnothing / A) = 0$
2. $P(A/A) = 1$ $\qquad P(A) > 0$
3. $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$

Nota : *SUCESOS INDEPENDIENTES*: dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el resultado del segundo suceso B $\boxed{P(A/B) = P(A)}$ $\boxed{P(B/A) = P(B)}$

* Si A y B son independientes $\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$

- Pruebas compuestas

Hay experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. Se llaman pruebas compuestas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes-

Dos pruebas compuestas son independientes cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman dependientes.

Ejemplo:

Experiencias independientes: Tirar una moneda y un dado a la vez.

Experiencias dependientes: Sacar dos bolas de una urna sin reemplazamiento

- Probabildad total

Sean n sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n incompatibles dos a dos con $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$ y un suceso cualquiera B del espacio muestral, se denomina probabilidad total del suceso B:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \ldots\ldots P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

- Teorema de Bayes

Sean n sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n incompatibles dos a dos con $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$ y un suceso cualquiera B del espacio muestral. Las probabilidades a posteriori $P(A_i / B)$ se determinan mediante la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)} \quad \text{siendo} \quad P(B) > 0$$

3. EJERCICIOS RESUELTOS

- ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

1. Clasifica los siguientes experimentos como deterministas o aleatorios.

a) Lanzar una moneda al aire ALEATORIO

b) Pinchar un globo DETERMINISTA

c) Frenar un coche DETERMINISTA

d) Sacar una carta de una baraja ALEATORIO

2. Sean A, B y C, tres sucesos del espacio muestral E. Utilizando estos sucesos, expresa:

a) Los tres sucesos suceden simultáneamente. $A \cap B \cap C$

b) Ocurren A o B, pero no C. $(A \cup B) \cap \overline{C}$

c) Ocurre alguno de los tres sucesos. $A \cup B \cup C$

d) Ninguno de los tres sucesos sucede: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

3. En el experimento de lanzar un dado con forma de dodecaedro, cuyas caras están numeradas del 1 al 12, halla:

a) El espacio muestral E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

b) Los sucesos elementales C = { 1 }, D = { 2 }, ..., F = { 12 }

c) Suceso A = múltiplos de 3 A = { 3, 6, 9,12 }

d) Suceso B = números pares B = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}

e) Suceso AUB AUB = { 2,3,4,6,8,9,10,12}

f) Suceso $A \cap B$ $A \cap B$ = { 6, 12 }

g) ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?

SON COMPATIBLES YA QUE $A \cap B \neq \varnothing$

h) Halla $\overline{A}$ $\overline{A}$ = no ser múltiplo de 3 = { 1,2,4,5,7,8,10,11}

4. Describe el espacio muestral del lanzamiento de dos dados.

E = { (1,1) , (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),.......,(5,6), (6,1) , (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

5. Se consideran los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con P(A) = 0'7 , P(B) = 0'6 y $P(A \cap B)$ = 0'4. Calcular $P(A \cup B)$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'7 + 0'6 - 0'4 = 0'9$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) \underset{\text{LEYES DE MORGAN}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0'4 = 0'6$$

6. Sean los sucesos A y B tales que $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Calcula:

a) $P(A\cup B)$ $\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3+4-2}{8}=\frac{5}{8}$

b) $P(\overline{A})$ $\quad P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{8-3}{8}=\frac{5}{8}$

c) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ $\quad P(\overline{A}\cup\overline{B})\underset{\text{LEYES DE MORGAN}}{=}P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$

d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ $\quad P(\overline{A}\cap\overline{B})\underset{\text{LEYES DE MORGAN}}{=}P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

- LEY DE LAPLACE

1. De una baraja de 40 cartas española, se extrae una carta. Calcular las probabilidades siguientes: (R = “ ser rey “ C = “ ser copa” F = “ ser figura”)

a) Que sea un rey $P(R)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$

b) Que sea de copas $P(C)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

c) Que no sea figura $P(\overline{F})=\frac{28}{40}$ o $P(\overline{F})=1-P(F)=1-\frac{12}{40}=\frac{40-12}{40}=\frac{28}{40}$

d) Que sea el 7 de espadas $P(\text{" sea el 7 de espadas"})=\frac{1}{40}$

2. De una urna que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10 se extrae una bola. Consideremos los sucesos: A = “obtener número par”, B = “obtener un número mayor que siete” y C = “obtener un múltiplo de tres” Calcular la probabilidad de los sucesos: A, B, C, A∩B, AUB, A∩C, B∩C, A∩B∩C.

A = {“obtener número par”} = {2, 4, 6, 8,10} $\Rightarrow P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

B = { “obtener un número mayor que siete “} = { 8, 9, 10 }, $\Rightarrow P(B)=\frac{3}{10}$

C = { “obtener un múltiplo de tres “} = { 3 , 6, 9 } $\Rightarrow P(C)=\frac{3}{10}$

A∩B = { 8,10 } $\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ $\qquad$ AUB = { 2,4,6,8,9,10} $\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

A∩C = { 6 } $\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{1}{10}$ $\qquad$ B∩C = { 9 } $\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{1}{10}$

A∩B∩C = ∅ $\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0$

3. María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

a) Calcula la probabilidad de que gane Laura.

b) Calcula la probabilidad de que gane María.

Solución

Hemos visto en el ejercicio 4 que el espacio muestral del lanzamiento de dos dados es:

E = { (1,1) , (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),(2,1),......,(5,6), (6,1) , (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

Sean los sucesos L = {“gana Laura”} , M= {“gana María”} Entonces:

- Gana Laura si sale el mismo número {(1,1), (2,2), (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) }
- Gana María si la suma es 7 {(1,6), (6,1), (2,5) , (5,2) , (3,4) , (4,3) }

a) P(“gana Laura”) = P(L) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

b) P(“gana María”) = P(M) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

♦ INDEPENDENCIA DE SUCESOS

1. En el lanzamiento de un dado consideramos los sucesos:

A = { “ obtener un 5 “} = { 5 },

B = { “ obtener número impar “} = { 1, 3, 5 },

C = { “ obtener número mayor que 4 “}= { 5 , 6 }

a) ¿Los sucesos A y B son independientes?

b) ¿Los sucesos B y C son independientes?

$$P(A)=\frac{1}{6} \quad P(B)=\frac{3}{6} \quad P(C)=\frac{2}{6}$$

A∩B = { 5 } B∩C = { 5 } $\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6} \quad P(B\cap C)=\frac{1}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{A y B NO SON INDEPENDIENTES}}{P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(B)\cdot P(C)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \\ P(B\cap C)=\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{B y C SON INDEPENDIENTES}}{P(B)\cdot P(C)=P(B\cap C)}$$

2. Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargados dos programas antivirus que actúan independientemente uno del otro. El programa A detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0'9 y el programa B detecta el virus con una probabilidad de 0'8. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado?

Solución

Sean los sucesos:

A = {"el programa A detecta la presencia de un virus"} $P(A) = 0'9 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0'1$

B = {"el programa B detecta la presencia de un virus"} $P(B) = 0'8 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0'2$

P(" el virus no sea detectado") $= P(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\substack{\text{SON} \\ \text{INDEPENDIENTES}}}{=} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0'1 \cdot 0'2 = 0'02$

3. En un centro de secundaria, aprueban Biología 4 de 5 alumnos, las Matemáticas las aprueban 2 de cada 3 alumnos y 3 de cada 5 alumnos aprueban la Lengua. Elegido al azar un alumno matriculado de esas asignaturas en ese centro. Calcula la probabilidad de que:

a) Suspenda esas tres asignaturas

b) Suspenda sólo una de ellas.

Solución

Sean los sucesos:

B = {"aprobar Biología"} $P(B) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{1}{5}$

M = {"aprobar Matemáticas"} $P(M) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

L = {"aprobar Lengua "} $P(L) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\overline{L}) = \frac{2}{5}$

a) P(" suspender las 3 asignaturas") $= P(\overline{B} \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \underset{\substack{\text{Son} \\ \text{Independientes}}}{=} P(\overline{B}) \cdot P(\overline{M}) \cdot P(\overline{L}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$

b) P(" suspender sólo una") $= P(\overline{B} \cap M \cap L) + P(B \cap \overline{M} \cap L) + P(B \cap M \cap \overline{L}) =$

$$\underset{\substack{\text{Son} \\ \text{Independientes}}}{=} P(\overline{B}) \cdot P(M) \cdot P(L) + P(B) \cdot P(\overline{M}) \cdot P(L) + P(B) \cdot P(M) \cdot P(\overline{L}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{75} + \frac{12}{75} + \frac{16}{75} = \boxed{\frac{34}{75}}$$

4. La probabilidad de que un estudiante universitario termine la carrera en los años establecidos por el plan de estudios es de $\frac{3}{5}$ y la de que su hermana finalice la suya sin perder ningún año es de $\frac{2}{3}$. Halla la probabilidad de que:

a) Ambos terminen sus estudios en los años establecidos.

b) Solo el varón los termine en plazo fijado.

c) Al menos uno de los dos los termine en el tiempo establecido

Solución

Sean los sucesos:

A = {"el estudiante termine en los años establecidos"} $P(A)=\frac{3}{5}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{2}{5}$

B = {"la hermana acabe la carrera sin perder ningún año"} $P(B)=\frac{2}{3}\Rightarrow P(\overline{B})=\frac{1}{3}$

a) P(" ambos terminen en los años establecidos") $=P(A\cap B)\underset{\text{Son Independientes}}{=}P(A)\cdot P(B)=\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=\frac{2}{5}$

b) P(" solo el varón acabe en los años establecidos") $=P(A\cap\overline{B})\underset{\text{Son Independientes}}{=}P(A)\cdot P(\overline{B})=\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{1}{5}$

c) P(" al menos uno termine en los años establecidos") $=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{9+10-6}{15}=\frac{13}{15}$$

- PROBABILIDAD CONDICIONADA

1. En un club deportivo, el 70% de los socios practica la natación, el 25% juega al tenis y el 20% practica los dos deportes. Si escogemos al azar a uno de los socios, indica cuál es la probabilidad de que:

a) Si juega al tenis, practique la natación.

b) Si practica la natación, juegue al tenis.

c) Practique algún deporte.

Solución

N =" Practicar natación" , T =" Practicar tenis" $P(N)=0'7$ $P(T)=0'25$ $P(N\cap T)=0'2$

a) $P(N/T)=\frac{P(N\cap T)}{P(T)}=\frac{0'2}{0'25}=0'8$

b) $P(T/N)=\frac{P(T\cap N)}{P(N)}=\frac{0'2}{0'7}\approx 0'285$

c) $P(N\cup T)=P(N)+P(T)-P(N\cap T)=0'7+0'25-0'2=0'75$

2. En una clase de 38 alumnos hay 18 chicas y 20 chicos. La mitad de las chicas y el 80% de los chicos son aficionados al fútbol. Elegimos un estudiante al azar y consideramos los sucesos: O =" es un chico" , A = " es una chica", F = " es aficionado al fútbol" . Hallar :

a) P(O) y P(A) $P(O)=\frac{20}{38}$ $P(A)=\frac{18}{38}$

b) P(F/O) y P(F/A)

$P(F/O)=\frac{16}{20}$ (Chicos que les gusta el fútbol 80%·20 = 0'8·20 = 16)

$P(F/A)=\frac{9}{18}$

c) P(O∩F) y P(A∩F) *Utilizamos la formula de la probabilidad condicionada*

$$* \; P(F/O)=\frac{P(O\cap F)}{P(O)} \Rightarrow P(O\cap F)=P(F/O)\cdot P(O)$$

$$P(O\cap F)=\frac{16}{20}\cdot\frac{20}{38}=\frac{16}{38}$$

$$* \; P(F/A)=\frac{P(A\cap F)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap F)=P(F/A)\cdot P(A)$$

$$P(A\cap F)=\frac{9}{18}\cdot\frac{18}{38}=\frac{9}{38}$$

3. Dados los sucesos aleatorios A y B, se sabe que : $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$ y $P(A)=P(A/B)=\frac{1}{3}$.

a) Razonar si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcular $P(A\cup B)$

Solución $P(A)=\frac{1}{3}$ $P(\overline{B})=\frac{3}{4}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

a) $$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{A y B SON INDEPENDIENTES}}{P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)}$$

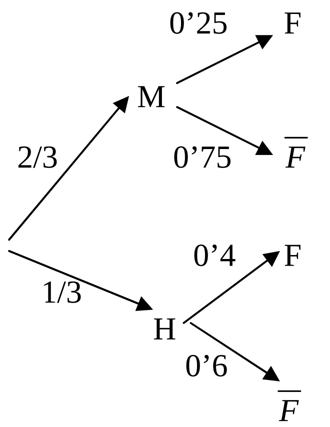
b) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{4+3-1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

NOTA: Para hacer los ejercicios de probabilidad total y del Teorema de Bayes se recomienda hacer un árbol de decisión o diagrama de árbol.

- PROBABILIDAD TOTAL

1. En el segundo curso de bachillerato de cierto instituto se han matriculado el doble de mujeres que de varones. Sabiendo que un 25% de las mujeres fuman y que no lo hacen un 60% de los varones, determinar la probabilidad de que seleccionada al azar una persona en el segundo curso de bachillerato de ese instituto resulte ser una persona fumadora.

Solución M = {"Mujeres matriculadas"} F= {"Fumar"}
H = {"Hombres matriculados"}

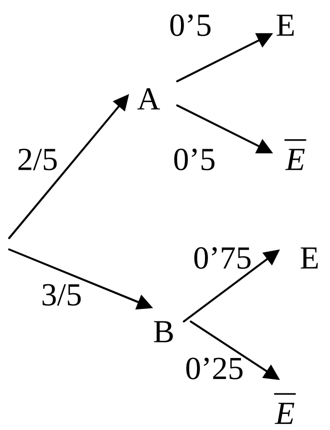


$$\boxed{P(F)=P(M)\cdot P(F/M)+P(H)\cdot P(F/H)=\frac{2}{3}0'25+\frac{1}{3}0'4=0'3}$$

2. Dos profesores A y B comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A y 3/5 para B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50% del tiempo y B el 25%. Calcula la probabilidad de estar presente el profesor cuando le llaman.

Solución

A = {"Llamadas que llegan al profesor A"} E= {"Estar presente cuando llaman por teléfono"}
B = {"Llamadas que llegan al profesor B"}



$$\boxed{P(E)=P(A)\cdot P(E/A)+P(B)\cdot P(E/B)=\frac{2}{5}0'5+\frac{3}{5}0'75=0'65}$$

♦ PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

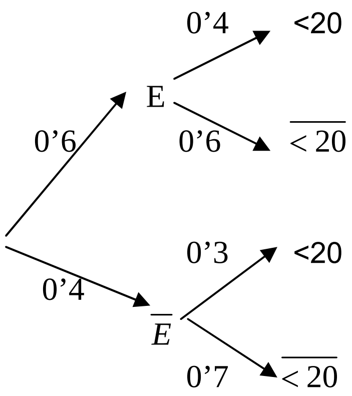
1. El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españolas. De éstos el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:

a) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.

b) La probabilidad de que sea español sabiendo que tiene menos de 20 años.

Solución

E = {“Ser visitante español en el museo el mes de mayo”} <20 = {“Tener menos de 20 años”}



a) $\boxed{P(<20)=P(E)\cdot P(<20/E)+P(\overline{E})\cdot P(<20/\overline{E})=0'6\cdot 0'4+0'4\cdot 0'3=0'36}$

b) $\boxed{P(E/<20)\underset{\substack{Teorema\\Bayes}}{=}\dfrac{P(E\cap <20)}{P(<20)}=\dfrac{0'6\cdot 0'4}{0'36}=\dfrac{0'24}{0'36}=0'666...=0'\widehat{6}}$

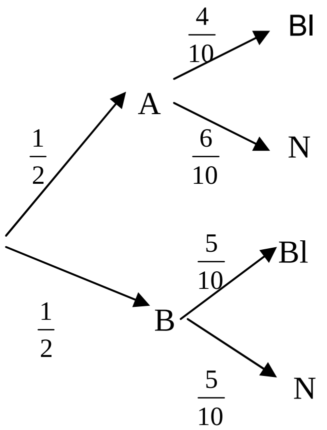
2. Una urna A contiene 4 bolas blancas y 6 negras y otra urna B contiene 5 bolas blancas y 5 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.

a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) Suponiendo que la bola extraída sea blanca calcula la probabilidad de que la urna elegida haya sido la B.

Solución A = {“Elegir la urna A”} B = {“Elegir la urna B”}

Bl = {“Sacar bola blanca”} N= {“Sacar bola negra”}



a) $\boxed{P(N)=P(A)\cdot P(N/A)+P(B)\cdot P(N/B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{6}{20}+\frac{5}{20}=\frac{11}{20}=0'55}$

b)
$$*P(Bl)=1-P(N)=1-0'55=0'45$$
$$P(B/Bl)\underset{\substack{Teorema\\Bayes}}{=}\frac{P(B\cap Bl)}{P(Bl)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}}{0'45}=\frac{0'25}{0'45}=0'5555...=0'\widehat{5}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De los sucesos A y B se sabe que: P(A) = 0’4 , P(B) =0’3 y P($A\cap B$) = 0’3.

Hallar las siguientes probabilidades: P($A\cup B$) , P(A /B) , P($\overline{A}\cap\overline{B}$) y P($\overline{A}\cup\overline{B}$),

2. De los sucesos A y B se sabe que: P(A) = 0’4 , P(B) =0’5 y P($\overline{A}\cap\overline{B}$) = 0’3.

Hallar las siguientes probabilidades: P($A\cup B$) y P($A\cap B$)

3. Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que

P(A) = $\frac{1}{3}$, P(B) = $\frac{1}{5}$ y P($A\cup B$) = $\frac{7}{15}$, halla:

a) La probabilidad de que se verifiquen A y B (Solución = 1/15)

b) La probabilidad de que no se verifiquen A ni B (Solución= 8/15)

4. Según un estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
(Solución = 0’13)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?
(Solución = 0’47)

Espacio muestral y ley de Laplace

5. En un sorteo de lotería nos fijamos en la cifra en que termina el “gordo”

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos: A = “ menor que 4” B= ” Par” C= ”Mayor que 5”

c) Halla los sucesos $A\cup B$, $B\cap C$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $A\cap C$

6. Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.

a) Determinar el espacio muestral asociado al experimento

b) Calcular la probabilidad de que no escriban la misma vocal. (Solución= 4/5)

Independencia de sucesos

7. Dos sucesos A y B son independientes con P(A) = 0'4 , P(B) = 0'5. Calcular la probabilidad de que no suceda ninguno de los dos. (Solución = 0'3)

8. Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que:

P(A) = $\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{1}{3}$ y P($A \cup B$) = $\frac{1}{2}$

a) ¿ Son A y B sucesos independientes?. Razónese

b) Calcúlese P($\overline{A} / \overline{B}$)(Solución= 3/4)

9. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es 0'6, la segunda 0'8 y la probabilidad de que pase ambas es 0'5. Se pide:

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba. (Solución = 0'9)

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba(Solución = 0'1)

c) ¿Son ambas pruebas sucesos independientes? NO

10. Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0'6, la empata con probabilidad 0'3, y la pierde con probabilidad 0'1. El jugador juega dos partidas.

a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio (Hacer un Árbol de decisión)

b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida (Solución = 0''84)

11. Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90.

a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores. (Solución = 0'14)

b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores (Solución = 0'995)

12. Juan, María y Carlos quedan para ir al cine. Las probabilidades de llegar con retraso son 0’3, 0’2 y 0’1, respectivamente. El retraso o no de uno de ellos no depende de los otros dos. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Ninguno se retrasa (Solución = 0’504)

b) Solo uno se retrasa (Solución = 0’398)

c) Al menos uno se retrasa (Solución = 0’496)

13. En una Urna A, hay 4 bolas blancas, numeradas del 1 al 4, y 2 bolas azules, numeradas del 1 al 2, mientras que en la urna B hay 2 bolas blancas, numeradas del 1 al 2, y 4 bolas azules, numeradas del 1 al 4. Si se extraen al azar dos bolas, una de cada urna, hallar:

a) La probabilidad de que tengan el mismo número. (Solución = 10/36)

b) La probabilidad de que sean del mismo color (Solución = 16/36)

Probabilidad condicionada

14. Una caja contiene 10 tornillos, de los cuales tres son defectuosos. Se extraen de una forma sucesiva y sin devolverlos a la caja 4 tornillos. Calcula la probabilidad de que:

a) Los cuatro tornillos extraídos sean buenos (Solución = 0’1666…)

b) Al menos un tornillo, de los cuatro extraídos, sea defectuoso. (Solución = 0’8333…)

15. Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja? (Solución = 3/20)

16. De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes. (Solución = 0’000405)

b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera (Solución = 0’00324)

17. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.

b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

18. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen? (Solución = **13/15**)

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no? (Solución = **8/15**)

19. En una baraja de 40 cartas, se toman tres cartas distintas. Calcula la probabilidad de que las tres sean números distintos? (Solución = 192 / 247)

20. En una ciudad el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan de multicereales y el 20% consume ambos

a) Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que coma pan multicereales? (Solución = 0'3636….)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan? (Solución = 0'35)

Árbol de decisión o Diagrama de árbol

21. a) Realizar un árbol de decisión del experimento aleatorio de lanzar tres monedas (llamamos cara y cruz a cada cara de la moneda)

b) Calcular la probabilidad de que salgan todo cara (Solución = 1/8)

22. En una urna hay dos bolas blancas y 3 negras. Dos personas sacan, alternativamente, una bola cada una, sin reemplazamiento. Gana la primera que saque una bola blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que gane la persona que empieza el juego? (Solución = 3/5)

Probabilidad total

23. Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por 100 preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas y solo una es correcta. Setenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el alumno ha preparado en las que tiene una probabilidad del 80% de contestar acertadamente. En las restantes señalará al azar una de las cuatro respuestas. Si se elige al azar una de las respuestas, ¿cual es la probabilidad de que sea correcta? (Solución = 0'635)

24. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Si la carta extraída es un rey, nos dirigimos a la urna 1, y en caso contrario nos dirigimos a la urna 2. A continuación extraemos una bola. El contenido de la urna 1 es de 7 bolas blancas y 5 negras y el de la urna 2 es de 6 bolas blancas y 4 negras. Halla:

a) La probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna 2. (Solución = 0'54)

b) La probabilidad de que la bola extraída de la urna sea negra.(Solución = 0'40166…)

Probabilidad total y Teorema de Bayes

25. El 70% de los alumnos de un instituto son de bachillerato y el resto de la ESO. De los alumnos de bachillerato, el 60% estudia más de tres horas al día y sólo el 30% de los alumnos de ESO estudia más de tres horas al día.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de dicho instituto, elegido al azar, estudie más de tres horas al día. (Solución = 0'51)

b) Sabiendo que un alumno de este instituto, elegido al azar, estudia más de tres horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de bachillerato? (Solución = 0'82352..)

26. En un IES hay 3 profesores de física. Cuando un alumno se matricula en el centro tiene igual probabilidad de que le asignen uno u otro. La probabilidad de obtener como nota final un sobresaliente con el profesor A es 0'3; la de obtenerlo con el profesor B es de 0'28; y la de obtenerlo con el profesor C es 0'35.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno matriculado en física obtenga como nota final un sobresaliente. (Solución = 0'31)

b) Sabiendo que un alumno ha tenido un sobresaliente como nota final en física, ¿cuál es la probabilidad de que le hubieran asignado el profesor C? (Solución = 0'376)

27. En una población el 40% son hombres y el 60% mujeres. En esa población el 80% de los hombres y el 20% de las mujeres son aficionados al fútbol.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.
(Solución = 0'44)

b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (Solución = 0'27777…)

28. El 75% de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Calcular:

a) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya acudido andando. (Solución = 0'333…)

b) Si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que no haya llegado puntual.
(Solución = 0'325)

29. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas? (Solución = 0'4)

b) Si la segunda bola ha resultado negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido? (Solución = 0'2)

30. Una imprenta tiene en almacén 1000 libros de una edición A, 1200 de la edición B y 800 de la edición C. Se sabe que el 3% de los libros A, el 1'5% de B y el 2% de C tienen defectos. Se elige un libro al azar.

a) Halla la probabilidad de que tenga defectos. (Solución = 0'02133…)

b) Sabiendo que el libro presenta defectos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la edición B? (Solución = 0'281…)

31. El 20% de los habitantes de una determinada población son jubilados y otro 20% son estudiantes. La música clásica les gusta al 75% de los jubilados, al 50% de los estudiantes y al 20% del resto de la población. Calcula la probabilidad de que elegido al azar una persona a la que le gusta la música clásica sea jubilada. (Solución = 0'405)

32. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0'01 para A, de 0'02 para B y de 0'03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) ¿Cual es la probabilidad de que no sea defectuoso? (Solución = 0'985)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso? (Solución = 0'603)

33. En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta ser defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que sea halógena?
(Solución = 0'1428571)

34. Una urna A contiene 5 bolas blancas y 4 negras y otra B contiene 1 blanca y dos negras. Se extrae una bola al azar de la urna A y se introduce en B. Después se extrae de la urna B una bola al azar.
a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.
(Solución = 7/18= 0'38…)
b) Supongamos que la bola extraída de la urna B sea blanca, calcula la probabilidad de que la extraída de la urna A también sea blanca. (Solución = 5/7=0'714285714…)

35. La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0'2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0'85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de la grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0'1.
a) Si se elige al azar un vehículo de dicha compañía de coches, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?
b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido por causa de un accidente?

36.
En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva? (Solución = 0'289)

37. Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y dos doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?
(Solución = 1/8).
b) Si el resultado de la primera tirada ha sido 1 y el de la segunda 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado. (Solución = 8/9)