

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El problema de Paco

Paco had a total of 37 chickens and pigs on his farm. All together, they had 98 feet.

How many chickens were there and how many pigs?

ESTÁNDARES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (NCTM)

Necesidad

El **objetivo de las matemáticas** en la escuela debe ser que todos los alumnos sean cada vez más capaces y estén más dispuestos a **enfrentarse y resolver problemas**.

La resolución de problemas es la piedra angular de las matemáticas escolares. Sin la **capacidad de resolver problemas**, la **utilidad y el poder de las ideas**, los **conocimientos y las destrezas matemáticas** se ven gravemente limitados.

Beneficios

La resolución de problemas, incluyendo el diseño e implementación de estrategias, permite:

- Adquirir un **saber mucho más profundo y útil** que la simple realización de un **cálculo** o el conocimiento de **hechos, conceptos y procedimientos**.
- Aprender nuevas ideas y destrezas matemáticas**.
- Despertar **interés y curiosidad**, mejorar el **autoconcepto**... **MOTIVACIÓN**

Enseñanza de resolución de problemas

Un enfoque de la enseñanza de las matemáticas centrado en los problemas utiliza **problemas interesantes y bien seleccionados** para **iniciar las clases** de matemáticas y **atraer a los alumnos**.

Los **BUENOS PROBLEMAS** pueden inspirar la **exploración de ideas matemáticas** importantes, fomentar la **persistencia** y reforzar la necesidad de **comprender** y utilizar diversas **estrategias, propiedades y relaciones matemáticas**.

La **resolución de problemas** en los **programas de enseñanza** debe permitir a todos los estudiantes:

- Construir nuevos conocimientos matemáticos
- Resolver problemas que surgen en matemáticas y en otros contextos;
- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas;
- Controlar y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas.

¿CÓMO SE HACE?

¿Cómo se resuelve un problema matemático?

Cada problema que hay que resolver requiere cierta **reflexión** y **conocer** un gran número de **estrategias** para la resolución de problemas.

¿Cómo se aprende a razonar matemáticamente?

Es fundamental hacer muchos problemas para **practicar** y, **al final**, **intuitivamente** se recurrirá a la estrategia adecuada para responder al problema.

¿Cuál de las estrategias debo utilizar?

Puede haber muchas maneras diferentes de atacar un problema, por lo que es importante **probar varias estrategias** hasta encontrar una que funcione.

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PÓLYA

En *How to Solve It* (1945), George Pólya (1887-1985) identifica **cuatro principios** que constituyen la base para resolver un problema.

Primer principio de Pólya: Comprender el problema

Los alumnos se ven a menudo bloqueados en sus esfuerzos por resolver un problema porque **no lo comprenden** totalmente o ni siquiera en parte.

En el aula se deben **plantear preguntas** como las siguientes (también son preguntas que los alumnos pueden y deben hacerse a sí mismos):

- ¿Entiendes todas las palabras utilizadas en el enunciado del problema? Si no es así, busca su significado.
- ¿Qué se te pide que encuentres o muestres?
- ¿Puedes plantear el problema con tus propias palabras?
- ¿Hay otra forma de plantear el problema?
- ¿Qué significa realmente (palabra clave) y cuál es su definición?

- ¿Puedes elaborar algunos ejemplos numéricos que ayuden a aclarar el problema?
- ¿Se te ocurre algún dibujo o diagrama que te ayude a entender el problema?
- ¿Hay suficiente información para encontrar una solución?
- ¿Existe información adicional?
- ¿Qué necesitas saber realmente para encontrar una solución?

Segundo principio de Pólya: Diseñar un plan

- Idear un plan puede requerir un **esfuerzo** considerable.
- A menudo hay muchas maneras razonables de resolver un problema, y la idea exitosa puede surgir solo gradualmente **tras varios ensayos infructuosos**.
- La mejor forma de aprender a **elegir la estrategia** adecuada es **resolviendo muchos problemas**.
- A medida que se adquiere **experiencia**, resultará cada vez más fácil elegir una estrategia.

Tercer principio de Pólya: Ejecutar el plan

- Ejecutar el plan suele ser más fácil que idearlo.
- Si un plan no funciona inmediatamente, hay que ser persistente.
- Si sigue sin funcionar, se descarta y se prueba una nueva estrategia.

Cuarto principio de Pólya: Mirar atrás

- Se puede ganar mucho volviendo la vista atrás a una solución acabada para **analizar lo que se ha pensado y averiguar cuál ha sido la clave** para resolver el problema.
- Así se adquiere "**poder matemático**": capacidad de tener buenas ideas para resolver problemas que nunca antes se nos habían ocurrido.
- Mirar hacia atrás es un paso que se suele pasar por alto, pero importante para desarrollar la capacidad de resolver problemas.

Las preguntas que hay que hacerse al mirar atrás son las siguientes:

- ¿Cuál fue el **factor clave** que me permitió idear un **plan eficaz** para resolver este problema?
- ¿Se me ocurre una **estrategia más sencilla** para resolver el problema?

- ¿Se me ocurre una **estrategia más eficiente** para resolver el problema?
- ¿Se me ocurre alguna **estrategia alternativa** para resolver el problema?
- ¿Se me ocurre algún otro problema o **clase de problemas** para los que este plan sería eficaz?

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Cómo deben enseñarse las estrategias de resolución de problemas?

- Deben recibir atención en la escuela para que los alumnos las aprendan.
- El conocimiento y el uso de estrategias deben integrarse transversal y longitudinalmente en el plan docente.
- En los primeros cursos, los profesores pueden ayudar a los niños a expresar, clasificar y combinar sus estrategias.
- Cuando los alumnos llegan a los cursos intermedios, deben poder reconocer cuándo conviene usar estrategias y decidir cuándo y cómo usarlas.

Algunas estrategias de resolución de problemas

- | | |
|---|--|
| • Utilizar el cálculo y el álgebra | • Utilizar el Principio del palomar |
| • Adivinar y comprobar | • Pensar que el problema está parcialmente resuelto |
| • Hacer una lista o tabla ordenada | • Pensar en un problema similar ya resuelto |
| • Hacer un dibujo | • Resolver un problema más sencillo (experimentar) |
| • Eliminar posibilidades | • Utilizar la geometría (simetría de un gráfico o imagen...) |
| • Utilizar una expresión (<i>fórmula</i>) | • Trabajar hacia atrás |
| • Utilizar un modelo | • Resolver un problema equivalente |
| • Usar diagramas | • Ser ingenioso |
| • Utilizar el razonamiento directo | • Considerar casos especiales (<i>experimentar</i>) |

- Resolver una ecuación
- Enumerar todas las posibilidades
- Buscar un patrón
- Conjeturar y comprobar

El problema del IVA

Tras recorrer las 400 calles iluminadas, visitar 3 librerías y disfrutar de las más de 11 millones de luces LED de la ciudad de Vigo, compré un libro que me costó 20 €. ¿Cuánto pagué de IVA? El IVA de los libros es de un 4%.

Utilizar el cálculo y el álgebra

Operaciones aritméticas, fracciones (proporciones y porcentajes), factorizaciones, m.c.m., m.c.d., ecuaciones, variables...

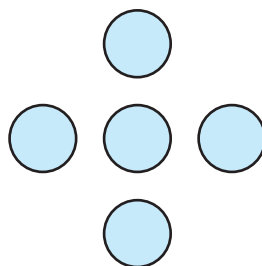
~~REGLA DE TRES X~~

El número de Antón

Antón is thinking of a number. If you double the number and add 11, the result is 39. What number is Toni thinking of?

El problema de los círculos

Place the digits 1, 2, 3, 4, and 5 in these circles so that the sums across and vertically are the same. Is there more than one solution?



Adivinar y comprobar

Haz una conjetura y comprueba si satisface las exigencias del problema. Si no es así, modifica la conjetura adecuadamente y vuelve a comprobarlo. Cuando la suposición finalmente se cumple, se ha encontrado una solución.

Adivinar es como experimentar, ya que nos da una idea de cuál debería ser la siguiente suposición.

Si podemos estar seguros de que sólo hay una solución, entonces la solución se ha encontrado. Además, el proceso suele ser bastante eficaz y puede ser el único método disponible, aunque los estudiantes suelen pensar que no es "correcto" resolver un problema adivinando.

El problema de María

María's Hardware has a number of bikes and trikes for sale. There are 27 seats and 60 wheels, all told. Determine how many bikes and how many trikes there are.

Hacer una lista ordenada

Haga una lista ordenada o una tabla para asegurarse de que no se pasa por alto ningún dato ni casos para los problemas que requieren considerar muchas posibilidades.

Hacer una tabla

Haz una tabla que refleje los datos del problema. Si se hace de forma ordenada, dicha tabla puede revelar patrones y relaciones que sugieran cómo puede resolverse el problema.

Dibujar un diagrama

Haz un diagrama o dibujo que represente los datos del problema con la mayor precisión posible. El lenguaje utilizado para describir situaciones y plantear problemas puede aclararse dibujando un diagrama adecuado, y las relaciones y propiedades imprevistas suelen quedar claras.

Los alumnos con capacidad visual suelen sacar provecho de hacer un diagrama o un dibujo.

El juego de la moneda de oro

Se trata de un juego para dos personas. Cada pareja de jugadores recibe 15 monedas de oro (marcadores). Por turnos, cada jugador retira una, dos o tres monedas del escritorio. El jugador que saque la última moneda gana la partida. Juega varias partidas, alternando el jugador que inicia el juego.

Idea una estrategia ganadora, primero individualmente mientras juegas y luego pensando conjuntamente cómo pueden jugar el primer o el segundo jugador para forzar una victoria.

Ayudas:

1. Para descubrir una estrategia ganadora, puede ser útil empezar con menos monedas. Empieza con sólo 7 monedas y comprueba si es posible que uno u otro jugador juegue de forma que se garantice la victoria. Inténtalo varias veces y no pases a 2 hasta que la respuesta esté clara.
2. Esta vez, comienza con 11 monedas en la mesa. ¿Es ahora posible para uno u otro jugador forzar una victoria? Juega varias partidas hasta que tanto tú como tu compañero estéis de acuerdo en que hay una estrategia ganadora, y luego ve cómo debe jugar el jugador que utiliza esa estrategia.
3. Amplía la estrategia del paso 2 al conjunto de 15 monedas.
4. ¿Funcionaría la estrategia si empezaras con 51 marcadores? Explícalo con cuidado y claridad.

Buscar un patrón

Considere una secuencia ordenada de ejemplos particulares de la situación general descrita en el problema. A continuación, examine detenidamente estos resultados, buscando un patrón que pueda ser la clave del problema.

Las matemáticas suelen caracterizarse como el estudio de patrones, y los patrones aparecen de alguna forma en casi todas las situaciones de resolución de problemas: patrones numéricos, patrones geométricos, patrones de recuento, patrones de enumeración, patrones retóricos... patrones de todo tipo.

Considera casos especiales

Al intentar resolver un problema complejo, considere una secuencia de casos especiales. Esto mostrará a menudo cómo proceder de forma natural de un caso a otro hasta llegar al caso en cuestión. Otra posibilidad es que los casos especiales revelen un patrón que permita resolver el problema.

El problema de Daniela

Daniela received grades of 78, 86, and 94 on the first three exams. For an A, the average on four exams must be at least 90. What can Dana do to get an A?

Utilizar variables (álgebra)

El álgebra también puede resolver problemas que parecen muy difíciles o que parecen un truco matemático.

A menudo, un problema requiere que se determine un número. Represente el número mediante una variable y utilice las condiciones del problema para establecer una ecuación que pueda resolverse para averiguar el número deseado.

Primero usamos un nombre de variable para lo que estamos viendo y luego hacemos algo de álgebra para resolver el problema. El uso de símbolos o variables suele facilitar la expresión de ideas matemáticas y, por tanto, la resolución de problemas.

El número de Lucas

Lucas is thinking of a number. If you multiply her number by 71, add 29, and divide by 2, you obtain 263. What is Luca's number? Solve this problem by working backward.

Trabajar hacia atrás

Se parte del resultado deseado y se retrocede paso a paso hasta alcanzar las condiciones iniciales del problema.

Muchos problemas requieren que se produzca una secuencia de acontecimientos que conduzca a un resultado final deseado. Al principio, estos problemas parecen oscuros e intratables, sin embargo, a menudo es más fácil trabajar hacia atrás desde el resultado final para ver cómo tendría que empezar el proceso para alcanzar el fin deseado.

Una tarde de sábado

Saturday afternoon, Antón, Brais, Celia, and Daniela stopped by the soda fountain for treats. Altogether, they ordered a chocolate malt, a strawberry milkshake, a banana

split, and a double-dip walnut ice-cream cone. Given the following information, who had which treat?

1. Both boys dislike chocolate.
2. Brais is allergic to nuts.
3. Celia bought a malt and a milkshake for Daniela and herself.
4. Daniela shared her treat with Brais.

Eliminar posibilidades

Suponga que tiene la garantía de que un problema tiene solución. Utilice los datos del problema para decidir qué resultados son imposibles. Entonces, al menos una de las posibilidades no descartadas debe prevalecer. Si se pueden descartar todas las posibilidades menos una, entonces ésta debe prevalecer.

Por supuesto, si utilizas esta estrategia en un problema y todas las posibilidades pueden descartarse correctamente, el problema no tiene solución.

¿Coincidencia?

- How many people must be in a room to be sure that at least two people in the room have the same birthday (not birth date)? Assume that there are 365 days in a year.
- How many people must be in a room to be sure that at least three have the same birthday?

Principio del palomar

Si se colocan más de n palomas en n palomares, entonces debe haber al menos un palomar con dos palomas.

Si se colocan m palomas en n palomares y $m > n$, entonces debe haber al menos un palomar con *parte entera por exceso de m/n* palomas.

Marta Pérez Rodríguez

Departamento de Matemáticas

Facultade de Ciencias da Educación e do Deporte

A Xunqueira, S/N

Universidade de Vigo

martapr@uvigo.es

<https://telocuentanlasmaticas.webs.uvigo.es/>

<https://www.facebook.com/TLCLasMatematicas>

<https://twitter.com/TLCLmatematicas>

<https://www.instagram.com/telocuentanlasmates/>